

آموزش حسابان یازدهم

حل تمرین های فصل سوم

(توابع نمایی و لگاریتمی)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱



۱ تحت شرایط ایده‌آل، جرم یک توده معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی گرم باکتری وجود دارد.

الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.

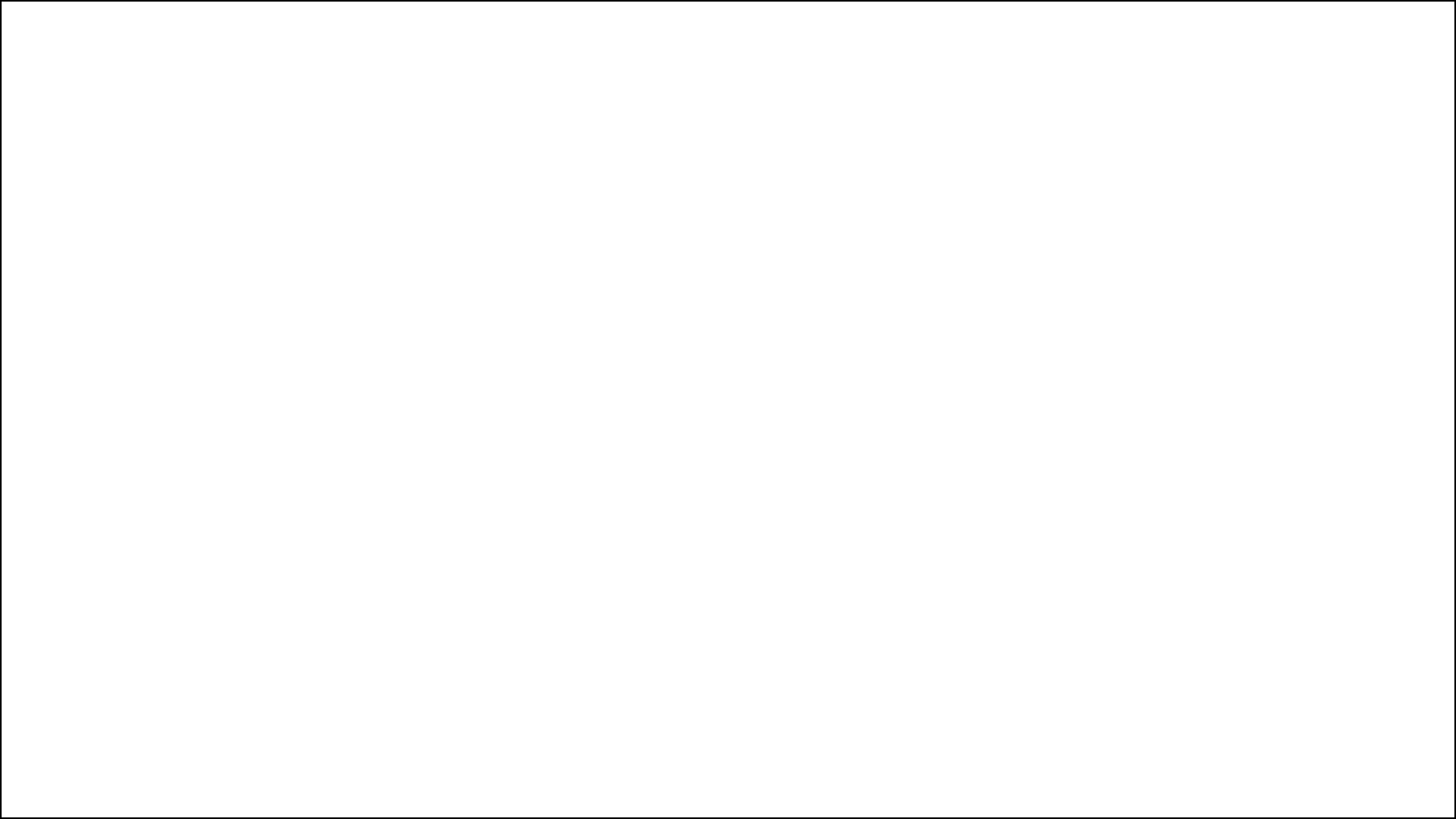
ب) جرم توده را پس از ۲۰ ساعت برآورد کنید.

$$\text{الف)} \quad m(t) = 2^t \times 100$$

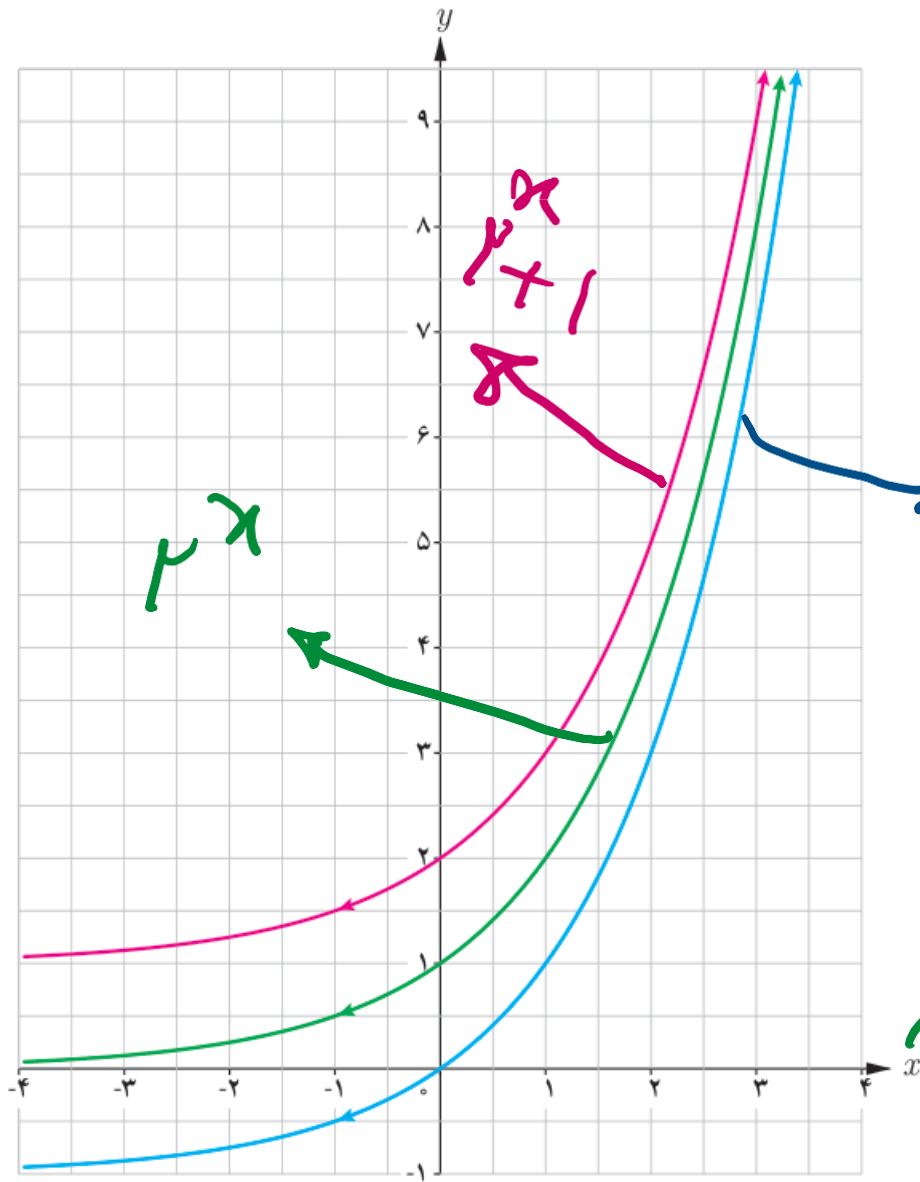
$$\text{ب)} \quad m(20) = 2^{20} \times 100$$

ALIGEBRA.COM

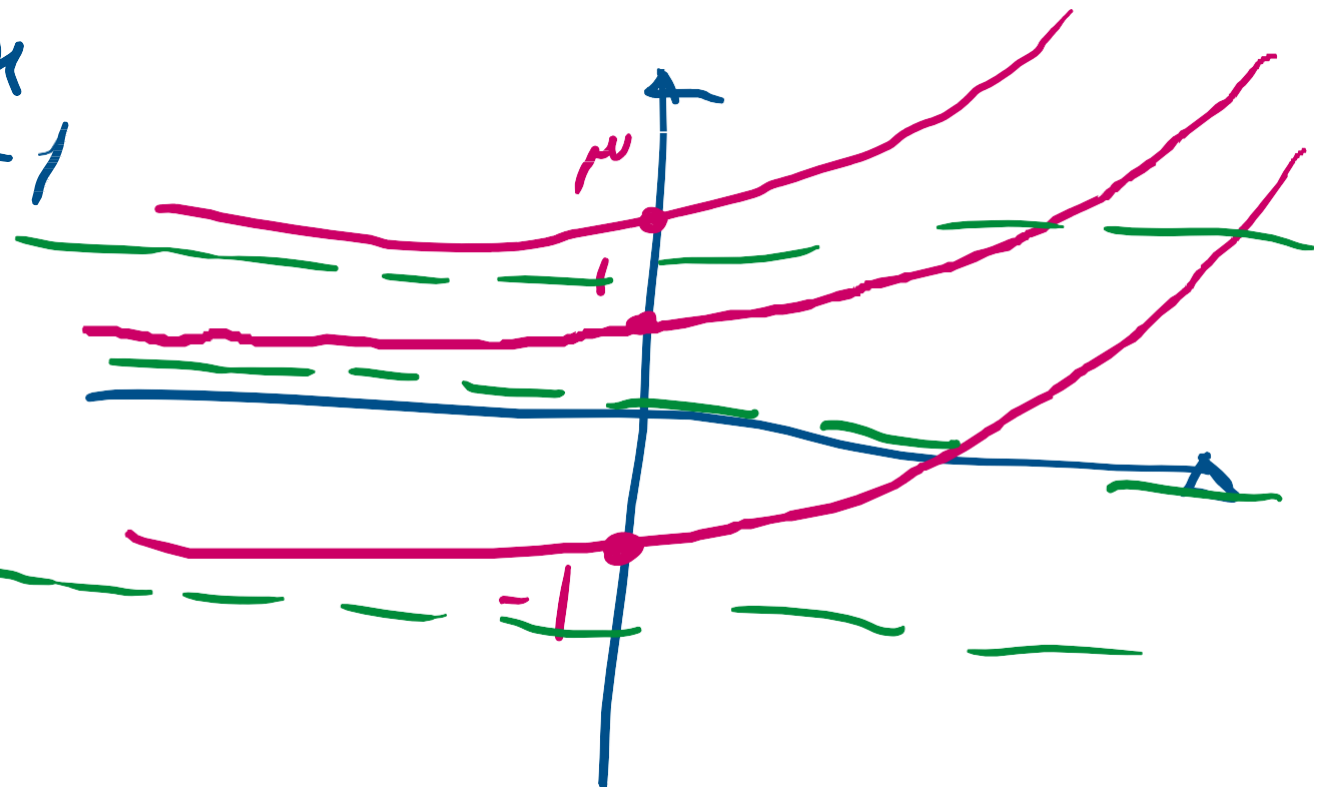
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

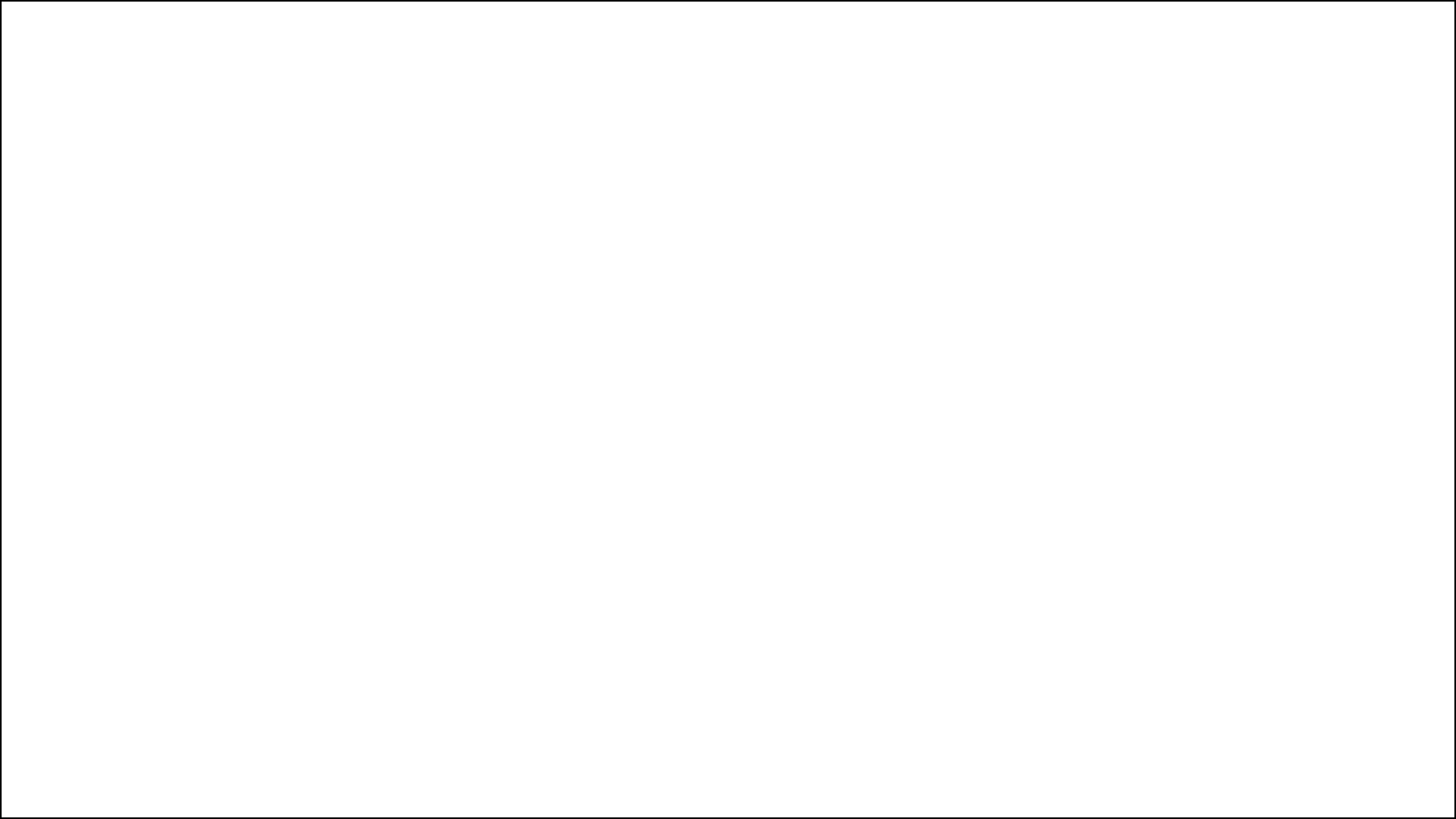


۲ نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = 2^x + 1$ و $y = 2^x - 1$ در شکل روبه‌رو آمده‌اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه نمودارهای توابع $y = a^x$ ، $y = a^x + 2$ و $y = a^x - 2$ با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ ($a > 1$).



2^x
 $y = 2^x$
 $y = 0$
 $y = -2$





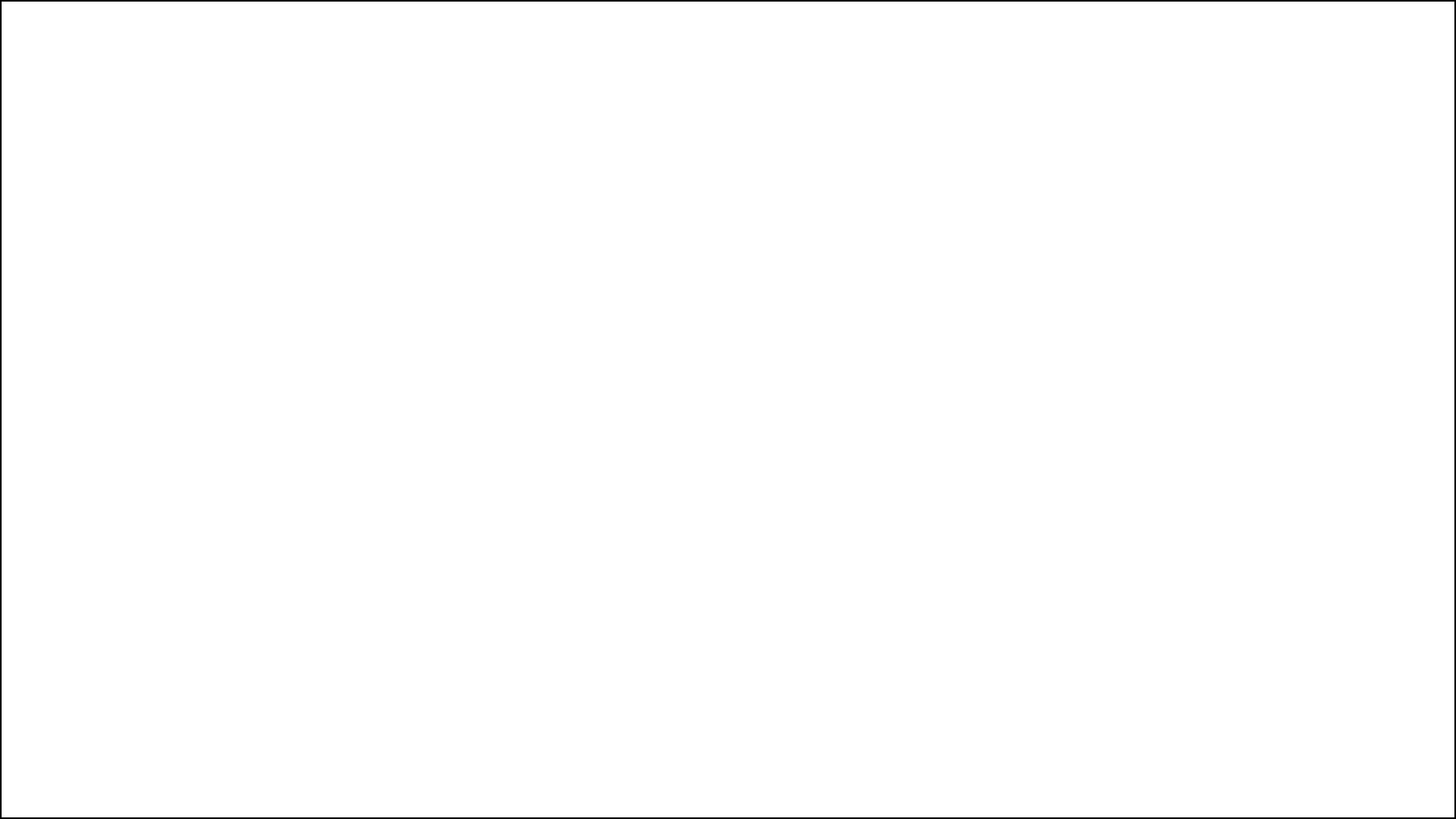
۳ داروها در بدن با ادرار دفع می شوند. فرض کنید 10 میلی گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطه $A(t) = 10 \cdot (0.8)^t$ به دست می آید.

الف) مقدار دارو پس از 8 ساعت چقدر است؟

ب) چه درصدی از دارو در هر ساعت از بین می رود؟

$$\text{الف) } A(8) = 10 \times 0.8^8 = 1.677 \text{ mgr}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } & \left. \begin{array}{l} t=0 \rightarrow A(0)=10 \\ t=1 \rightarrow A(1)=8 \end{array} \right\} \Delta = 2 \text{ میلی گرم} \\ & \text{پس } \Delta = \frac{2}{10} \times 100 = 20\% \end{aligned}$$



۴ الف) سه عدد بین اعداد $3^{\sqrt{10}}$ و $3^{2/5}$ پیدا کنید.

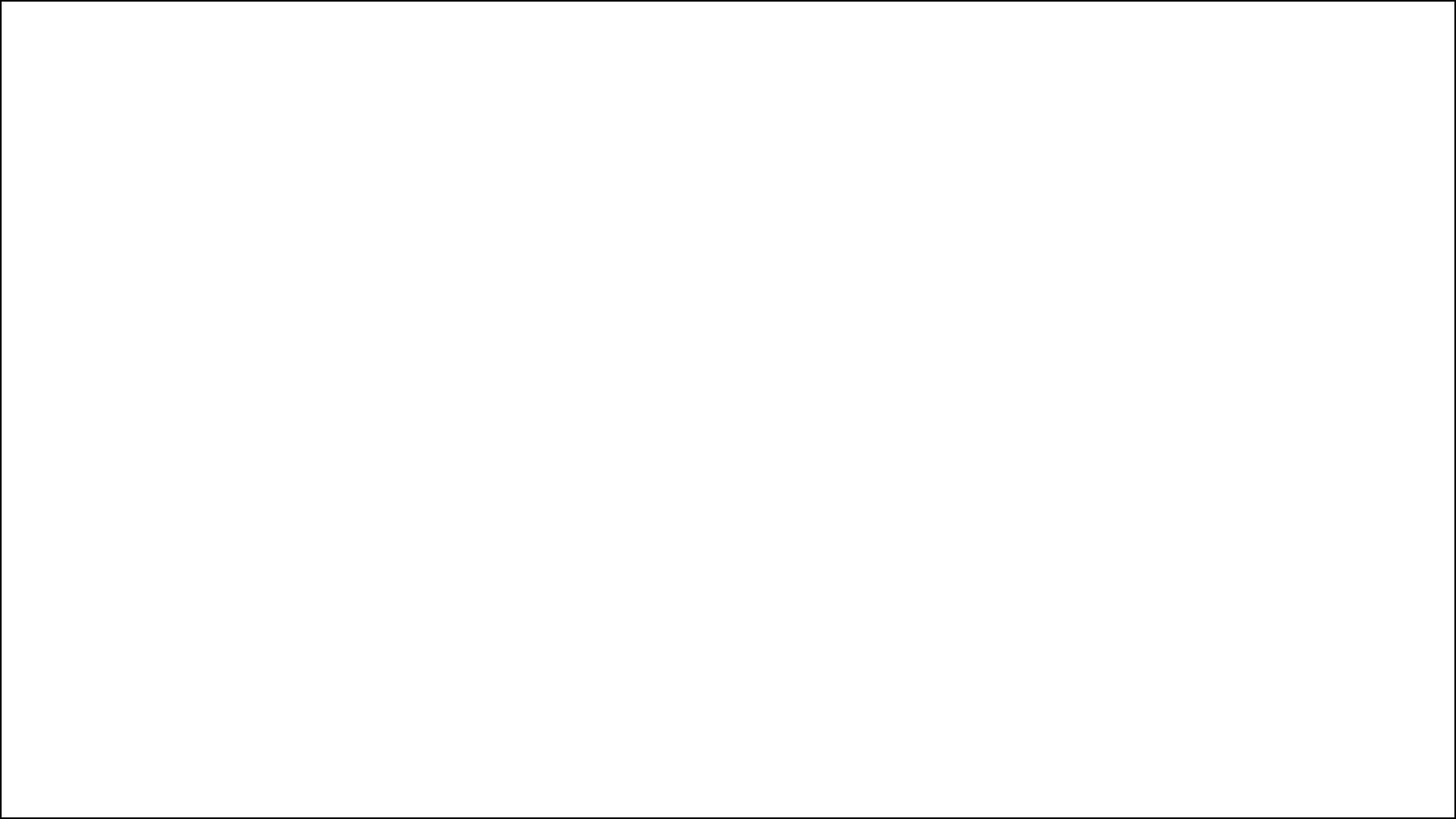
ب) نامعادله توانی $4^{2x-1} > \frac{1}{1024}$ را حل کنید.

پ) اگر x, y و z سه عدد حقیقی باشند، به طوری که $a^x > a^y > a^z$ ، آن گاه چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار است؟ ($a > 1$).

الف) $3^{2/5} < 3^{2/4} < 3^{2/3} < 3^{2/2} < 3^{\sqrt{10}}$

ب) $4^{2x-1} > \frac{1}{1024} \rightarrow 4^{2x-1} > 4^{-10} \rightarrow 2x-1 > -10 \rightarrow x > -9/2$

پ) $x > y > z$



۵ ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

۵/۱۹۴

(پ) $\frac{3}{32}$

(ب) $\frac{21}{25}$

(الف) $31 - \sqrt{2}$

۲/۳۵

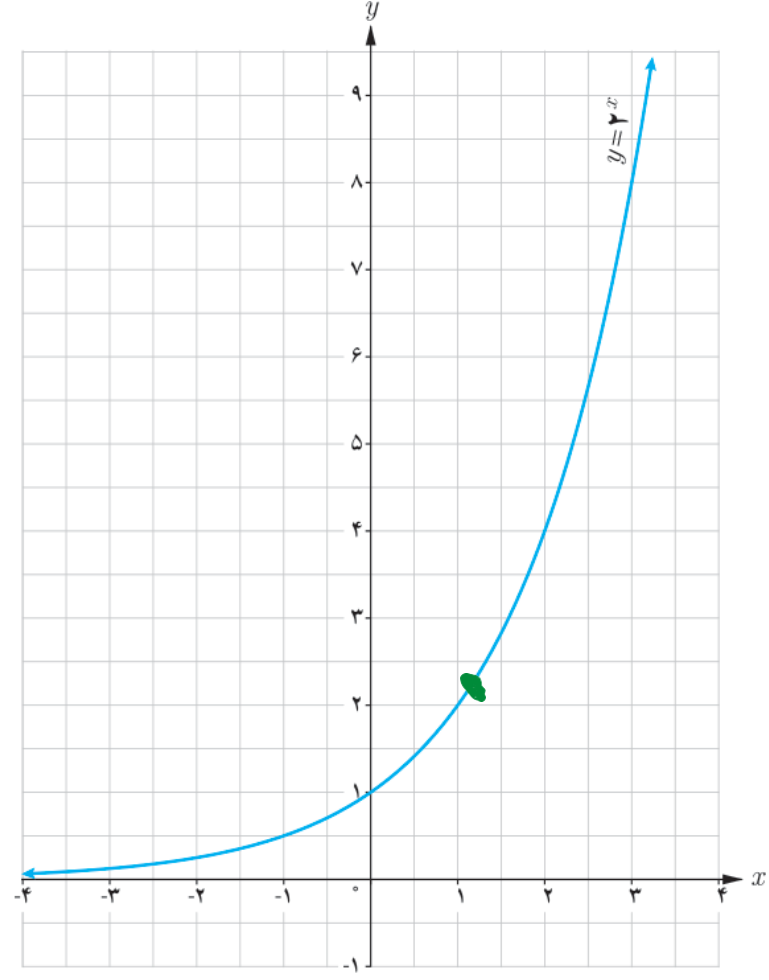
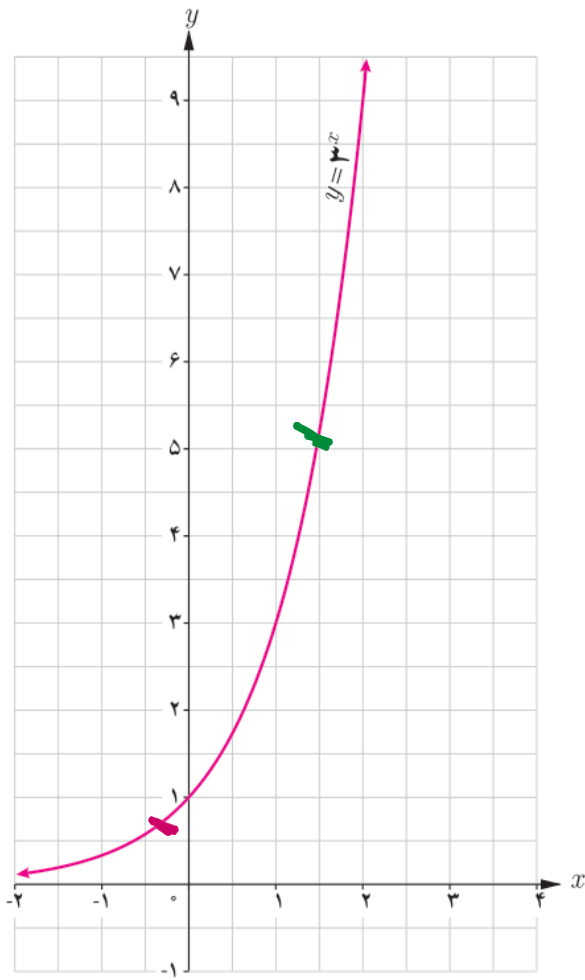
۳۱/۰۰۰

۳۱/۰۰۰ = ۳۱/۰۰۰ / الف

۳۱/۰۰۰ = ۳۱/۰۰۰

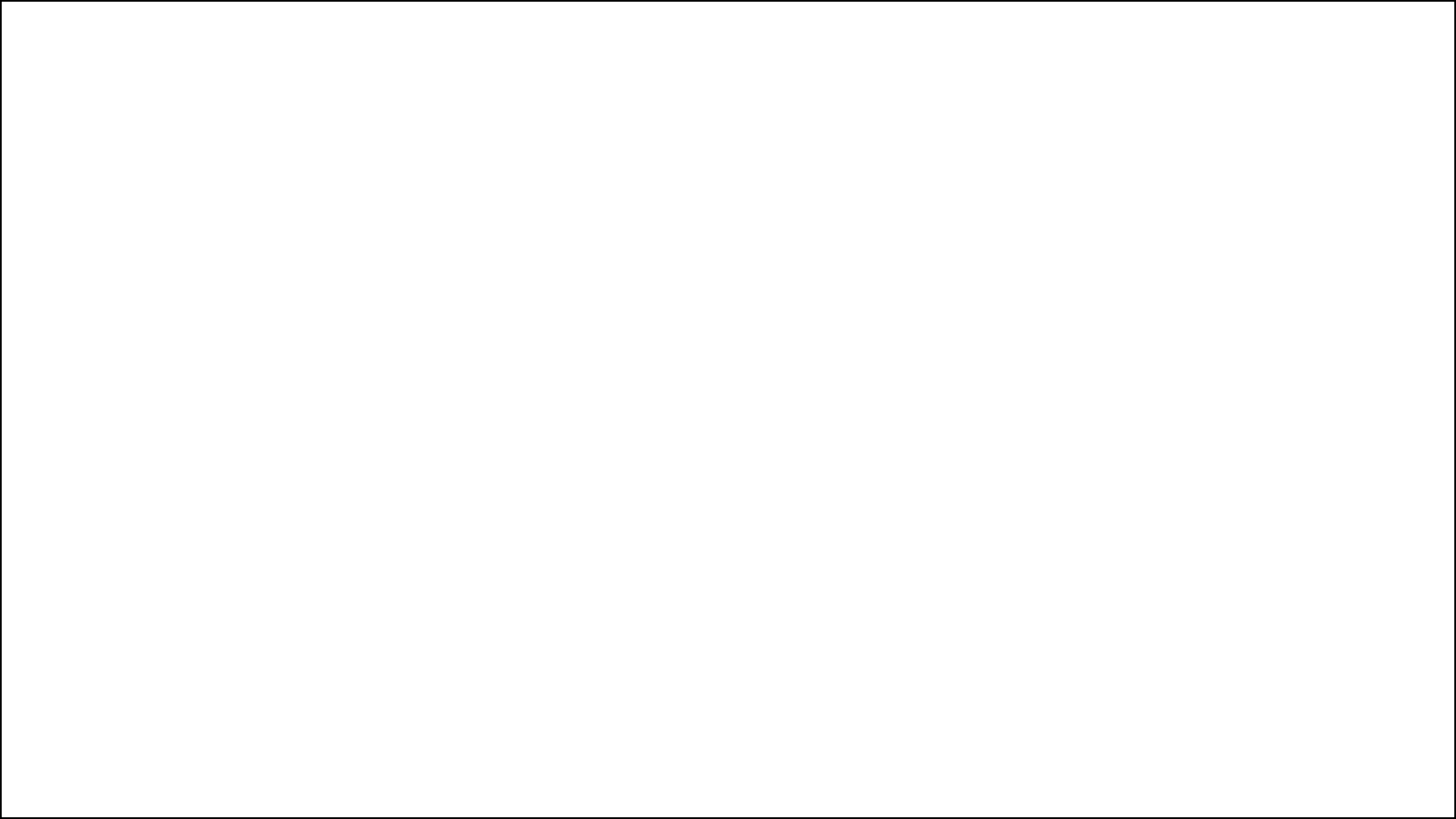
۲/۳۵ (ب)

۵/۱۹۴ (پ)



ALIGEBRA.COM

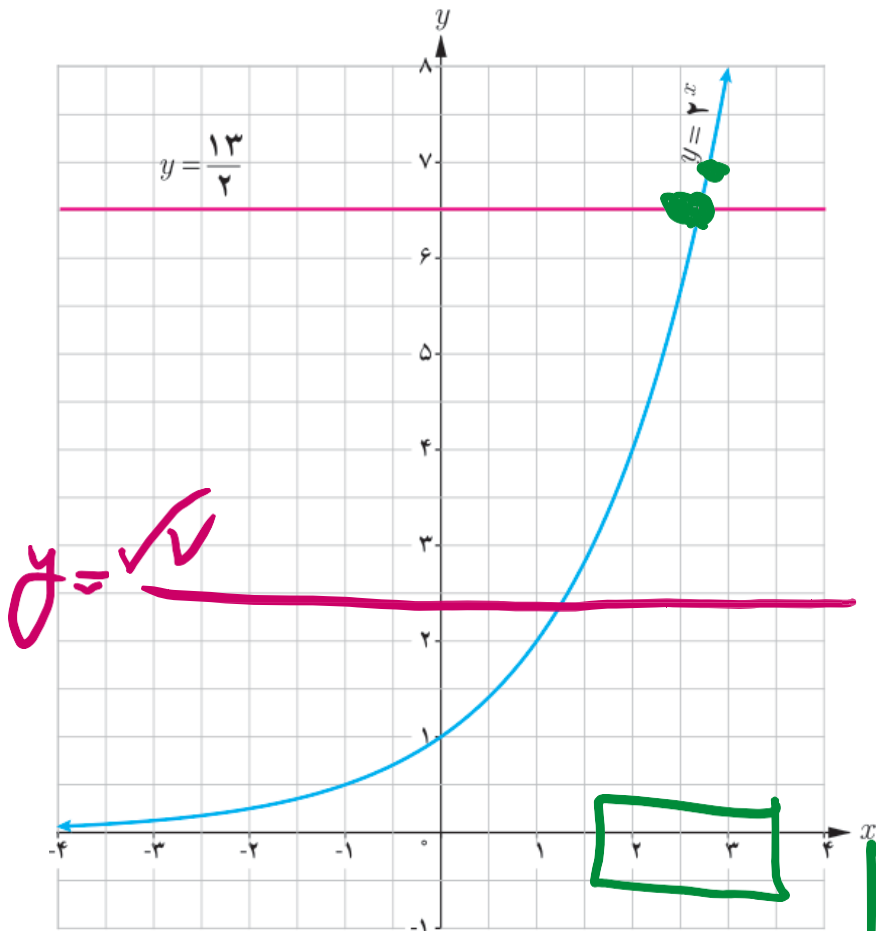
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



$$2 < x < 3$$

۶ الف) در شکل زیر خط $y = \frac{13}{2}$ نمودار $y = 2^x$ را قطع کرده است. طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟ چرا؟

ب) خط $y = \sqrt{7}$ را رسم کنید. طول نقطه برخورد این خط و نمودار $y = 2^x$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟



$$\frac{13}{2} = 6.5 \rightarrow 2^2 < 6.5 < 2^3$$

$$2^2 < 2^x < 2^3 \rightarrow$$

$$\boxed{2 < x < 3}$$

$$\sqrt{7} = 2.645 \rightarrow$$

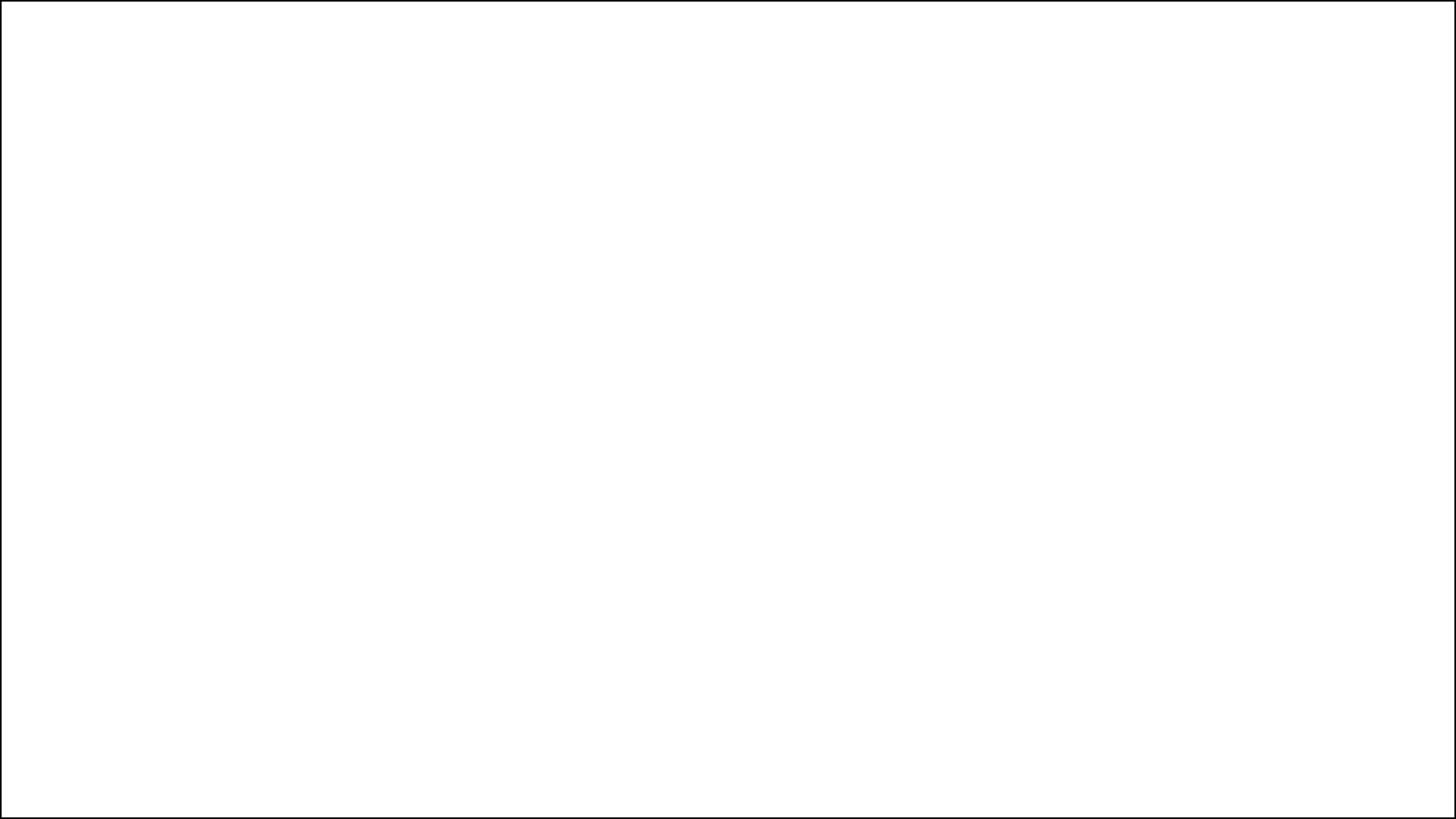
$$2^1 < \sqrt{7} < 2^2$$

$$2^1 < 2^x < 2^2 \rightarrow$$

$$\boxed{1 < x < 2}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۷ در تصفیه آب، داخل فیلترها، لایه تمیزکننده‌ای قرار دارد که حدود ۳۰ درصد از ناخالصی‌ها را حذف می‌کند و در نتیجه ۷۰ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. اگر داخل این فیلترها، دو لایه قرار دهیم، آنگاه $0.7 \times 0.7 = 0.49$ یا ۴۹ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند.

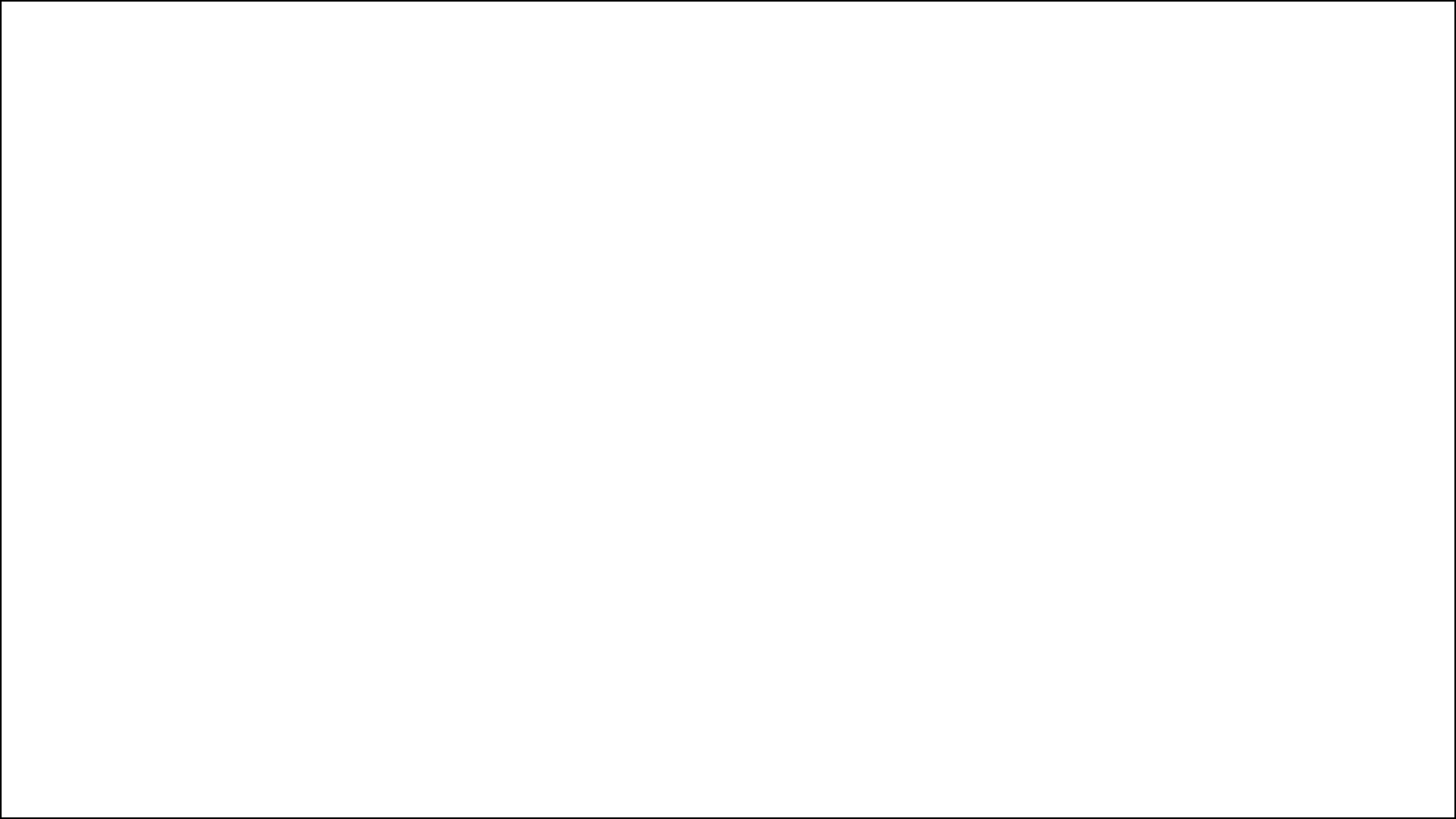
الف) درصد ناخالصی‌های موجود در آب از کدام رابطه به دست می‌آید؟

ب) با قرار دادن چند لایه در فیلتر می‌توان بیش از ۹۶ درصد از ناخالصی‌های آب را از بین برد؟

$$A(t) = 0.7^t$$

$$0.7^t \leq 0.04 \rightarrow \log_{0.7} 0.04 \geq \log_{0.7} 0.7^t \rightarrow \log_{0.7} 0.04 \geq t \rightarrow t \geq 9.02$$

$t = 10$



۱ با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید :

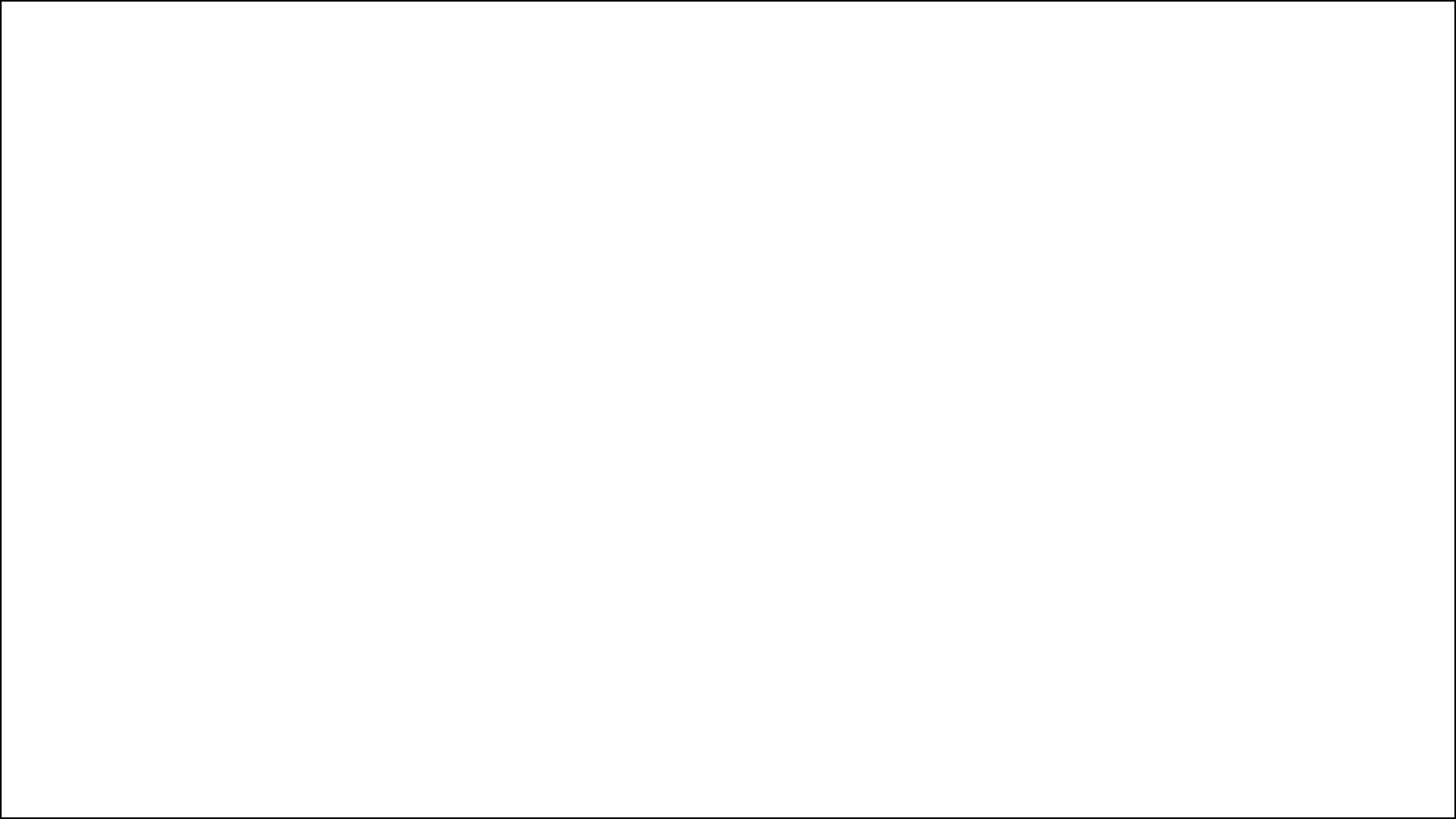
$$\log_{10} 0.01, \quad \log_6 \frac{1}{6}, \quad \log_2 \sqrt{2}, \quad \log_7 \sqrt[3]{7^2}$$

$$\log_{10} 10^{-2} = -2 \log_{10} 10 = -2$$

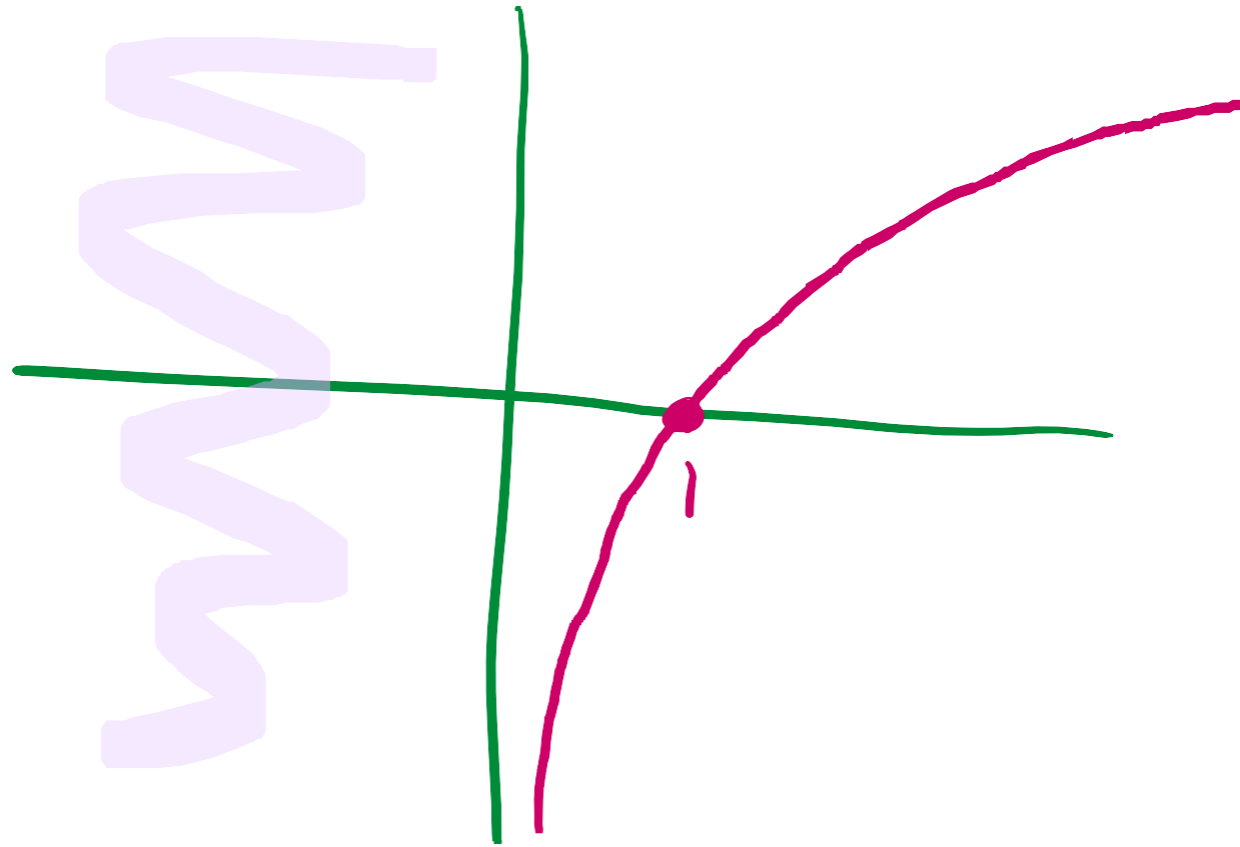
$$\log_4 4^{-1} = -\log_4 4 = -1$$

$$\log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}$$

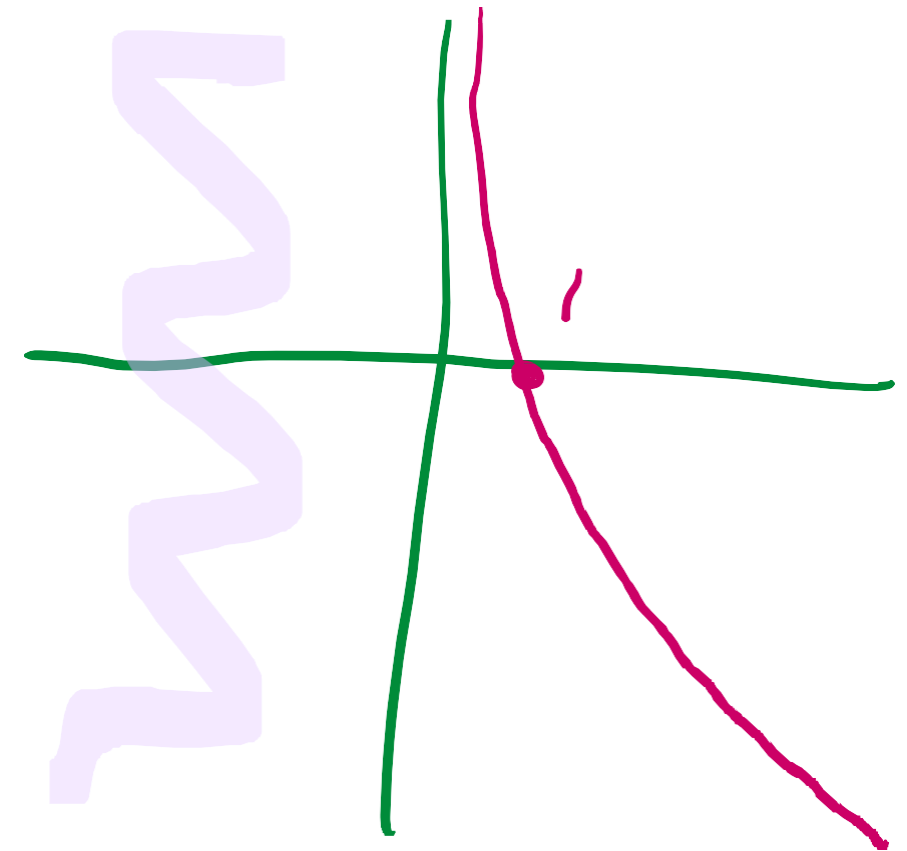
$$\log_7 \sqrt[3]{7^2} = \frac{2}{3} \log_7 7^2 = \frac{4}{3}$$



۲ نمودار تابع $y = \log_a x$ را برای دو حالت $a > 1$ و $0 < a < 1$ با هم مقایسه کنید.



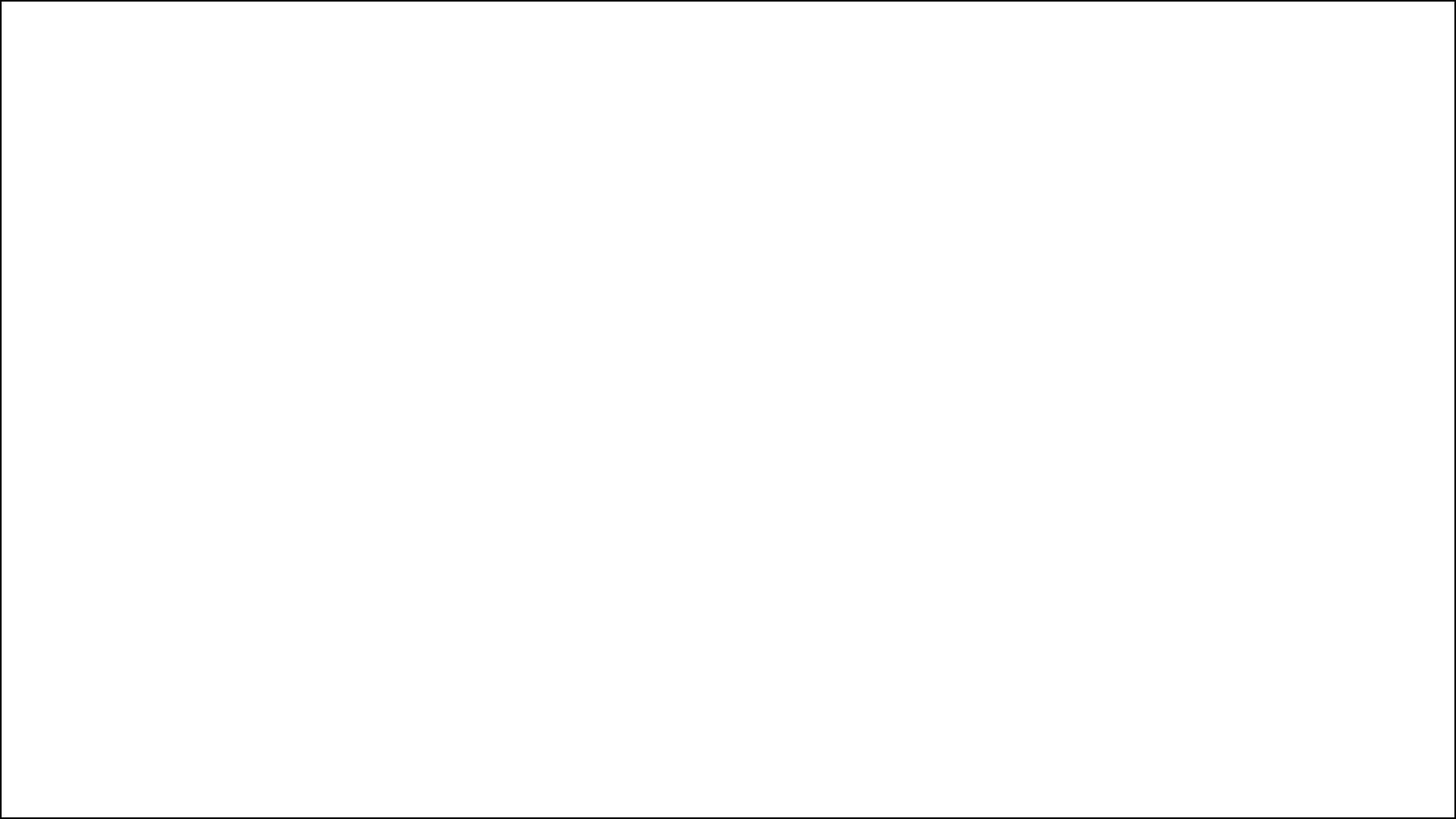
$a > 1$



$0 < a < 1$

ALIGEBRA.COM

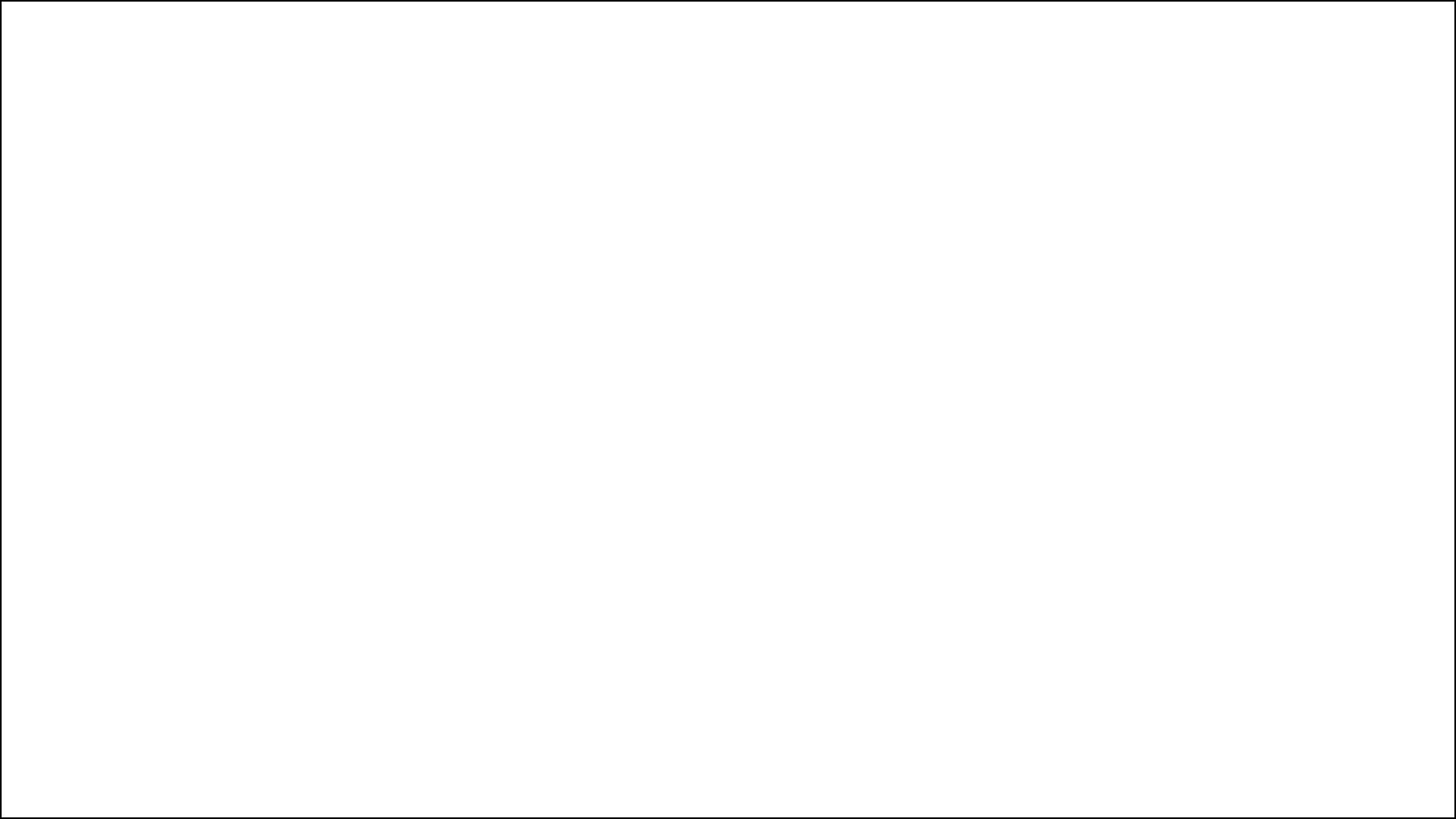
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



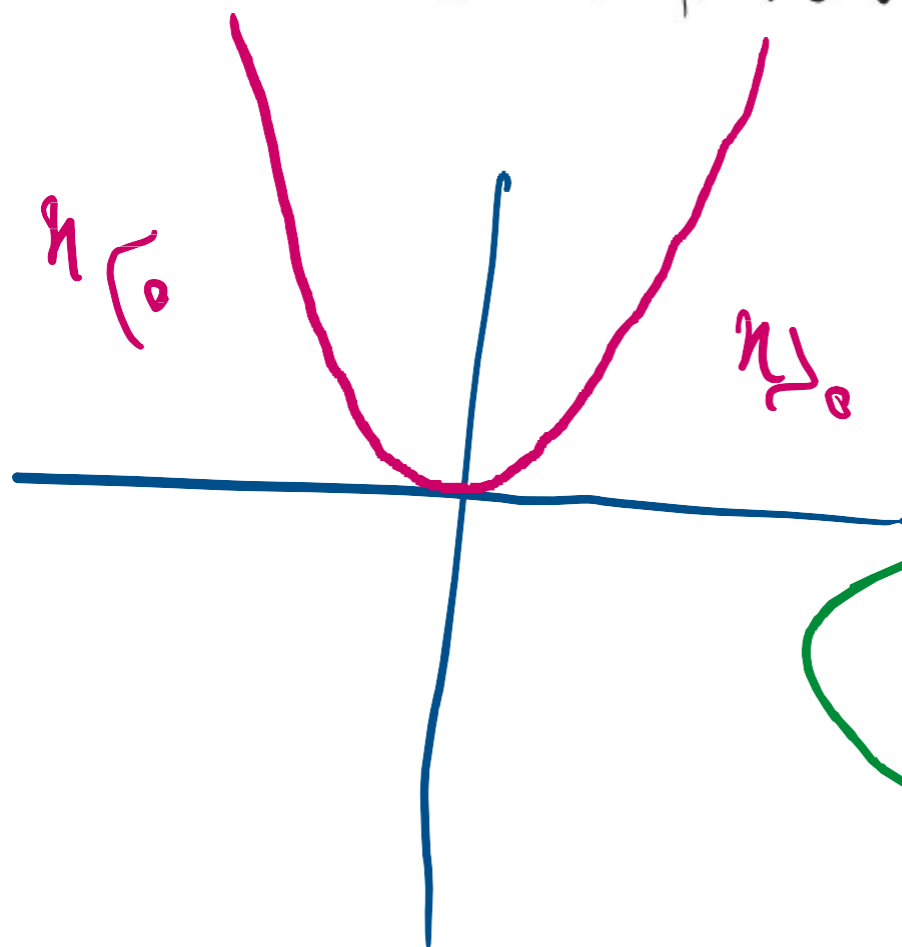
۳ الف) خط $y=27$ نمودار تابع $y=3^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟
 ب) خط $y=10$ نمودار تابع $y=(0.1)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

$$3^x = 27 = 3^3 \rightarrow 3^x = 3^3 \rightarrow x = 3$$

$$0.1^x = 10 \rightarrow 10^{-x} = 10^1 \rightarrow -x = 1 \rightarrow x = -1$$



۴ نمودار دو تابع $f(x)=x^2$ و $g(x)=2^x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.



$$y = x^2$$

$$x = 2$$

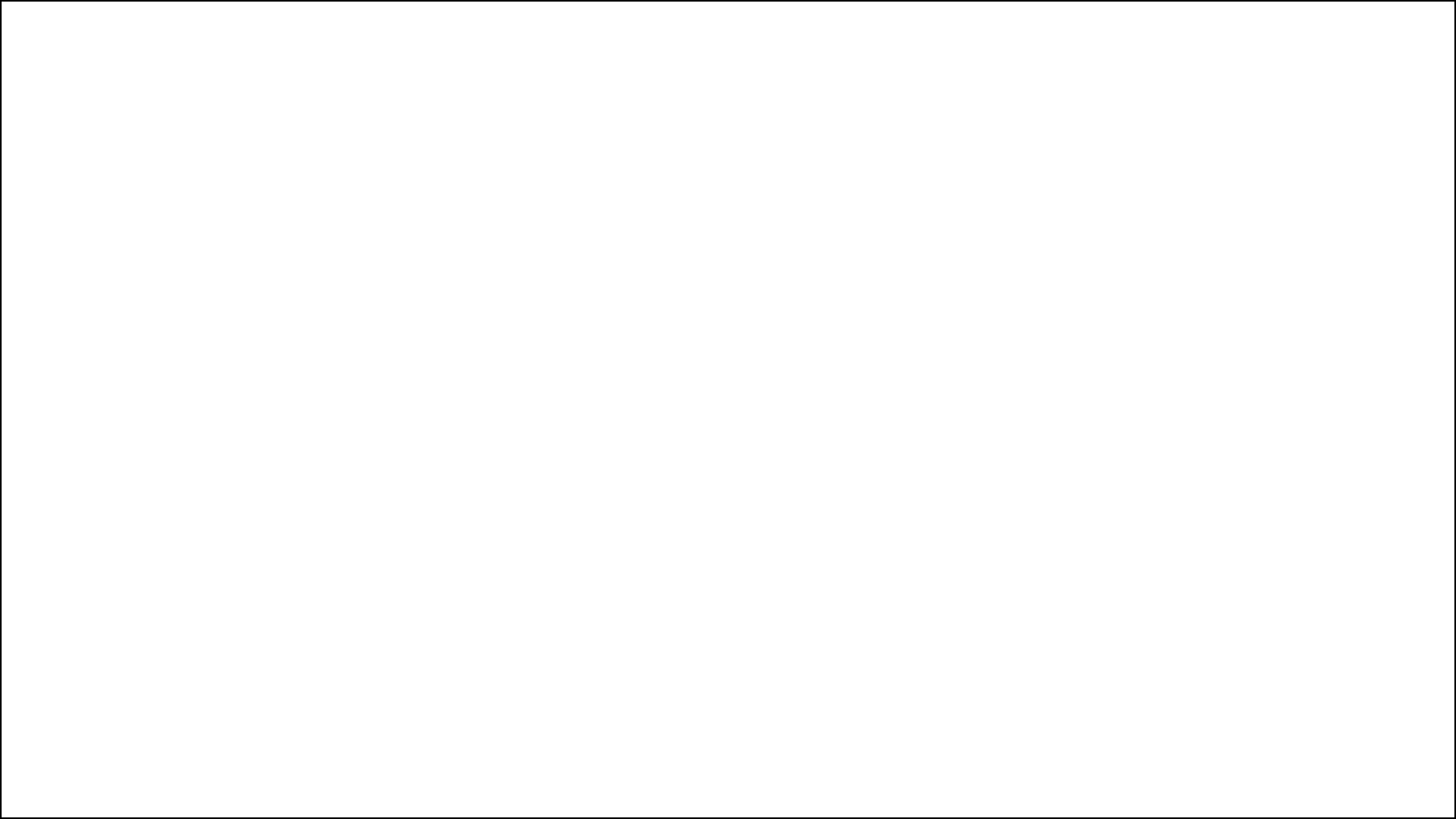
$$y = 2$$



$$y = 2^x$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



$$\log_{0.5} 0.5 = 1$$

۵ عبارت درست را با ✓ و عبارت غلط را با × علامت بزنید.

– لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است. ✗

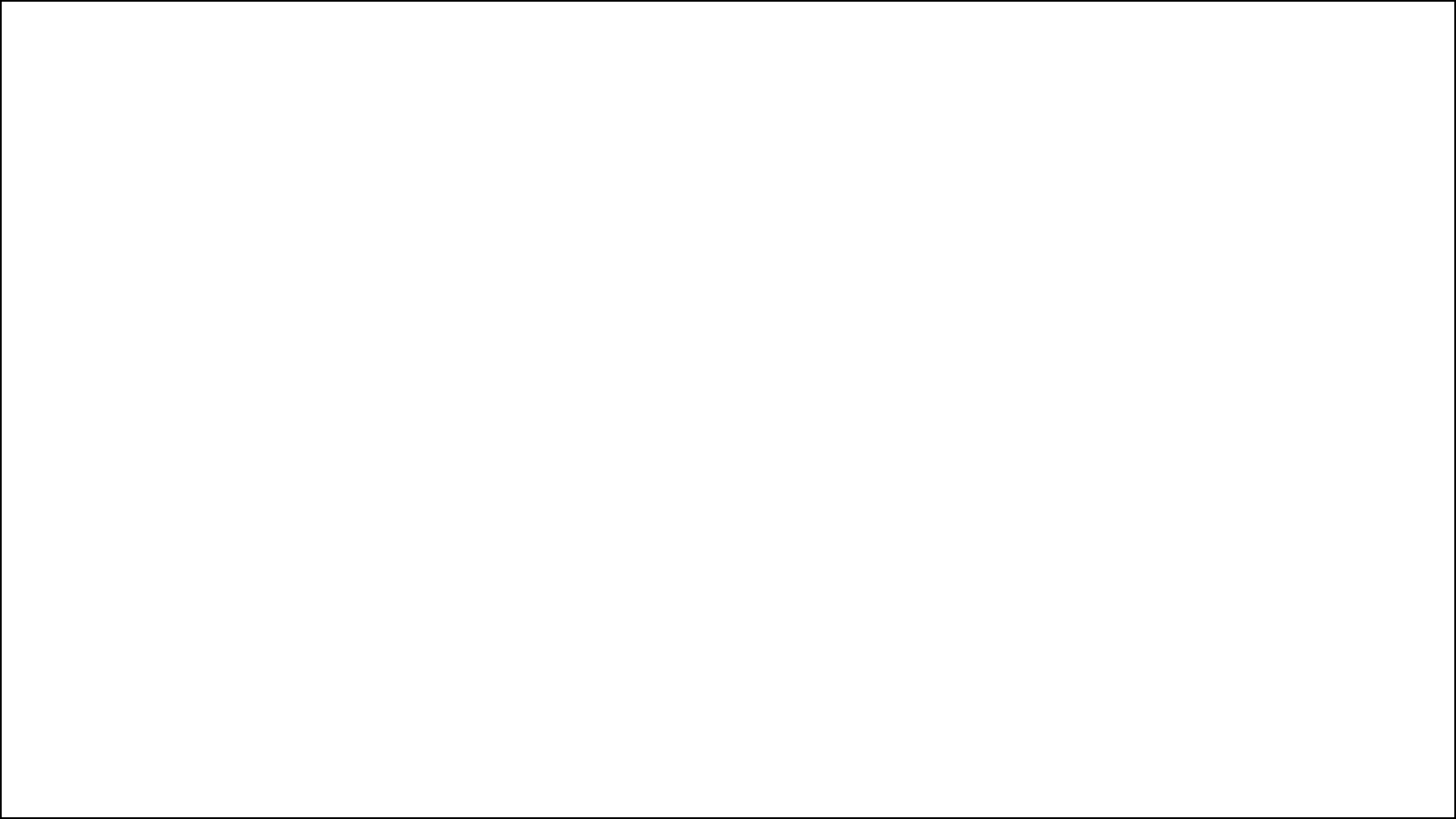
– لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی شود. ✓

– تابع لگاریتم، تابعی یک به یک است. ✓

– تابع لگاریتم محور y ها را قطع می کند. ✗

– اگر نقطه (b, d) روی نمودار $y = a^x$ قرار داشته باشد، آنگاه (d, b) روی نمودار $y = \log_a x$ قرار دارد. ✓

– اگر $a > b > 0$ آنگاه $\log_a a < \log_a b$. ✗



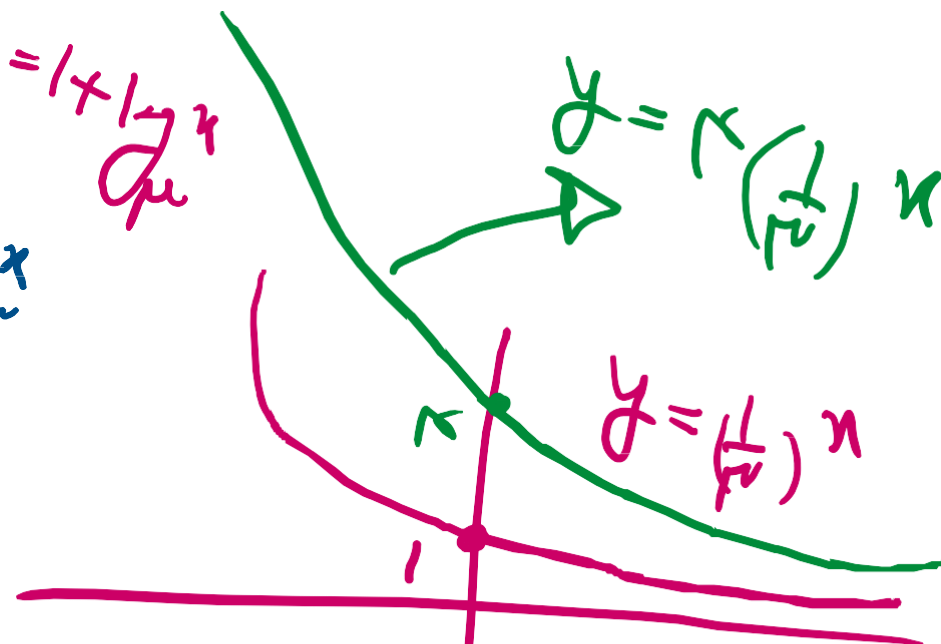
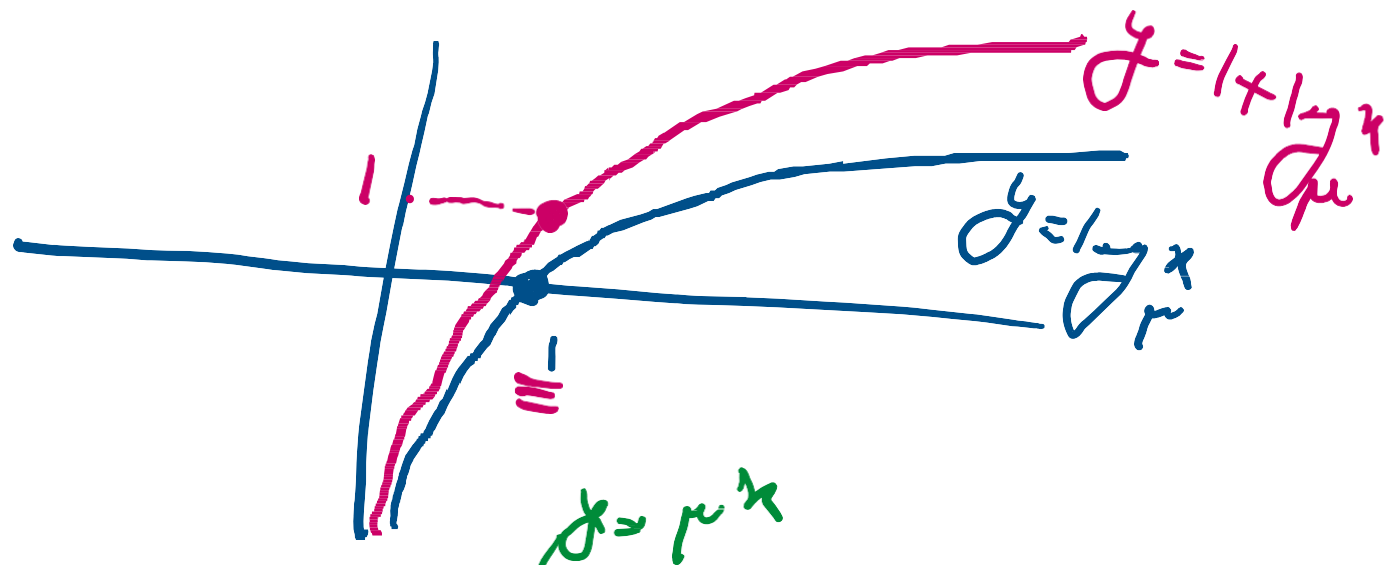
۶ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = 1 + \log_3 x$

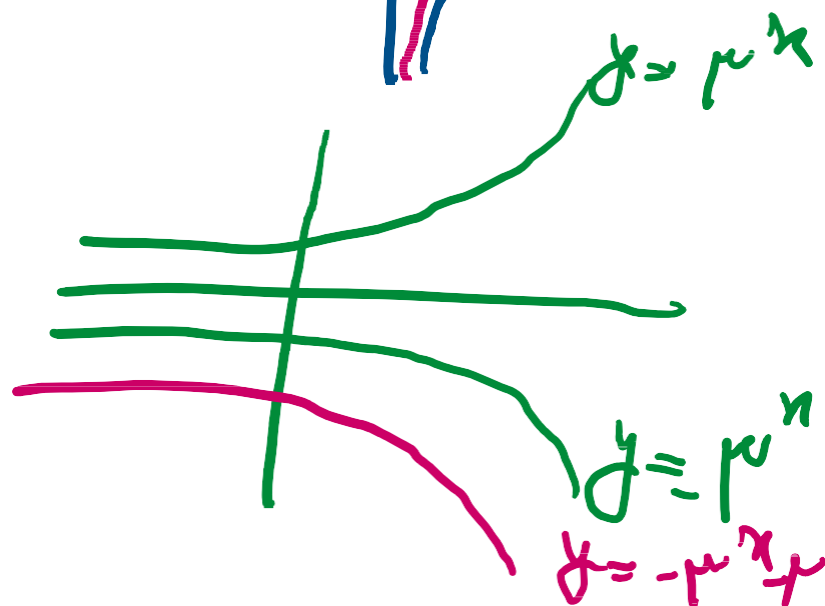
ب) $y = -3^x - 2$

پ) $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

الف)

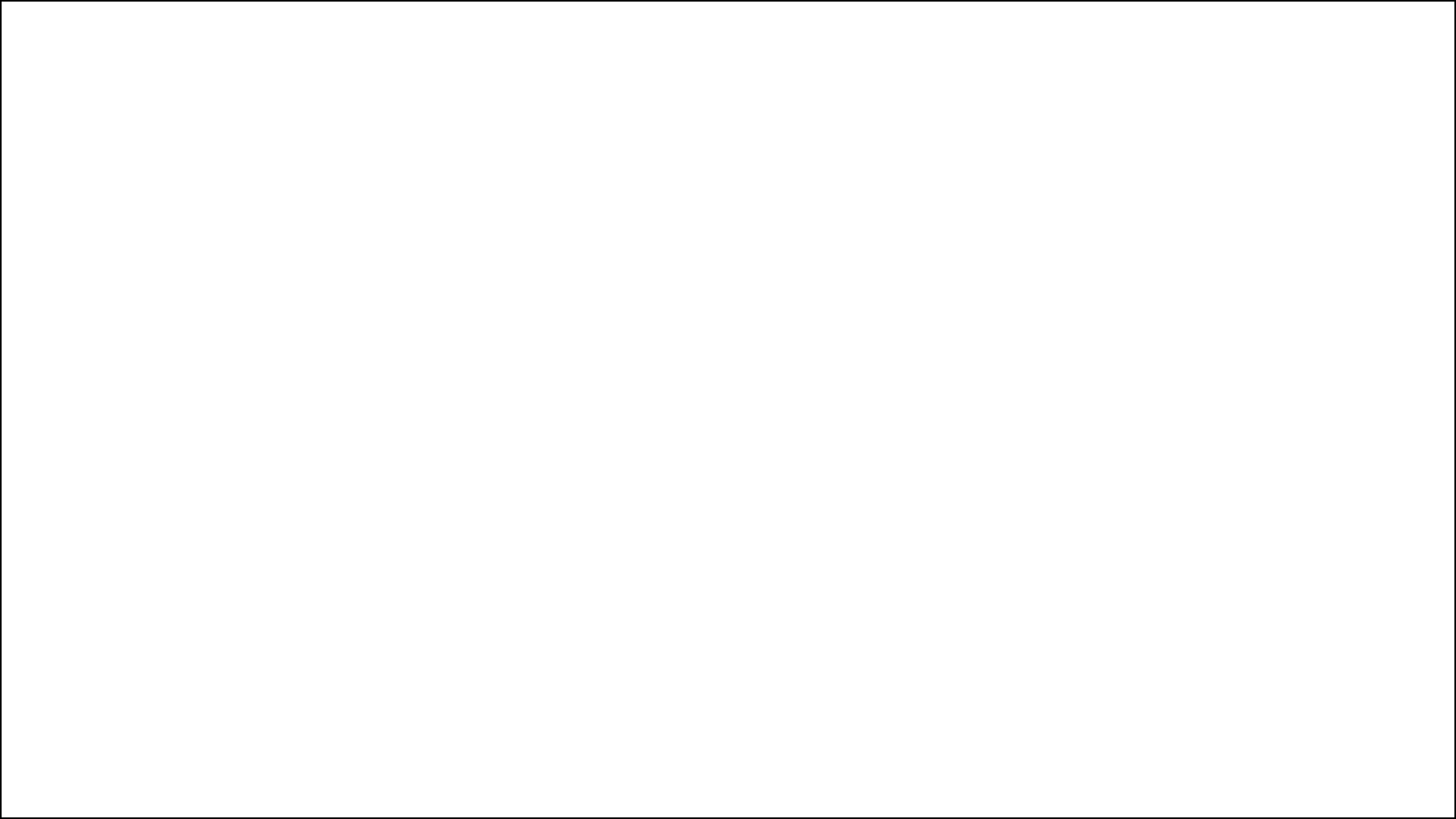


ب)



ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۱) معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_4 m^2 - \log_4 m - 3 = 0$

$$2 \log_4 m - \log_4 m - 3 = 0 \Rightarrow \log_4 m = 3$$

$$\Rightarrow m = 4^3 = 64$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

ب) $\log_7(12b - 21) - \log_7(b^2 - 3) = 2$

$$\log_7 \frac{12b - 21}{b^2 - 3} = 2 \Rightarrow \frac{12b - 21}{b^2 - 3} = 7^2 = 49$$

$$49b^2 - 147 = 12b - 21 \Rightarrow 49b^2 - 12b + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = 0$$

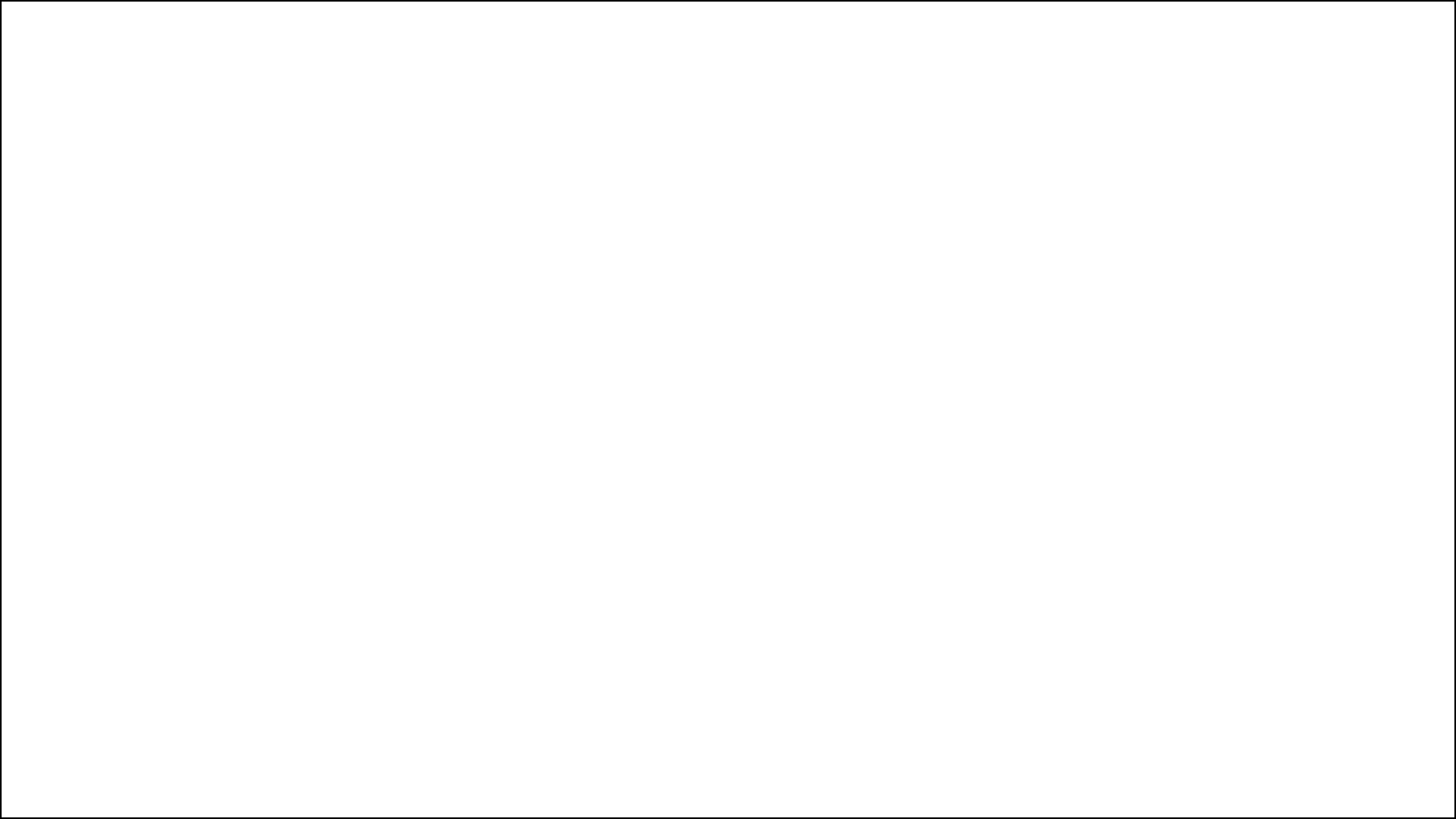
$$(12b - 21)^2 = 0 \Rightarrow b = \frac{7}{2}$$

پ) $\log_{\frac{1}{10}}(x^2 - 1) = -1$

$$x^2 - 1 = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = 10 \rightarrow x^2 - 1 = 10$$

$$\rightarrow x^2 = 11 \rightarrow x = \pm \sqrt{11}$$





۲ الف) در فعالیت ۱ از درس اول این فصل، دیدیم که جرم باکتری‌ها در زمان t از فرمول $m(t) = 2^t$ به دست می‌آید. معکوس این تابع را بنویسید و آن را تفسیر کنید.

ب) با استفاده از وارون تابع $m(t)$ ، برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود ۵۰۰۰ گرم می‌شود؟

$$\log 2 \approx 0.301$$

$$y = 2^t \rightarrow \log y = \log 2^t \rightarrow t = \log_2 y \rightarrow m^{-1}(t) = \log_2 t$$

$\log 2 = \log \frac{10}{10} = \log 10 - \log 10 = 1 - 0.301$

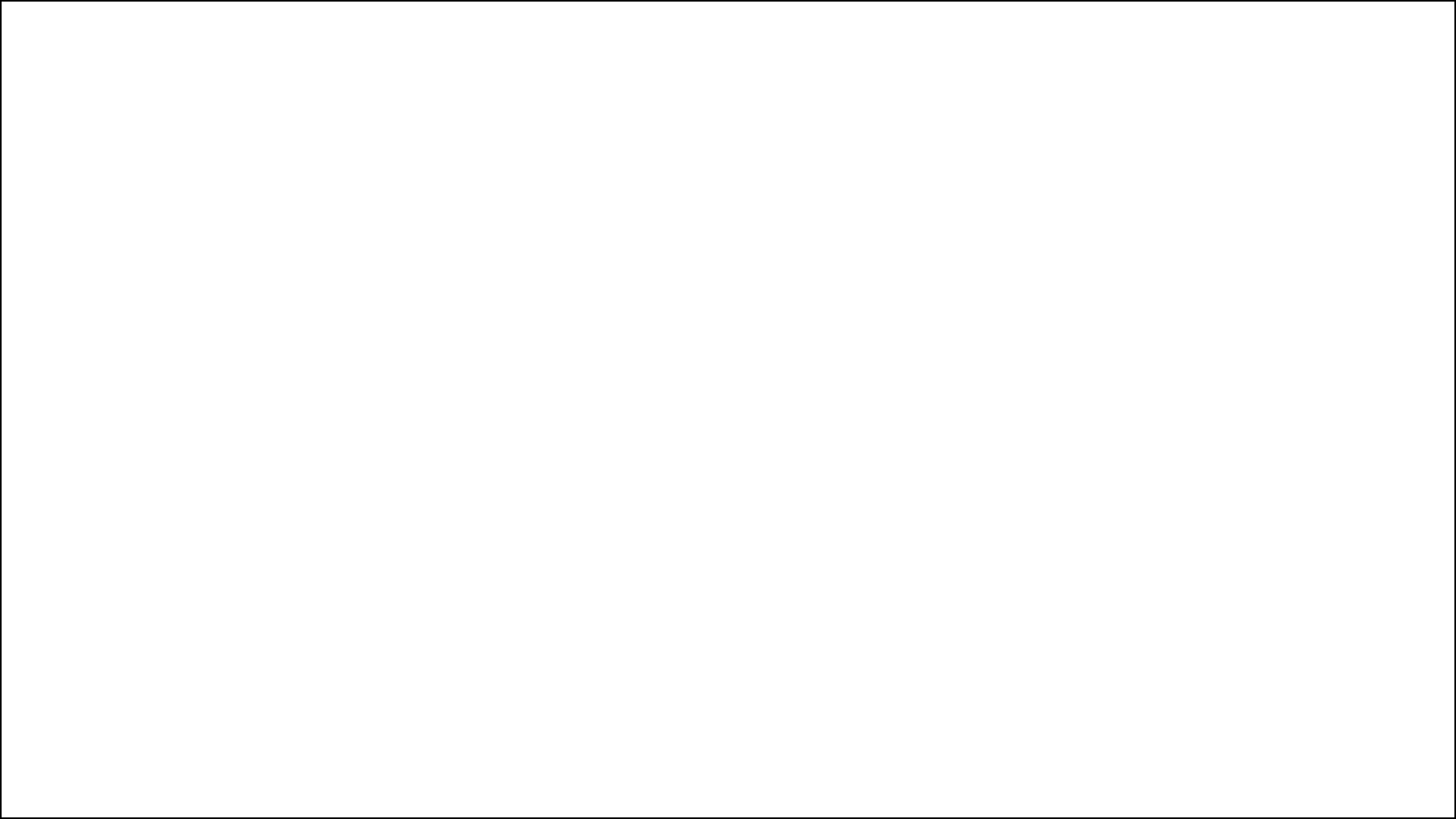
$$m^{-1}(5000) = \log_2 5000 = \log_2 5 \times 1000 = \log_2 5 + 3 \log_2 10$$

$$= \frac{\log 5}{\log 2} + 3 \frac{\log 10}{\log 2} = \frac{1 - 0.301}{0.301} + 3 \times \frac{1}{0.301}$$

$$= 12.21$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۳ درست یا نادرستی عبارتهای زیر را بررسی کنید:

✓✓ (ب) $(d \neq 1, a, b, c, d > 0) \log_d abc = \log_d a + \log_d b + \log_d c$

(الف) $(b \neq 1, a, b > 0) a^{\log_b a} = a$

(ت) لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است.

(پ) $\log x \log y = \log x + \log y$

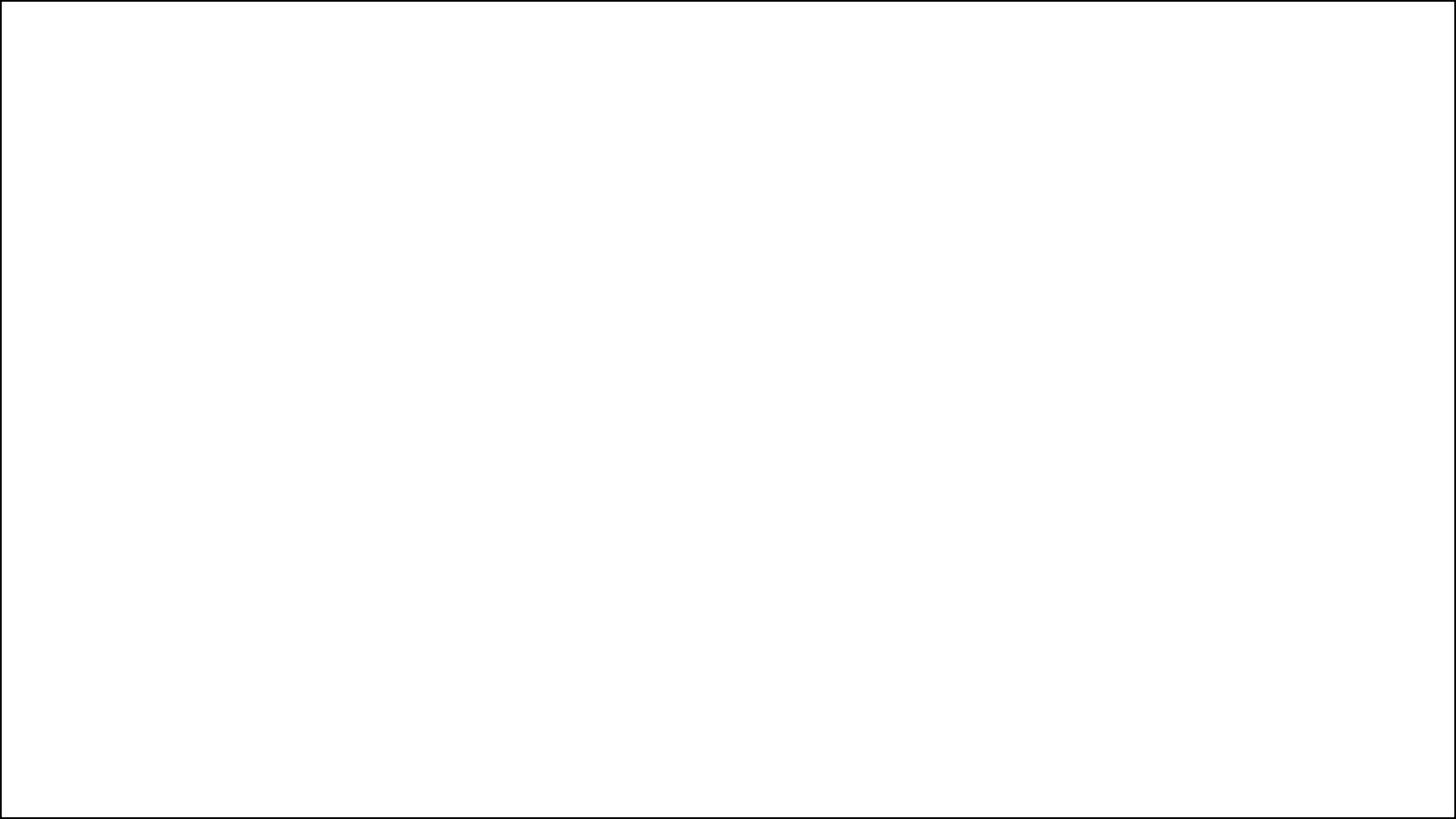
$\log_b a = 1 \rightarrow a = b$

X

X X

$\log x + \log y = \log xy$

$\log_r r = \log_r r^{-1} = -1 \log_r r = -1$ X



۴ نیمه عمر عنصری چهار روز و جرم اولیه یک نمونه از آن یک گرم است.

الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می ماند، بیابید.

ب) طی چند روز، این جرم به ۱٪ گرم کاهش می یابد؟

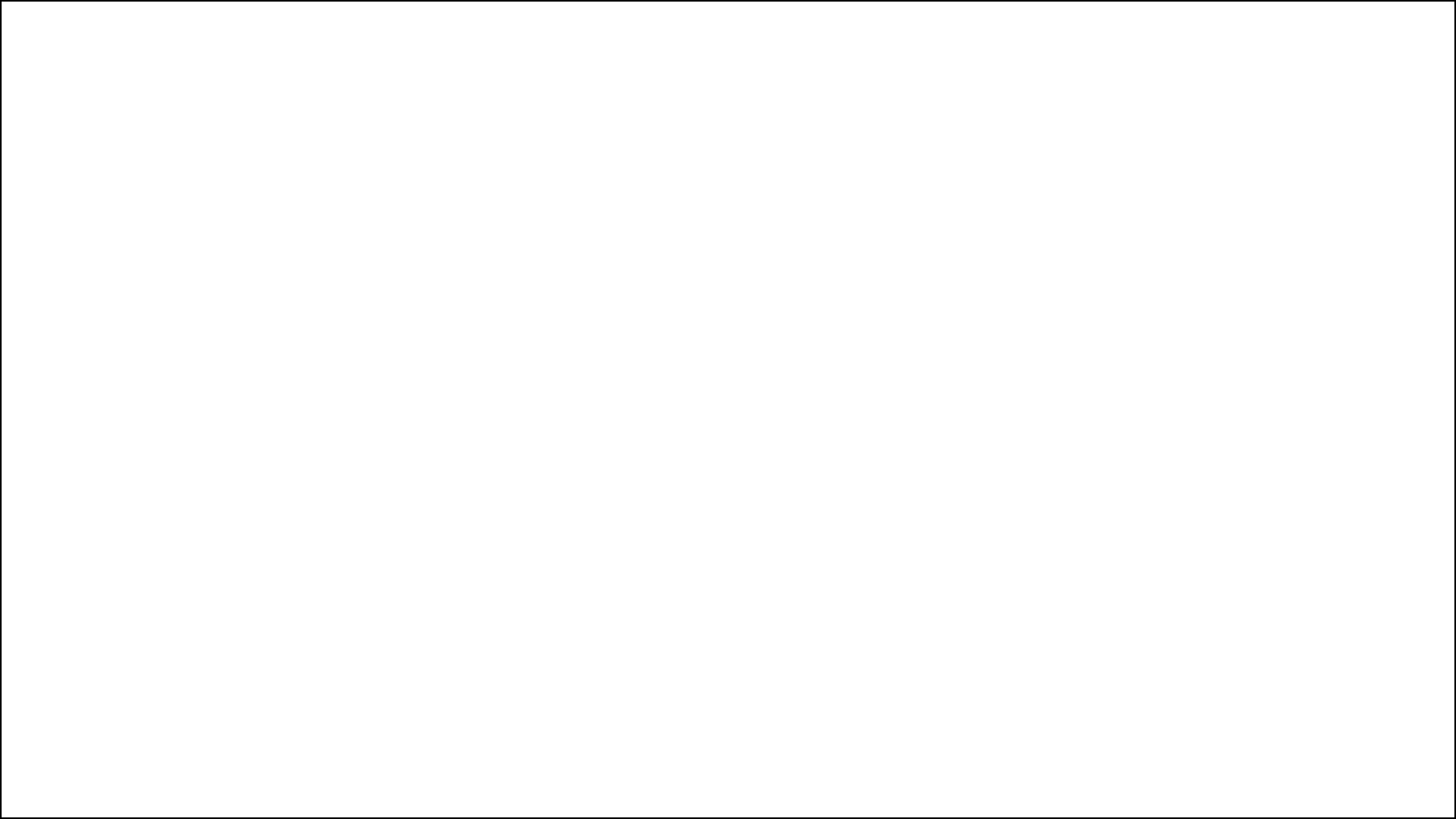
$$m(t) = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}} = \frac{1}{2^{\frac{t}{4}}}$$

$$\frac{1}{2^{\frac{t}{4}}} = \frac{1}{100} \rightarrow 2^{\frac{t}{4}} = 100 \rightarrow \log 2^{\frac{t}{4}} = \log 100$$

$$\frac{t}{4} \log 2 = 2 \rightarrow t = \frac{1}{\log 2} = \frac{1}{0.301} = 3.32$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



$$\log \omega = \log 10 - \log 2 = 1 - 0.301$$

۵ عبارات زیر را ساده کنید. $(\log 3 \approx 0.4771, \log 2 \approx 0.301)$

پ) $\log_2 \frac{\sqrt{8}}{\sqrt[4]{2}}$

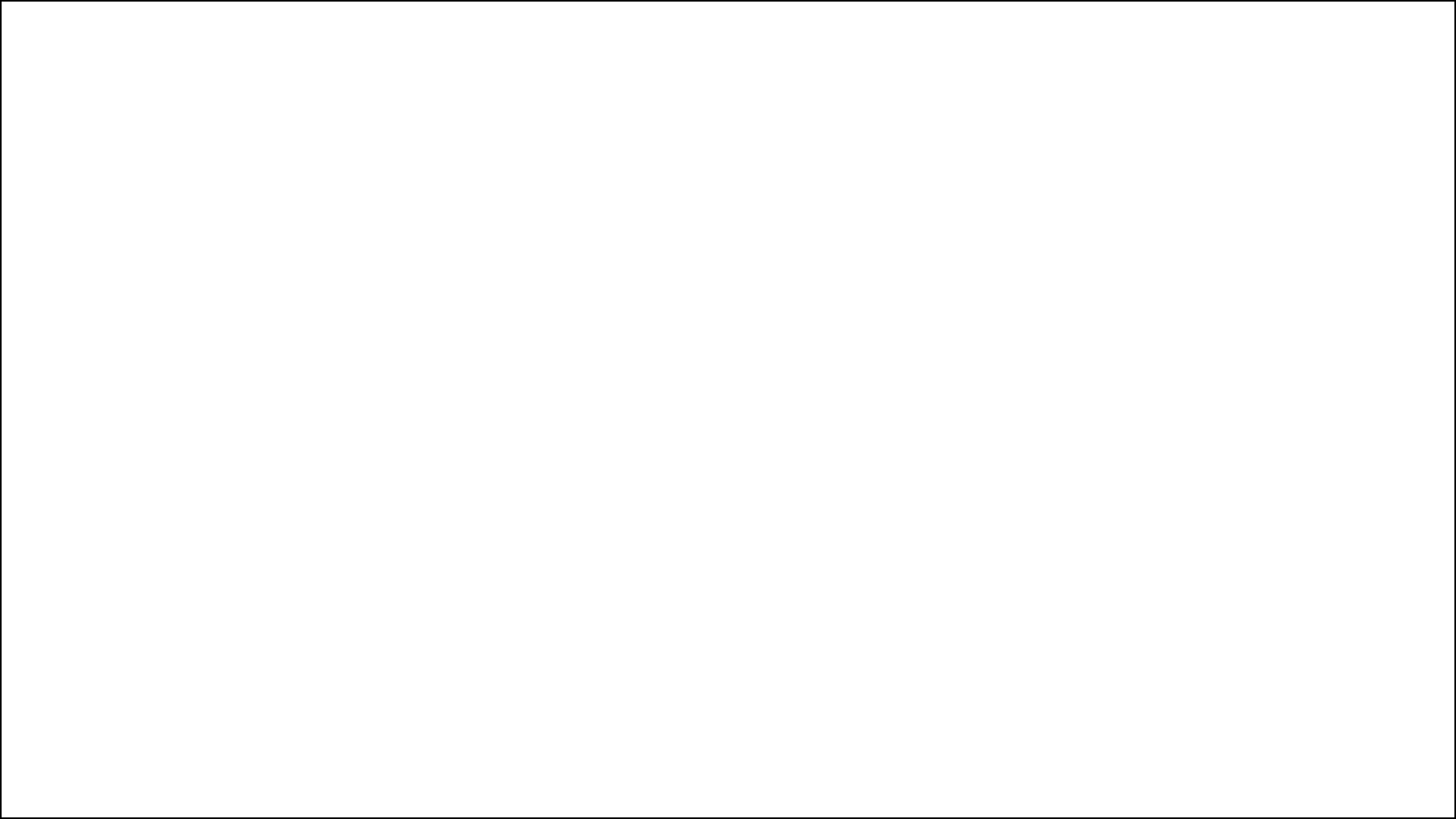
ب) $\log \sqrt{0.75}$

الف) $\log (18 \times 375)$

$$\log (2^2 \times 2 \times \omega \times 2) = 2 \log 2 + \log \omega + \log 2 = 1.193$$

$$\log \omega^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\log 2 - 2 \log 2) = -0.1505$$

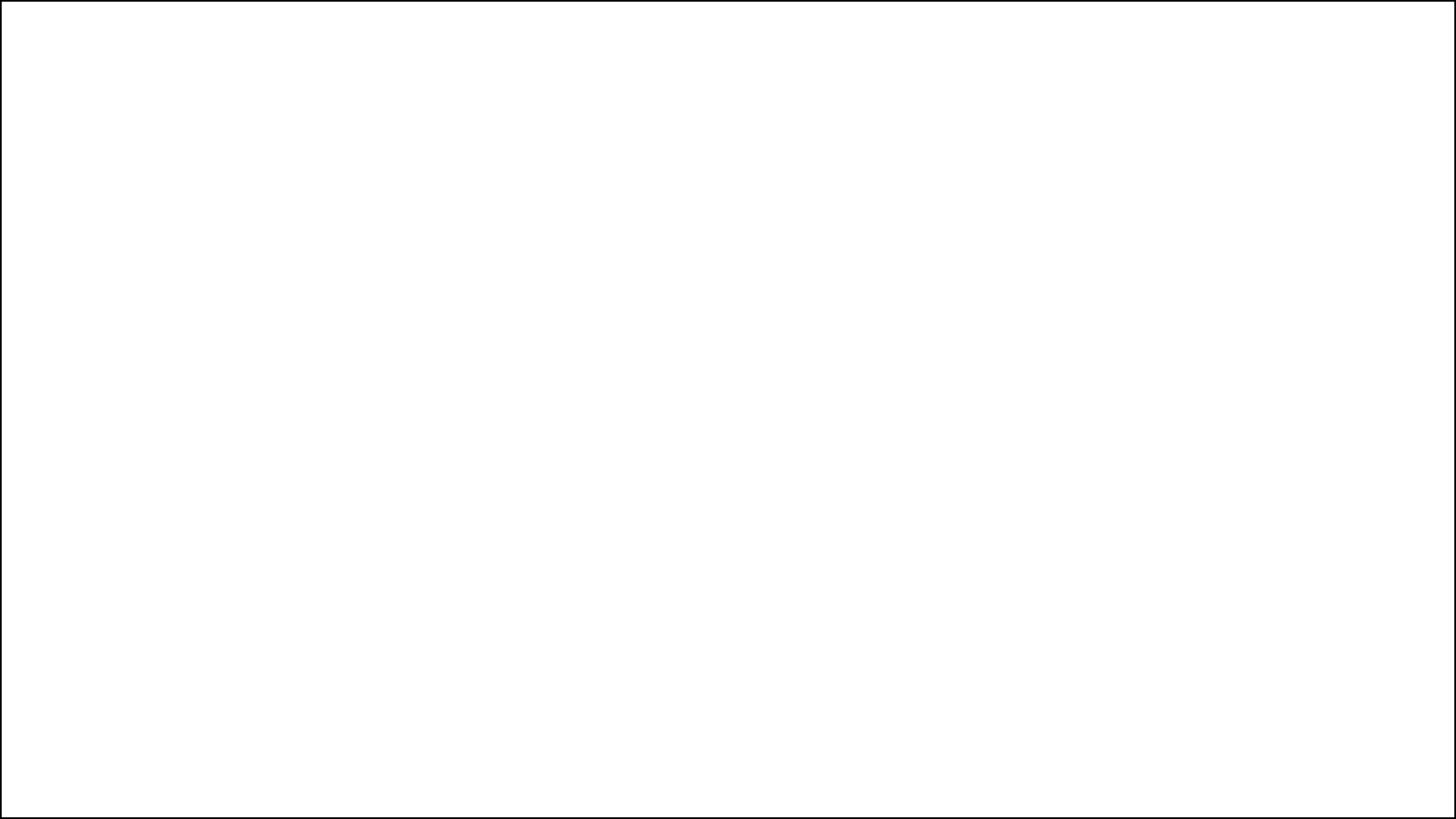
$$\log_2 \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}} = \log_2 2^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$



۶ اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(-\frac{1}{2}, -4)$ عبور کند، مقدار a چند است؟

$$-4 = \log_a \frac{1}{2} \rightarrow a^{-4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{a^4}$$

$$a^{-4} = \frac{1}{2} \rightarrow a = \sqrt[4]{2}$$



گزینه‌های درست را با ✓ و گزینه‌های نادرست را با × علامت بزنید.

$$\log 5 = \log 3 + \log 2 \quad \blacksquare$$

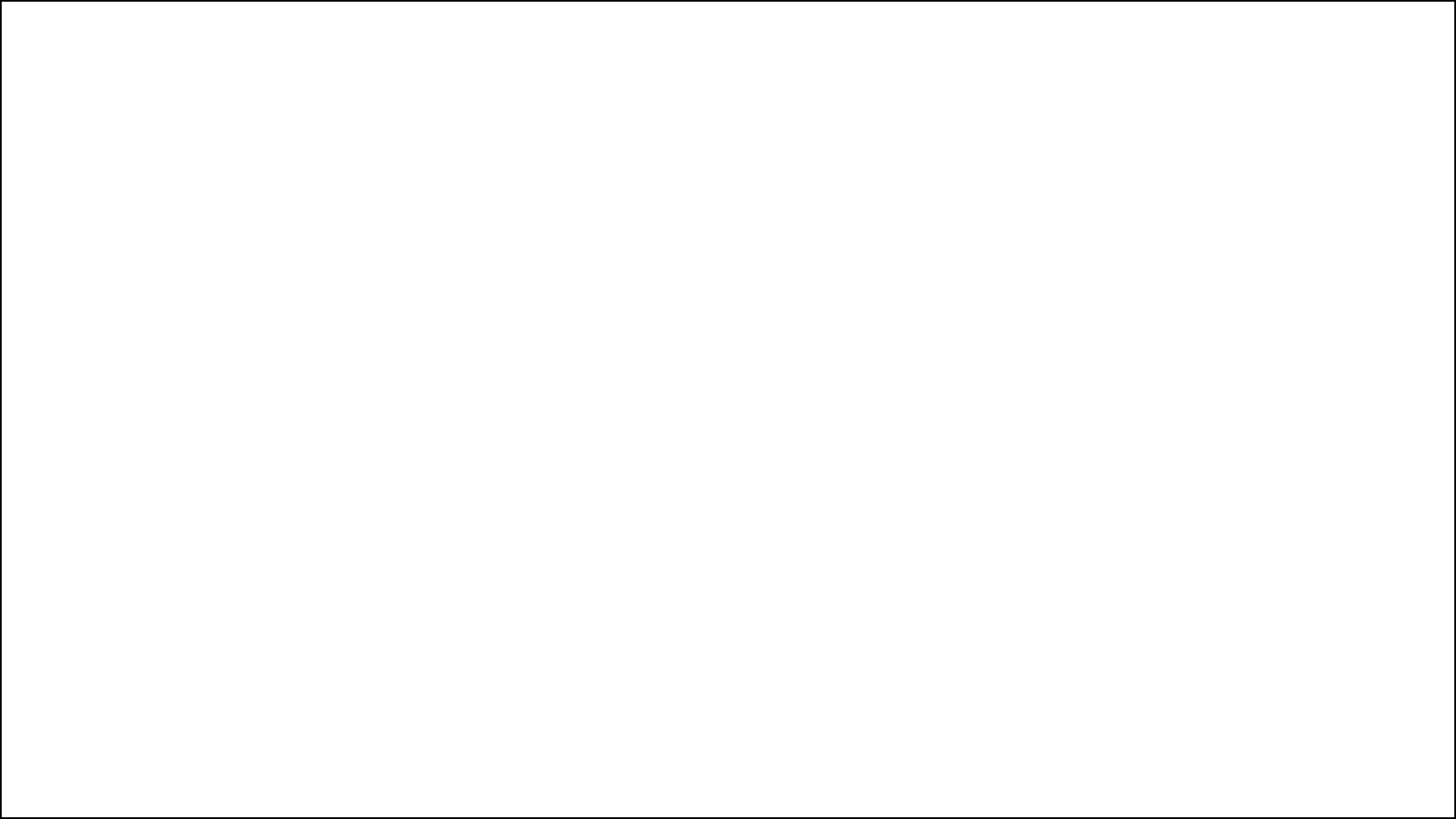
$$\log_b a \times \log_a b = 1 \quad \blacksquare$$

$$\log_b a \times \frac{1}{\log_b a} = 1 \quad \checkmark \checkmark$$

$$\log 4 + \log 2 = \log (4 \times 2) = \log 8 \neq \log 6 \quad \times \times$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۸ نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می ماند چقدر است؟

$$m(t) = 128 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

$$m(300) = 128 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{300}{30}} = 128 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \frac{128}{1024} = 0.125 \text{ mgr}$$

