

آموزش حسابان یازدهم

ویژگی های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

(فصل سوم – درس سوم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$\log_b a = c \rightarrow a = b^c$$

$$\log_y x = y \rightarrow x = y^y = 1$$

$$\log_{\omega} (x^y - y^y) = 0 \rightarrow x^y - y^y = \omega^0 = 1 \rightarrow x^y = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$$\log a + \log b = \log a \cdot b$$

$$\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$$

$$\log a^m = \frac{m}{n} \log a$$

$$\log \frac{a}{b} = \frac{1}{\log \frac{b}{a}}$$

$$\log 1 = 0 \quad \log 10 = 1$$

$$\log_a a = \log_{10} a$$

$$y = \log_g t \rightarrow t > 0 / g > 0, g \neq 1$$

$$\log_r x - r \log_x r + r^r = 0 \rightarrow \log_r x - \frac{r^r}{\log_r x} + \underline{r^r} = 0$$

$$x \log_r x \rightarrow (\log_r x)^r + r^r \log_r x - r^r = 0 \quad A = \log_r x \rightarrow A^r + r^r A - r^r = 0$$

$$\begin{aligned} A=1 &\rightarrow \log_r x = 1 \rightarrow x=r \\ A=-r &\rightarrow \log_r x = -r \rightarrow x=r^{-r} = \frac{1}{14} \end{aligned}$$

۱ اگر $\log 5 = 3k$ باشد، $\log \sqrt[3]{16}$ کدام است؟

$$\log \left(\frac{16}{10} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} (\log \underline{16} - \log 10) = \frac{1}{3} (\underline{\log 2} - 1)$$

$$= \frac{1}{3} (4 - 3k - 1) = \frac{1}{3} (3 - 3k) = 1 - k$$

$$\log 2 = \log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 = \underline{\underline{1 - 3k}}$$

۲ از تساوی $\log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 5$ مقدار لگاریتم x در پایه ی ۲، کدام است؟

$$\log_x(x^2 + 4) = \log_x 5 = \log_x 5x$$

$$\rightarrow x^2 + 4 = 5x \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ X} \\ x=4 \text{ ✓} \end{cases}$$

$$\rightarrow \log_2 2 = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \log_2 2 = 2$$

۳ از معادله‌ی لگاریتمی $\log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2) = 1$ ، مقدار لگاریتم $(2x - 1)$ در پایه‌ی ۸، کدام است؟

$$\log_3 \left(\frac{2x^2 + 1}{x + 2} \right) = 1 \rightarrow \frac{2x^2 + 1}{x + 2} = 3^1 \rightarrow 2x^2 + 1 = 3x + 6$$

$$\rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\log_8(2x - 1) = \log_8 4 = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3}$$

از دو معادله‌ی دو مجهولی $3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y}$ و $\log(x+2y) = 1 + \log y$ مقدار x کدام است؟

$$\underline{3^{2x+y}} = 3^2 \cdot 3^{x-y} = \underline{3^{x-y+2}} \rightarrow 2x+y = x-y+2 \rightarrow x+2y=2 \quad \checkmark$$

$$\log_{10}(x+2y) = \log_{10} 10 + \log y = \log_{10} 10y \rightarrow x+2y=10y \rightarrow x=8y$$

$$x+2y=2 \xrightarrow{x=8y} 8y+2y=2 \rightarrow 10y=2 \rightarrow y=\frac{2}{10}$$

$$x=8y \rightarrow x=8 \times \frac{2}{10} = \frac{16}{10} = 1,6$$

۵ اگر $\sqrt[4]{2} = 4^x$ و $1 + \log \sqrt{x+1} = \log y$ باشد مقدار y کدام است؟

$$2^x \times 2^{1/2} = 2^{2x}$$

$$2^{5/2} = 2^{2x}$$

$$2x = \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{5}{4} \rightarrow 1 + \log \sqrt{\frac{5}{4} + 1} = \log y \rightarrow \log_{10} 10 + \log \frac{3}{2} = \log y$$

$$\log_{10} 10 \times \frac{3}{2} = \log y \rightarrow y = 15$$

۶ از دو معادله $\log_3 x + \log_3 y = 2$ و $x^2 + y^2 = 46$ ، لگاریتم $(x + y)$ در پایه ۴ کدام است؟

$$\log_3 x \cdot y = 2 \rightarrow \underline{\underline{xy = 3^2 = 9}}$$

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 46 + 18 \Rightarrow (x+y)^2 = 64$$

$$\rightarrow x+y = 8 \quad \checkmark$$

$$\log_4 (x+y) = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}$$

از دو معادله‌ی $\log_p^x = 1 + \log_p^{y+1}$ ، مقدار لگاریتم $(x+y)$ در پایه‌ی ۴، کدام است؟ ۷

$$\log_p^x = \log_p^y + \log_p^{(y+1)} = \log_p^{(y+2)} \rightarrow x = y+2$$

$$(y+2)^y - y^y = 32 \rightarrow 4y^y + 4 + 1y - y^y = 32 \rightarrow 3y^y + 1y - 28 = 0$$

$$\rightarrow y=2 \rightarrow x=4$$

$$y = \frac{-14}{3}x$$

$$x=4$$

$$y=2$$

$$\log_p^{(x+y)} = \log_p^1 = \log_p^{2^3} = \frac{3}{2}$$

۸ اگر $\log 2 = k$ باشد حاصل $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5})$ کدام است؟

$$\log(4 - 2\sqrt{5}) + \log(4 + 2\sqrt{5}) = \log(4 - 2\sqrt{5})(4 + 2\sqrt{5})$$

$$= \log(16 - 20) = \log 14 = \log 2^4 = 4 \log 2 = 4k$$

$$2 \log(1 + \sqrt{5}) = \log(1 + \sqrt{5})^2 = \log(1 + 5 + 2\sqrt{5}) = \log(6 + 2\sqrt{5})$$

۹ از دو معادله $4^x + 2^x = 72$ و $\log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2$ مقدار y کدام است؟

$$2^{2x} + 2^x - 72 = 0 \quad 2^x = A \rightarrow A^2 + A - 72 = 0 \rightarrow (A+9)(A-8) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = -9 \rightarrow 2^x = -9 \quad \times \\ A = 8 \rightarrow 2^x = 8 = 2^3 \rightarrow x = 3 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$x=3 \rightarrow \log 4 + \log(2y+9) = 2 \rightarrow \log(4y+36) = 2$$

$$\rightarrow 4y + 36 = 100 \rightarrow 4y = 64 \rightarrow y = 16$$

۱۰ از تساوی $\log_x^{3x+1} = 2 - \log_x^{x-4}$ مقدار لگاریتم x در پایه ۴، کدام است؟

$$\log_x (3x+1) + \log_x (x-4) = 2 \rightarrow \log_x (3x+1)(x-4) = 2$$

$$\rightarrow (3x+1)(x-4) = x^2$$

$$\rightarrow 3x^2 - 11x + 1x - 4 = x^2 \rightarrow 2x^2 - 10x - 4 = 0$$

$$\div 2 \rightarrow x^2 - 5x - 2 = 0 \rightarrow (x-1)(x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \checkmark \\ x=-3 \times \end{cases}$$

$$\log_x x = \log_x 1 = \log_{x^2}^{x^3} = \frac{3}{2}$$

(۱۱) از معادله $\log_2(x+3) + \log_2(2x-1) = \log_2 30 - \log_2 2$ مقدار $\log_8 x$ کدام است؟

$$\log_2(2x-1)(x+3) = \log_2 \frac{30}{2} \rightarrow (2x-1)(x+3) = 15$$

$$\rightarrow 2x^2 + 5x - x - 3 = 15 \rightarrow 2x^2 + 4x - 18 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(2)(-18) = 16 + 144 = 160 \rightarrow \sqrt{160} = 13$$

$$x = \frac{-4 \pm 13}{4} \rightarrow x = 2 \quad x = \frac{-17}{4} \times$$

$$\log_8 x = \log_{2^3} 2^1 = \frac{1}{3}$$

۱۲) از معادله‌ی لگاریتمی $\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$ مقدار لگاریتم $\sqrt[3]{x+1}$ در پایه‌ی ۴، کدام است؟

$$\cancel{\log} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \cancel{\log} (2x - 5) \rightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{\cancel{x-3}} = 2x - 5$$

$$\rightarrow x + 2 = 2x - 5 \rightarrow x = 7$$

$$\log_4 \sqrt[3]{x+1} = \log_{4^{\frac{1}{3}}} x+1 = \frac{1}{3}$$

۱۳ از دو معادله‌ی دو مجهولی $۲^{x-y} \times ۴^{x+y} = ۱$ و $\log y = ۲ \log ۳ + \log x$ مقدار y کدام است؟

$$۲^{x-y} \cdot ۲^{۲x+۲y} = ۲^0 \rightarrow ۲^{۳x+۲y-y} = ۲^0 \rightarrow ۳x+y-y=0$$

$$\log y = \log 9 + \log x = \log 9x \rightarrow y = 9x$$

$$۳x+y-y=0 \xrightarrow{y=9x} ۳x+۱۸x=۷ \rightarrow ۲۱x=۷ \rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

$$y = 9x = 9\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \rightarrow y = 3$$

۱۴ از دو معادله $\log(y+2)=1$ و $\log(y-x)+\log(4x+y)=2$ مقدار x کدام است؟

$$\log_{10}(y+2)=1 \rightarrow y+2=10 \rightarrow y=8$$

$$\log_{10}(1-x)+\log_{10}(4x+1)=2 \rightarrow \log_{10}((1-x)(4x+1))=2$$
$$(1-x)(4x+1)=100$$

$$4x+4-4x^2-1x=100 \rightarrow 4x^2-3x+96=0$$

$$\div 4 \rightarrow x^2-\frac{3}{4}x+24=0 \rightarrow (x-\frac{3}{4})^2=0 \rightarrow x=\frac{3}{4}$$

۱۵ از تساوی $\log(2x-1) + \frac{1}{2}\log x^2 = \log 3$ ، مقدار لگاریتم $\frac{x}{3}$ در مبنای ۴ کدام است؟

$$\begin{aligned}\log(2x-1) + \log x &= \log 3 \rightarrow \log x(2x-1) = \log 3 \\ \rightarrow 2x^2 - x &= 3 \rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \times \\ x = \frac{3}{2} \checkmark \end{cases}\end{aligned}$$

$$\log_4 \frac{x}{3} = \log_4 \frac{1}{2} = \log_4 2^{-1} = \frac{-1}{2}$$

۱۶ از معادله‌ی لگاریتمی $2 \log x = \underline{1} + \log\left(x + \frac{12}{5}\right)$ مقدار $\log_5(2x+1)$ کدام است؟

$$\log_{10} x^2 = \log_{10} 10 + \log_{10} \left(x + \frac{12}{5}\right) = \log_{10} \left(x + \frac{12}{5}\right)$$

$$\rightarrow x^2 = 10x + 12 \rightarrow x^2 - 10x - 12 = 0 \rightarrow (x - 12)(x + 2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 12 \checkmark \\ x = -2 \times \end{cases}$$

$$\log_5(2x+1) = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$$

۱۷) جواب معادله‌ی لگاریتمی $\log(3x+1) + 2\log\sqrt{x-2} = \frac{1}{2}\log(x^2-2x+1) + \log(x+2)$ کدام است؟

$$\log(3x+1) + \log(x-2) = \log(x-1) + \log(x+2)$$

$$\rightarrow \log(3x+1)(x-2) = \log(x-1)(x+2)$$

$$\rightarrow 3x^2 - 4x + \cancel{x} - 2 = x^2 + \cancel{x} - 2$$

$$\rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \rightarrow 2x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x=0 \quad \times \\ x=2 \quad \checkmark \end{array}$$

۱۸ جواب معادله‌ی $2 \log x - \log(x+2) = 1$ کدام است؟

$$\log x^2 - \log(x+2) = 1 \rightarrow \log \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$\rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 10 \rightarrow x^2 = 10x + 20 \rightarrow x^2 - 10x - 20 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = 100 - 4(1)(-20) = 100 + 80 = 180$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{180}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 5 + 3\sqrt{5} \checkmark \\ x = 5 - 3\sqrt{5} \quad \times \end{cases}$$

از دستگاه معادلات ۱۹

حاصل لگاریتم $x + 2y$ در مبنای ۱۶ کدام است؟

$$\begin{cases} \log(x^2 + 4y^2) = 2 \log \sqrt{2} + \log 2^3 \\ \log x + \log y = 2 \log 3 - \log 2 \end{cases}$$

$$\log(x^2 + 4y^2) = \log 2 + \log 2^3 = \log 4^2 \rightarrow x^2 + 4y^2 = 4^2$$

$$\log x + \log y = \log 9 - \log 2 \rightarrow \log xy = \log \frac{9}{2} \rightarrow xy = \frac{9}{2}$$

$$(x + 2y)^2 = x^2 + 4y^2 + 4xy = 4^2 + 4\left(\frac{9}{2}\right) = 44 \rightarrow x + 2y = \sqrt{44}$$

$$\log_{16}(x + 2y) = \log_{16} \sqrt{44} = \log_{16} 2^{\frac{1}{2}} \cdot 11^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{16} 22$$

۲۰ حاصل جمع جواب های معادله ی $\log_x^{5x} - \frac{1}{2} \log_5^{x^2} = 1$ کدام است؟

$$\log_x^{5x} - \log_5^x = 1 \rightarrow \log_x^5 + \log_x^x - \log_5^x = 1$$

$$\rightarrow \log_x^5 - \log_5^x = 0 \rightarrow \frac{1}{\log_5^x} - \log_5^x = 0 \rightarrow 1 - (\log_5^x)^2 = 0$$

$$\rightarrow (\log_5^x)^2 = 1 \rightarrow \log_5^x = 1 \rightarrow x = 5$$

$$\rightarrow 5 + \frac{1}{5} = \frac{26}{5}$$

$$\log_5^x = -1 \rightarrow x = \frac{1}{5}$$