

آموزش حسابان یازدهم

وارون تابع

(فصل دوم – درس سوم)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$f_1 = \frac{\omega x + \gamma}{\mu x + \nu} \rightarrow \mu x y + \nu y = \omega x + \gamma$$

$$\rightarrow \mu x y - \omega x = \gamma - \nu y \rightarrow x(\mu y - \omega) = \gamma - \nu y$$

$$x = \frac{\gamma - \nu y}{\mu y - \omega} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\gamma - \nu x}{\mu x - \omega}$$

$$f = x^2 + 2x + 5$$

$$x = \frac{-b}{2a} = -1$$

$$\underline{\underline{x \geq -1}}$$

$$f = x^2 + 2x + 5 + 1 = (x+1)^2 + 1 \rightarrow f - 1 = (x+1)^2$$

$$\rightarrow \underline{\underline{x+1}} = \pm \sqrt{f-1} \rightarrow x+1 = +\sqrt{f-1}$$

$$\rightarrow x = \sqrt{f-1} - 1 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} - 1$$

تابع با ضابطه $y = x|x-2|$ در یک بازه، نزولی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه، کدام است؟

۱

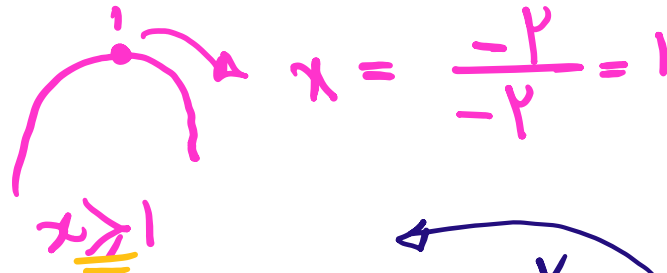
$x \geq 2$ $\rightarrow y = 1x^2 - 2x$

$x \leq 2$ $\rightarrow y = -x^2 + 2x$



$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$x \leq 1$ X



اشتراک

$1 \leq x \leq 2$

$$y = -x^2 + 2x = -x^2 + 2x - 1 + 1 = -(x-1)^2 + 1 \rightarrow y-1 = -(x-1)^2$$

$$\rightarrow (x-1)^2 = 1-y \rightarrow \underline{x-1} = \pm \sqrt{1-y} \rightarrow x-1 = +\sqrt{1-y}$$

$$\rightarrow x = \sqrt{1-y} + 1 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{1-x} + 1$$

$D_{f^{-1}} = [0, 1]$

$1-x \geq 0 \rightarrow x \leq 1$

$x=1$
 $y=1$

$x=2$
 $y=0$

۲ نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ ، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

$$f = \frac{x+4}{x-2} \rightarrow f(x) - 1 = \frac{x+4}{x-2} - 1 = \frac{x+4 - (x-2)}{x-2} = \frac{6}{x-2}$$

$$\rightarrow x = \frac{6}{f-1} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{6}{x-1}$$

$$\frac{x+4}{x-2} = \frac{1x+4}{x-1} \rightarrow (x+4)(x-1) = (1x+4)(x-2)$$

$$\rightarrow x^2 - 1x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

۳ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ ، در یک بازه، صعودی است. ضابطه‌ی معکوس آن، در این بازه کدام است؟



$$\begin{aligned} x < -1 &\rightarrow f = -2x + 4 + x + 1 = -x + 5 \quad \times \\ -1 \leq x \leq 3 &\rightarrow f = -2x + 4 - x - 1 = -3x + 3 \quad \times \\ x \geq 3 &\rightarrow f = 2x - 4 - x - 1 = x - 5 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$f(x) = x - 5$$

$$x \geq 3 \rightarrow y \geq -4$$

$$y = x - 5 \rightarrow x = y + 5 \rightarrow f^{-1}(x) = \underline{\underline{x + 5}} \quad x \geq -4$$

۴ اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (0, 3), (4, -1)\}$ و $g = \{(\underline{2}, 3), (-1, 4), (4, \underline{1}), (3, 0)\}$ تابع $g \circ f^{-1}$ کدام است؟

$$f^{-1} = \{(\underline{2}, 1), (5, \underline{2}), (\underline{3}, 0), (\underline{-1}, 4)\}$$

$$g(f^{-1}(x)) = \{(\cancel{2}, 3), (5, \cancel{3}), (\cancel{3}, 0), (-1, 1)\}$$

$$\rightarrow g \circ f^{-1} = \{(5, 3), (-1, 1)\}$$

۵ دو تابع $f = \{(2, 5), (6, \underline{3}), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، a کدام است؟

$$f^{-1}(g(2a)) = 6 \rightarrow \underline{g(2a)} = f(6)$$

$$\frac{2a}{2a-1} = \frac{3}{1} \rightarrow 2a - 1 = 2a \rightarrow 1a = 3$$

$$\rightarrow a = \frac{3}{1}$$

قرینه‌ی خط به معادله‌ی $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ ، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

$$3y - 2x = 4 \rightarrow 2x = 3y - 4 \rightarrow x = \frac{3y - 4}{2}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x - 4}{2} \rightarrow d: \frac{3x - 4}{2}$$

عرض از مبدأ
 $x = 0$

$$y = \frac{0 - 4}{2} = -2$$

ضابطه‌ی معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ به کدام صورت است؟

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \rightarrow \sqrt{x-1} = 2 - y \rightarrow x-1 = 4 + y^2 - 4y$$

$$x = y^2 - 4y + 5 \rightarrow f^{-1}(x) = \underline{\underline{x^2 - 4x + 5}}$$

$$x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow y=2 \\ x>1 \rightarrow y<2 \end{cases}$$

$$\rightarrow R_f = \underline{\underline{(-\infty, 2]}} = D_{f^{-1}}$$

۸ اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = \underline{x^3 + x}$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(1)$ ، کدام است؟

$$g^{-1}\left(\underline{f^{-1}(1)}\right) = g^{-1}\left(\underline{10}\right) = 10$$

$$\frac{2}{5}x - 4 = 1 \rightarrow \frac{2}{5}x = 12 \rightarrow x = 10$$

$$x^3 + x = 10 \rightarrow x = 10$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(1) = 10$$

۹ اگر $x \geq 1$ ، $f(x) = x^2 - 2x - 3$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x) = \frac{x-9}{2}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟

$$y = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x-1)^2 - 4 \rightarrow y+4 = (x-1)^2 \rightarrow x-1 = \pm \sqrt{y+4}$$

$$\rightarrow x-1 = \sqrt{y+4} \rightarrow x = \sqrt{y+4} + 1 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} + 1$$

$$\sqrt{x+4} + 1 = \frac{x-9}{2} \rightarrow \sqrt{x+4} = \frac{x-11}{2} \rightarrow \boxed{\sqrt{x+4} = x-11}$$

$$\rightarrow f(x+4) = x^2 - 22x + 121 \rightarrow x^2 - 24x + 105 = 0$$

$$(x-11)(x-5) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x=11 \checkmark \\ x=5 \times \end{array}$$

۱۰ اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, \underline{3}), (4, \underline{2}), (5, \underline{6}), (3, \underline{1})\}$ باشند. تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ کدام است؟

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (\underline{4}, 3), (\underline{6}, 4)\}$$

$$g(f^{-1}(x)) = \{(\cancel{2}, \underline{3}), (5, \underline{2}), (4, \underline{1}), (6, 2)\}$$

$$\frac{g}{g \circ f^{-1}} = \{(5, \frac{4}{3}), (4, \frac{2}{1})\} = \{(5, 2), (4, 2)\}$$

۱۱ اگر $f = \{(\underline{1}, 2), (2, 5), (\underline{3}, 4), (\underline{4}, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $f \circ (g^{-1})$ ، کدام است؟

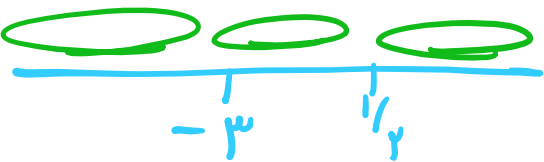
$$g^{-1} = \{(3, 2), (2, \underline{4}), (4, \underline{5}), (1, 3)\}$$

$$g^{-1}(f(x)) = \{(\underline{1}, 4), (\cancel{2}, \cancel{5}), (\cancel{3}, \cancel{6}), (\underline{4}, 5)\}$$

$$(g^{-1} \circ f) - f = \{(1, 4-2), (4, 5-4)\}$$

$$\text{جواب} = \{(1, 2), (4, 1)\}$$

۱۲ تابع $f(x) = |2x - 1| - 2|x + 3|$ در بازه‌ای وارون پذیر است. ضابطه‌ی وارون آن کدام است؟



$$\begin{aligned} x < -3 &\rightarrow f = -2x + 1 + 2x + 4 = 5 \\ -3 \leq x < \frac{1}{2} &\rightarrow f = -2x + 1 - 2x - 4 = -4x - 3 \\ x > \frac{1}{2} &\rightarrow f = 2x - 1 - 2x - 4 = -5 \end{aligned}$$

$$y = -4x - 3 \quad -3 \leq x < \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = -3 \rightarrow y = 5 \\ x = \frac{1}{2} \rightarrow y = -5 \end{cases} \quad R_f = [-5, 5]$$

$$y + 3 = -4x \rightarrow x = \frac{y + 3}{-4}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{-4} \quad D_{f^{-1}} = [-5, 5]$$

۱۳ اگر $f(x) = \log(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ باشد، آن گاه حاصل $f^{-1}(x) + f^{-1}(-x)$ کدام است؟

$$y = \log(\sqrt{x^2 + 1} + x) \rightarrow 10^y = \sqrt{x^2 + 1} + x \rightarrow 10^y - x = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\rightarrow 10^{2y} + x^2 - 2x \cdot 10^y = x^2 + 1 \rightarrow 2x \cdot 10^y = 10^{2y} - 1 \rightarrow x = \frac{10^y - 1}{2 \cdot 10^y}$$

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{10^y}{10^y} - \frac{1}{10^y} \right) = \frac{1}{2} (10^y - 10^{-y}) \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{10^x - 10^{-x}}{2}$$

$$\frac{10^x - 10^{-x}}{2} + \frac{10^{-x} - 10^x}{2} = 0$$

۱۴ ضابطه‌ی معکوس تابع $f(x) = x^2 + 6x - 1$ با فرض $(x \leq -4)$ کدام است؟

$$y = x^2 + 6x + 9 - 10 = (x+3)^2 - 10 \rightarrow y + 10 = (x+3)^2$$

$$\rightarrow \pm \sqrt{y+10} = x+3 \rightarrow x+3 = -\sqrt{y+10} \rightarrow x = -\sqrt{y+10} - 3$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x+10} - 3$$

$$D_{f^{-1}} = [-9, +\infty)$$

$$y = (x+3)^2 - 10 \xrightarrow{x=-4} y = 1 - 10 = \underline{\underline{-9}}$$

$$\rightarrow R_f = [-9, +\infty)$$

۱۵ تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ مفروض است. تابع $g(x) = \sqrt[3]{x}$ با کدام یک از انتقال های زیر بر تابع f^{-1} منطبق می شود؟

۱ یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت بالا

۲ یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا

۳ یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت پایین

۴ یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت پایین

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7 + 1 = (x-2)^3 + 1$$

$$y-1 = (x-2)^3 \rightarrow x-2 = \sqrt[3]{y-1} \rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} + 2$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 2$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

$$\left(\frac{b}{r}\right)^r$$

۱۶ تابع وارون تابع $y = x + \sqrt{x}$ به صورت $y = \left(\frac{\sqrt{ax+1}-1}{b}\right)^r$ می باشد، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

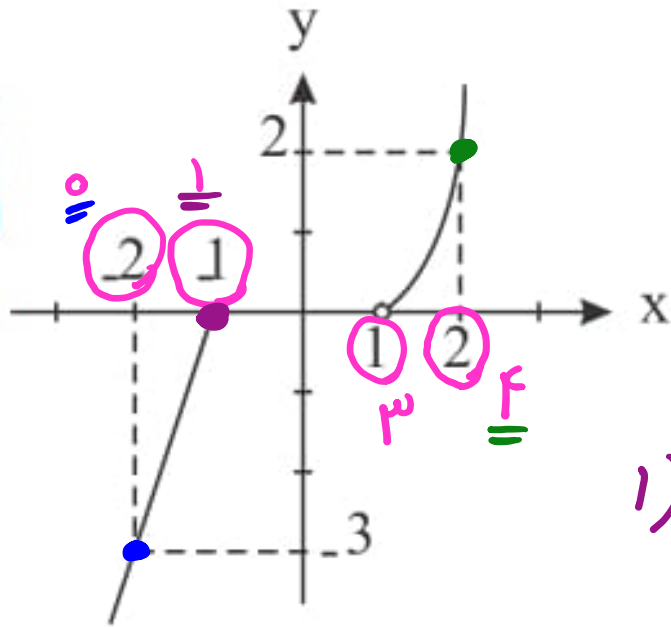
$$y = \sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{r}\right)^r - \frac{1}{r} \rightarrow y + \frac{1}{r} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{r}\right)^r$$

$$\rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{r} = \sqrt[r]{\frac{ry+1}{r}} = \frac{\sqrt[r]{ry+1}}{r} \rightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt[r]{ry+1}}{r} - \frac{1}{r}$$

$$\rightarrow x = \left(\frac{\sqrt[r]{ry+1}-1}{r}\right)^r \rightarrow f^{-1}(x) = \left(\frac{\sqrt[r]{rx+1}-1}{r}\right)^r$$

$$\begin{aligned} a &= r \\ b &= 1 \end{aligned} \rightarrow \frac{a}{b} = r$$

۱۷) نمودار $y = f(x + 2)$ داده شده است. حاصل عبارت $A = \frac{f^{-1}(\underline{0}) + f^{-1}(2)}{1 + f^{-1}(-3)}$ کدام است؟



$$f(x) \xrightarrow{+2} f(x+2)$$

$$A = \frac{1 + 2}{1 + 0} = 3$$

$$1) f^{-1}(0) = 1 \quad \checkmark$$

$$2) f^{-1}(2) = 2 \quad \checkmark$$

$$3) f^{-1}(-3) = -1 \quad \checkmark$$

اگر $f(x) = \sqrt{4-x} + 2$ و نقاط A و B ابتدا و انتهای نمودار تابع $h(x) = (f \circ f^{-1})(x) + (f^{-1} \circ f)(x)$ باشند، طول پاره خط AB

$$f \circ f^{-1}(x) = x = f^{-1} \circ f(x) \rightarrow h(x) = x + x = \underline{2x}$$

$$1-x \geq 0 \rightarrow x \leq 1 \rightarrow D_f = (-\infty, 1]$$

$$\sqrt{1-x} \geq 0 \rightarrow \sqrt{1-x} + 2 \geq 2 \rightarrow D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$$

$$D_f \cap D_{f^{-1}} = [2, 1]$$

$$\begin{array}{l|l} A & x=2 \rightarrow y=1 \\ B & x=1 \rightarrow y=2 \end{array}$$

$$|AB| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

۱۹ اگر $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$ و $g(x) = \frac{x^3+1}{2-x^3}$ باشد ضابطه‌ی تابع $(g \circ f)^{-1}$ کدام است؟

$$f \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{x+2+1}{2-(x+2)} = \frac{x+3}{-x}$$

$$y = \frac{x+3}{-x} \rightarrow -xy = x+3 \rightarrow -xy - x = 3$$

$$\rightarrow x(-y-1) = 3 \rightarrow x = \frac{3}{-y-1} = \frac{-3}{y+1}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-3}{x+1}$$

۲۰ به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع معکوس $f(x) = \frac{x-4}{2x-1}$ از نقطه‌ی $(m+2, m)$ می‌گذرد؟

$$f^{-1} \left/ \begin{array}{c} m+2 \\ m \end{array} \right. \rightarrow f \left/ \begin{array}{c} m \\ m+2 \end{array} \right. \rightarrow m+2 = \frac{m-4}{2m-1}$$

$$\rightarrow (m+2)(2m-1) = m-4 \rightarrow 2m^2 - m + 4m - 2 = m - 4$$

$$\rightarrow 2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$\Delta < 0$$

پس جواب
= -