

آموزش حسابان یازدهم

ترکیب توابع

(فصل دوم – درس چهارم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

(۲)

$$f \circ g(x) = f(g(x)) \quad (۱)$$

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

$$g(x) = \sin x$$

$$f \circ g(x) = \sqrt{\sin x + 2}$$

$$f \circ f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2} + 2}$$

$$g \circ f(x) = \sin \sqrt{x+2}$$

$$g \circ g(x) = \sin(\sin x)$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad g(x) = \frac{1-x}{x+1}$$

$$D_{f \circ g} = ?$$

$$f \circ g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} \rightarrow \frac{1-x}{x+1} \geq 0$$

$$1-x=0 \rightarrow x=1$$

$$x+1=0 \rightarrow x=-1$$



$$D_{f \circ g} = (-1, 1]$$

۱ اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند. دامنه‌ی تعریف تابع $g \circ f$ کدام است؟

$$g \circ f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2} - \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) \left(1 - \frac{1+x^2}{1-x^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) \left(\frac{-2x^2}{1-x^2}\right)} \rightarrow \frac{(1+x^2)(-2x^2)}{(1-x^2)^2} \geq 0$$

$$x \neq \pm 1 \quad \checkmark$$

$$x = 0 \quad \checkmark$$

$$\rightarrow g \circ f = \{0\}$$

(۲) اگر $f(x) = x^2 - x - 2$ و $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ ، آن گاه $(f + g)(x)$ کدام گزینه می تواند باشد؟ $(\frac{b}{r})^r$

$x^2 + 2x$ (۴)

$x^2 - 2x$ (۳)

$x^2 + 1$ (۲)

$x^2 - 1$ (۱)

$$g^r - g - 1 = x^r + x - 1 \rightarrow g^r - g + \frac{1}{r} = x^r + x + \frac{1}{r}$$

$$\rightarrow (g - \frac{1}{r})^r = (x + \frac{1}{r})^r \rightarrow g - \frac{1}{r} = x + \frac{1}{r} \rightarrow g = x + 1$$

$$g - \frac{1}{r} = -x - \frac{1}{r} \rightarrow g = -x$$

$$f + g = x^2 - x - 2 + x + 1 = x^2 - 1 \quad \checkmark$$

$$f + g = x^2 - x - 2 - x = x^2 - 2x - 2 \quad \checkmark$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۳ اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $f \circ g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ مقدار $g(1)$ کدام است؟

$$\frac{g(x)+1}{g(x)-1} = \frac{x^2+2}{x^2+1} \quad x=1 \rightarrow \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{3}{2}$$

$$g(1)=A \rightarrow 2A-1 = 2A+1 \rightarrow A=0$$

$$\rightarrow g(1) = 0$$

۴ اگر $f(x) = 2x - 2$ و $g(x) = x^2 - 1$ باشد جواب معادله ی $f \circ g(x) = 0$ کدام است؟

$$f \circ g(x) = 0 \rightarrow 2(x^2 - 1) - 2 = 0$$

$$\rightarrow 2(x^2 - 1) = 2 \rightarrow x^2 - 1 = 1$$

$$\rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

در تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{x+4}}{2x+3} & ; x > 3 \\ 2x+3 & ; x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $\underline{f(f(5))} + \underline{f(f(1))}$ کدام است؟ ۵

$$x=5 \xrightarrow{f} f(5) = 5 - \sqrt{9} = 2 \xrightarrow{f} f(f(5)) = 2 \times 2 + 3 = 7$$

$$x=1 \xrightarrow{f} f(1) = 2 + 3 = 5 \xrightarrow{f} f(f(1)) = 5 - \sqrt{9} = 2$$

$$f(f(5)) + f(f(1)) = 7 + 2 = 9$$

۶ اگر $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه‌ی تعریف تابع $g \circ f$ کدام است؟

$$g \circ f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2} - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \left(1 - \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-x^2)}{1+x^2} \cdot \frac{1+x^2}{1+x^2}} \rightarrow \frac{(1-x^2) \cancel{1+x^2}}{(1+x^2)^2} \geq 0$$

$$1-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$D_{g \circ f} = [-1, 1]$$

۷ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟

$$g(f(x)) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) + 2}{2 - \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)} = \frac{\cancel{2x-1} + \cancel{2x+2}}{\cancel{x+1}} \cdot \frac{\cancel{x+1}}{\cancel{2x+2} - \cancel{2x+1}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\rightarrow g(f(x)) = \frac{2x}{x} = 2$$

۸ اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $f = \{(x, \underline{2x-1}), x \in \underline{A}\}$ باشد تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟

$$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$$

$$f(f(x)) = \{(1, 1), (2, 5), (3, 9), (\cancel{4}, \cancel{13}), (\cancel{5}, \cancel{17})\}$$

$$\rightarrow f(f(x)) = \{(1, 1), (2, 5), (3, 9)\}$$

اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $x \rightarrow \underline{f} \rightarrow \underline{g} \rightarrow \underline{2x}$ باشند و $g(x) = \underline{3x} + 4$ مقدار $f(5)$ کدام است؟

$$g(f(x)) = 2x \rightarrow 3f(x) + 4 = 2x$$

$$\xrightarrow{x=5} 3f(5) + 4 = 10 \rightarrow 3f(5) = 6$$

$$\rightarrow f(5) = 2$$

۱۰ اگر $f(x) = \underline{x + \sqrt{x}}$, $g = \{(1, 2), (5, 4), (\underline{6}, \underline{5}), (2, 3)\}$ و $g(f(a)) = 5$ باشد، عدد a کدام است؟

$$g(\underline{\underline{f(a)}}) = 5 \rightarrow \underline{\underline{f(a) = 6}}$$

$$\underline{\underline{a + \sqrt{a} = 6}} \rightarrow a = 9$$

۱۱ اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟

$$g(f(x)) = \frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\frac{2x+3}{2-x} + 2} = \frac{\frac{2-x-6x-9}{2-x}}{\frac{2x+3+2-2x}{2-x}}$$

$$= \frac{-5x-7}{2} = \frac{-x-1}{1}$$

$$\rightarrow g(f(x)) = -x-1$$

۱۲ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x+4$ باشند، جواب معادله $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ ، کدام است؟

$$\frac{2x-1}{x+2} + \frac{4}{1} = \frac{2(x+4)-1}{x+4+2} \rightarrow \frac{2x-1+4x+4}{x+2} = \frac{2x+8-1}{x+6}$$

$$\rightarrow (x+4)(4x+7) = (x+2)(2x+7)$$

$$\rightarrow 4x^2 + 7x + 4x + 28 = 2x^2 + 7x + 2x + 14$$

$$\rightarrow 2x^2 + 12x + 14 = 0 \rightarrow x = -1 \text{ و } x = -7$$

۱۳ اگر $y = f(x)$ یک تابع خطی گذرنده از نقاط $(0, a)$ و $(a, 0)$ باشد. ضابطه‌ی $f \circ f(x)$ کدام است؟

$$y = \underline{ax} + \underline{b} \rightarrow y = -x - 1 \checkmark$$

$$A/a \rightarrow a = 0 + b \rightarrow a = b \checkmark$$

$$B/a \rightarrow a + a = 0 \rightarrow \begin{array}{l} a = 0 \times \\ a = -1 \checkmark \end{array}$$

$$\rightarrow f(x) = -x - 1$$

$$f(f(x)) = -(-x - 1) - 1 = x + 1 - 1 = x$$

۱۴ اگر f و g توابعی چندجمله‌ای باشند به طوری که $(f+g)(x) = 4$ و $(f \circ g)(x) = 7 - 4x$ ، حاصل جمع مقادیر ممکن برای $g(2)$

$$f(x) + g(x) = 4 \rightarrow g(x) = 4 - f(x)$$

$$f(x) = ax + b \rightarrow g(x) = 4 - ax - b = \begin{matrix} 1 - 2x + 3 \\ 2x - 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 - 2 + 3 = -1 \\ 2 - 1 = 1 \end{matrix}$$

$$f \circ g(x) = a(4 - ax - b) + b = \underline{4a} - \underline{a^2x} - \underline{ab} + \underline{b} = \underline{7 - 4x}$$

$$4 - a^2 = -4 \rightarrow a^2 = 8 \rightarrow a = \pm 2$$

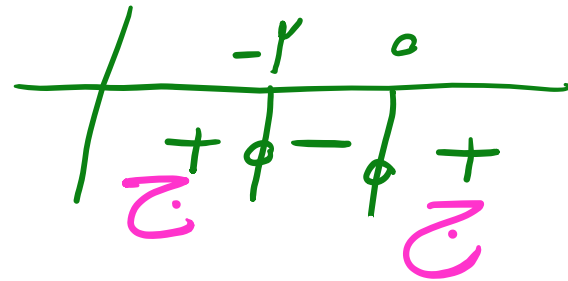
$$a = 2 \rightarrow 4 - 2b + b = 7 \rightarrow 4 - b = 7 \rightarrow b = -3$$

$$a = -2 \rightarrow -4 + 2b + b = 7 \rightarrow -4 + 3b = 7 \rightarrow b = 3$$

۱۵ اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$ باشند، دامنه‌ی تعریف تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

$$f \circ g(x) = \sqrt{3 - \log_2(x^2 + 2x)}$$

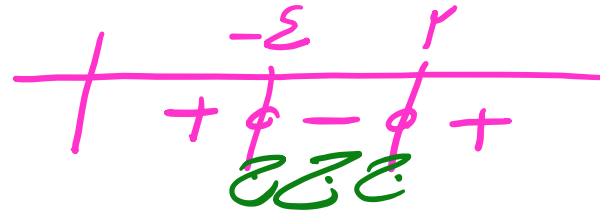
$$x^2 + 2x > 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$



$$D_1 = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$

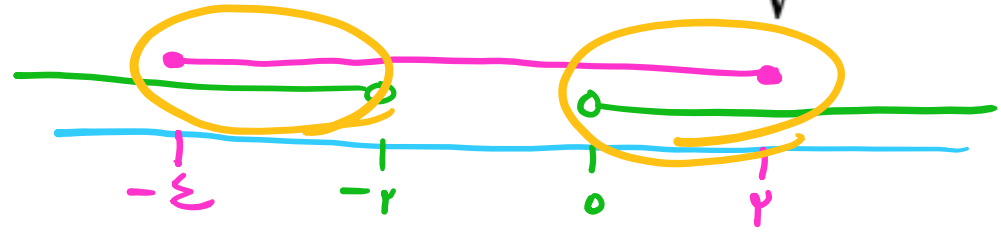
$$3 - \log_2(x^2 + 2x) \geq 0 \rightarrow \log_2(x^2 + 2x) \leq 3 \rightarrow x^2 + 2x \leq 8$$

$$x^2 + 2x - 8 \leq 0 \rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=2 \end{cases}$$



$$D_2 = [-4, 2]$$

$$D_{f \circ g} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$



۱۶ اگر $f(x) = \underline{a}x^2 + \underline{b}x - c$ و $g(x) = x + a$ و $\underline{f(g(x))} = x^2 + 4x - 5$ باشد، c کدام است؟

$$a(\underline{x+a})^2 + b(\underline{x+a}) - c = x^2 + 4x - 5$$

$$\rightarrow \underline{a}x^2 + \underline{a^2} + \underline{2a^1}x + \underline{b}x + ba - c = \underline{1}x^2 + \underline{4}x - \underline{5}$$

$$a=1$$

$$2a^1 + b = 4 \xrightarrow{a=1} 2 + b = 4 \rightarrow b=2$$

$$a^2 + ba - c = -5 \rightarrow 1 + 2 - c = -5$$

$$c=1$$

۱۷ اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ و $g(\frac{1}{x}) = x + \frac{1}{x}$ باشند دامنه‌ی تعریف تابع $f \circ g$ کدام است؟

$$g(x) = \frac{1}{x} + x \rightarrow f \circ g(x) = \sqrt{2\left(\frac{1}{x} + x\right) - \left(\frac{1}{x} + x\right)^2}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{x} + x\right) \left(2 - \frac{1}{x} - x\right) \geq 0$$

$$D_{f \circ g} = \{1, 2\}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1+x^2}{x}\right) \left(\frac{2x-1-x^2}{x}\right) \geq 0 \rightarrow 2x-1-x^2 \geq 0$$

$\xrightarrow{\oplus}$

$$\rightarrow x^2 - 2x + 1 \leq 0 \rightarrow \underline{\underline{(x-1)^2 \leq 0}} \rightarrow x=1$$

۱۸ اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x + 2$ نمودارهای دو تابع f و fog ، با کدام طول متقاطع اند؟

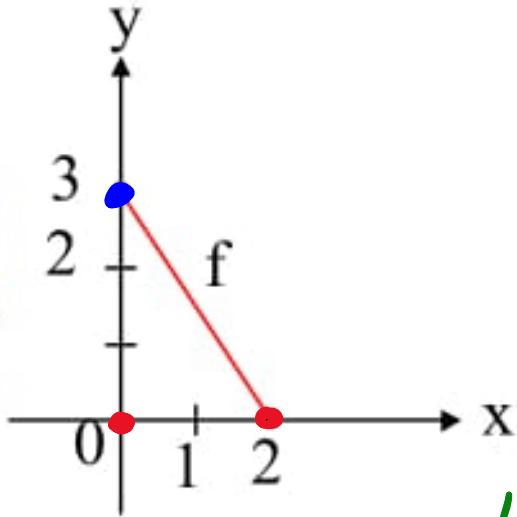
$$fog(x) = (2(x+2) - 3)^2 = (2x + 4 - 3)^2 = (2x + 1)^2$$

$$fog(x) = f(x) \rightarrow (2x + 1)^2 = (2x - 3)^2$$

$$\cancel{2x} + 1 = \cancel{2x} - 3 \rightarrow 1 = -3 \quad \times$$

$$2x + 1 = -(2x + 3) \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۱۹ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه‌ی تابع $y = f \circ f(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟



$$y = ax + b$$

$$b = 3$$

$$a = \frac{-3}{2}$$

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$D_{f \circ f} : \{ x \in D_f \cap \{ f(x) \in D_f \} \}$$

$$= \{ \underline{0 \leq x \leq 2} \cap \underline{\frac{2}{3} \leq x \leq 2} \} = \left[\frac{2}{3}, 2 \right]$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\frac{3}{2}x + 3 \leq 2 \\ -3 &\leq -\frac{3}{2}x \leq -1 \\ \div -\frac{3}{2} &\rightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

۲۰ اگر $f + g = \{(1, 5), (2, 4), (3, 2), (4, 3)\}$ و $f - g = \{(1, 1), (2, 4), (3, 0), (4, 1)\}$ آن گاه تعداد اعضای $f \circ g$

$$f + g + f - g = 2f = \{(1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4)\} \rightarrow f = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 2)\}$$

$$f + g - f + g = 2g = \{(1, 4), (2, 0), (3, 2), (4, 2)\} \rightarrow g = \{(1, 2), (2, 0), (3, 1), (4, 1)\}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \{(1, 2), (2, 0), (3, 1), (4, 1)\}$$