

آموزش حسابان یازدهم

آشنایی با هندسه تحلیلی

(فصل اول – درس پنجم)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

محاسبه شیب خط با استفاده از دو نقطه

$$\begin{array}{c|c} A & x_A \\ \hline & y_A \end{array} \quad \begin{array}{c|c} B & x_B \\ \hline & y_B \end{array}$$

$$\rightarrow m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

محاسبه شیب خط با معادله

$$y = ax + b \rightarrow m = a$$

$$2y = 1x + 3 \xrightarrow{\div 2} y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$ax + by + c = 0 \rightarrow m = -\frac{a}{b}$$

$$10x + 14y = 10 \rightarrow m = -\frac{10}{14}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_0 = \checkmark \\ y_0 = \checkmark \\ m = \text{شیب} \end{cases}$$

رابطه بین دو خط موازی و عمود

موازی $m_1 = m_2$

عمود $m_1 \cdot m_2 = -1$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

نسبت

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

موازی

محاسبه فاصله دو نقطه

$$A \begin{array}{l} x_A \\ y_A \end{array}$$

$$B \begin{array}{l} x_B \\ y_B \end{array}$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

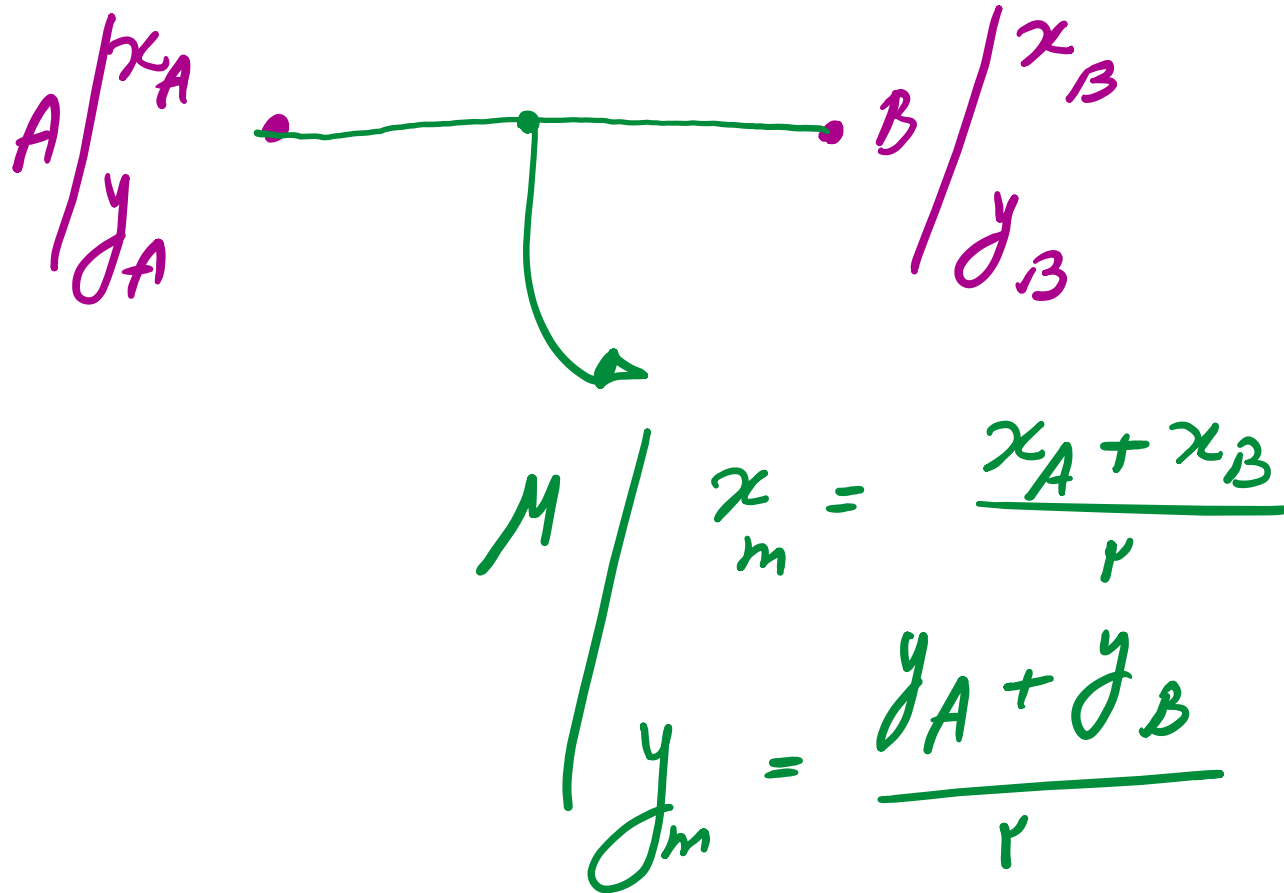
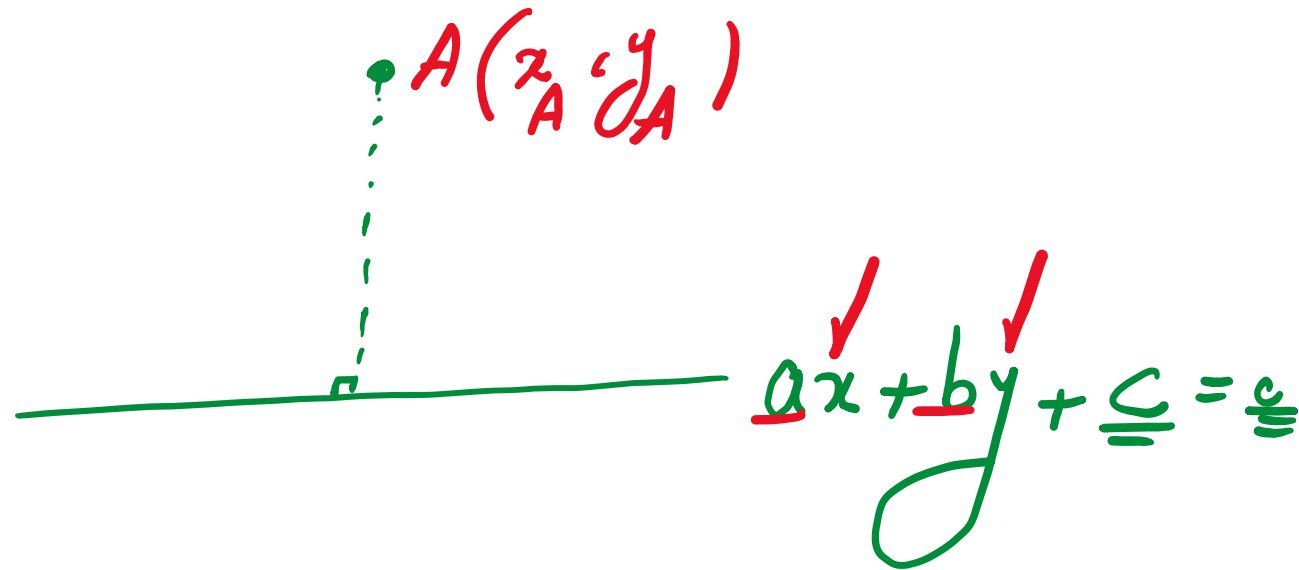


Diagram illustrating the midpoint formula for a line segment AB. The endpoints are A (x_A, y_A) and B (x_B, y_B) . The midpoint is M (x_m, y_m) . The formulas for the midpoint coordinates are:

$$x_m = \frac{x_A + x_B}{2}$$
$$y_m = \frac{y_A + y_B}{2}$$



$A(x_A, y_A)$

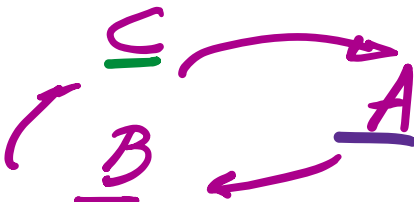
$ax + by + c = 0$

$$L = \frac{|a \cdot x_A + b \cdot y_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\begin{aligned} \underline{ax + by} &= c_1 \\ \underline{ax + by} &= c_2 \end{aligned} \rightarrow L = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 1 \\ 4x + 1y &= 2 \\ 4x + 1y &= 5 \end{aligned} \rightarrow L = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}$$

محاسبه مساحت مثلث با استفاده از سه راس

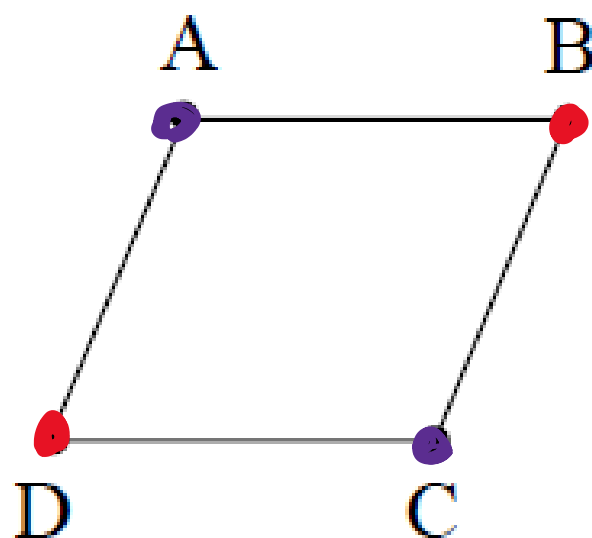


$$\underline{A} \left| \begin{array}{c} X_A \\ Y_A \end{array} \right.$$

$$\underline{B} \left| \begin{array}{c} X_B \\ Y_B \end{array} \right.$$

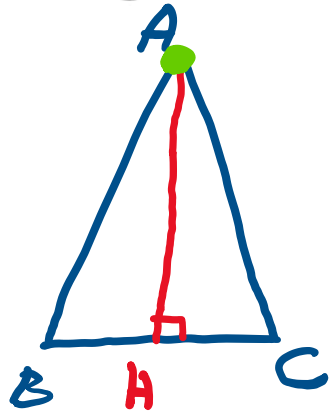
$$\underline{C} \left| \begin{array}{c} X_C \\ Y_C \end{array} \right.$$

$$S = \frac{1}{2} \left| x_A (y_B - y_C) + x_B (y_C - y_A) + x_C (y_A - y_B) \right|$$



$$\begin{cases} \underline{x_A} + \underline{x_C} = \underline{x_B} + \underline{x_D} \\ \underline{y_A} + \underline{y_C} = \underline{y_B} + \underline{y_D} \end{cases}$$

۱ سه ضلع مثلثی به معادلات $BC: 2y + 3x = 6$, $AC: y - 2x = 5$, $AB: 2y - x = 3$ هستند. معادله‌ی ارتفاع AH



$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{1}{3} \\ y_0 &= \frac{1}{3} \\ m &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \left(x + \frac{1}{3} \right)$$

$$\xrightarrow{\times 9} 9y - 3 = 4x + 12$$

$$9y - 4x = 15$$

$$m_{BC} = -\frac{3}{2} \rightarrow m_{AH} = +\frac{2}{3}$$

$$(-1) \begin{cases} y - 2x = 5 \\ 2y - x = 3 \end{cases}$$

$$2y - x = 3$$

$$\begin{cases} 1 - 2y + 1x = -10 \\ 2y - x = 3 \end{cases}$$

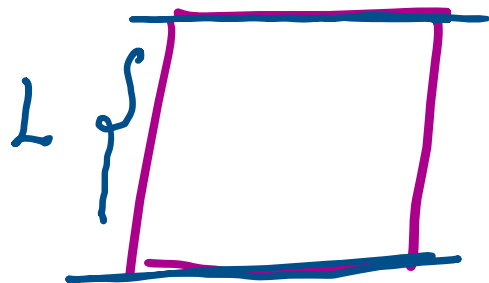
$$3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}$$

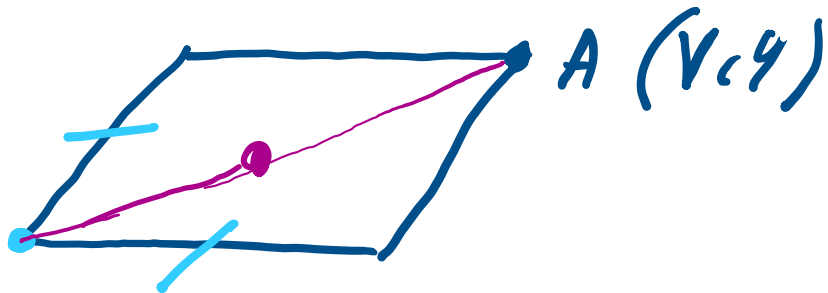
۲ دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 3 \\ x - y &= -1 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} 2x - 2y &= 3 \\ 2x - 2y &= -2 \end{aligned} \rightarrow L = \frac{5}{\sqrt{4+4}} = \frac{5}{\sqrt{8}}$$



$$S = L^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{8}} \right)^2 = \frac{25}{8}$$

۳ نقطه‌ی $A(7, 6)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $3y + 4x = 8$ و $2y - 3x = 11$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟



$$(-3) \quad \begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4y + 9x = -33 \\ 4y + 1x = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4y + 9x = -33 \\ 4y + 1x = 14 \end{cases}$$

$$14x = -17 \rightarrow x = -1$$

$$y = 6$$

$$M \quad \begin{cases} x_m = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7 - 1}{2} = 3 \checkmark \\ y_m = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5 \end{cases}$$

۴) یک خط از دسته خطوط به معادله $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$ بر خط گذرنده بر دو نقطه $(2, -1)$ و $(8, 3)$ عمود است، معادله آن خط کدام است؟

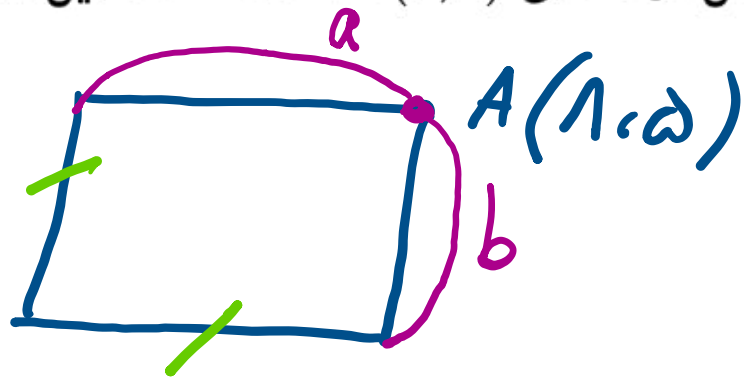
$$m = -\frac{2k}{k+1}$$

$$m = \frac{3+1}{1-2} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$\frac{-4}{1} = +\frac{k+1}{2k} \rightarrow -4k = k+1 \rightarrow -4k - k = 1 \rightarrow -5k = 1 \rightarrow k = -\frac{1}{5}$$

$$k = -\frac{1}{5} \rightarrow 4y + 2x - 1 = 0 \rightarrow 2y + x - \frac{1}{2} = 0$$

دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2x - y = 7$ و $2y + x = 6$ و یک رأس آن نقطه‌ی $A(1, 5)$ است. مساحت این مستطیل



$$2x - y - 7 = 0 \rightarrow L_1 = \frac{|1 \cdot 5 - 7|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$x + 2y - 6 = 0 \rightarrow L_2 = \frac{|1 + 10 - 6|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

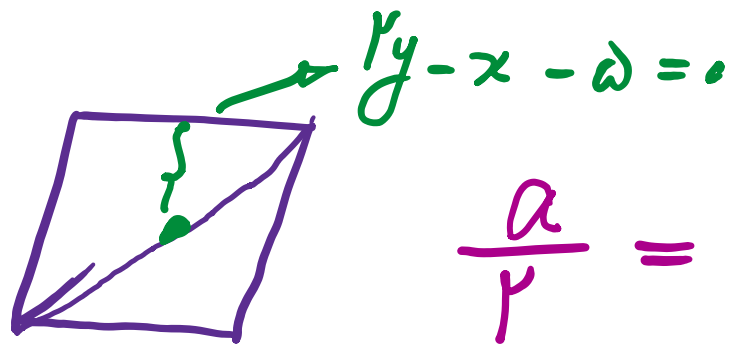
$$S = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{5}{\sqrt{5}} = 2$$

۶ مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(۲, ۵)$ ، $B(۳, ۰)$ و $C(۰, ۲)$ کدام است؟

$$S = \frac{1}{2} \left| x_A (y_B - y_C) + x_B (y_C - y_A) + x_C (y_A - y_B) \right|$$

$$\rightarrow S = \frac{1}{2} \left| ۲(۰ - ۲) + ۳(۲ - ۵) + ۰ \right| = \frac{1}{2} (۱۳) = \frac{۷}{۲}$$

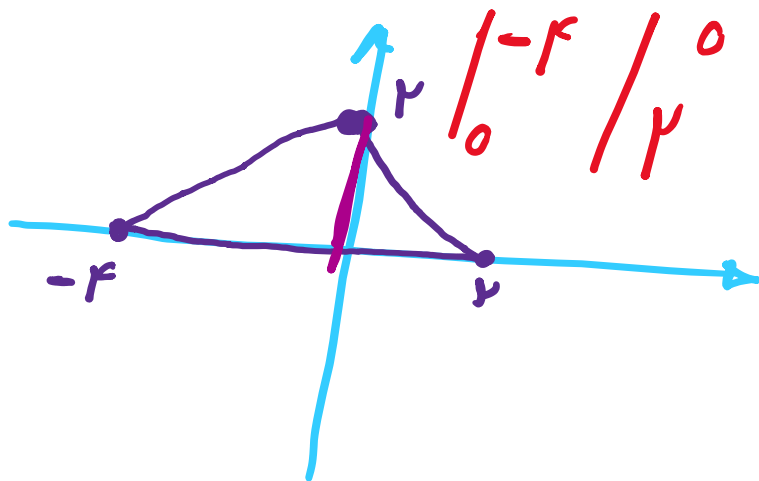
نقطه‌ی $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع، کدام است؟



$$\frac{a}{2} = \frac{|-1 - 3 - 5|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \rightarrow a = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow s = a^2 = \left(\frac{10}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{10 \times 10}{5} = 10$$

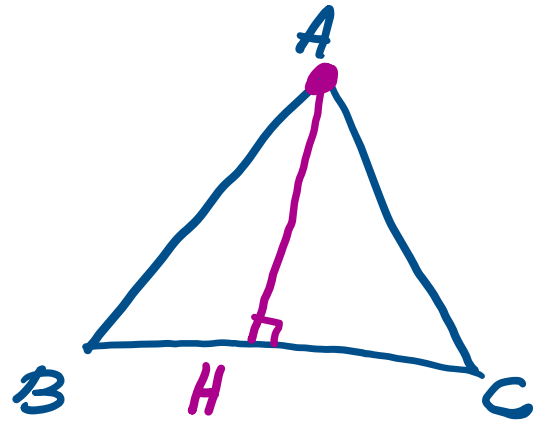
مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوطی به معادلات $y + x = 2$ و $2y - x = 4$ و ضلع دیگر آن بر محور x قرار دارد کدام است؟



$$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot a$$

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

۹ اگر $A(-1, 2)$ ، $B(3, 0)$ و $C(1, -2)$ سه راس مثلث ABC باشند، معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع BC از راس A کدام است؟



$$\begin{aligned} x_0 &= -1 \\ y_0 &= 2 \\ m &= -1 \end{aligned}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = -1(x + 1)$$

$$y - 2 = -x - 1 \rightarrow y = -x + 1$$

$$m_{BC} = \frac{0 + 2}{1 - 3} = \frac{2}{-2} = -1 \rightarrow m_{AH} = 1$$

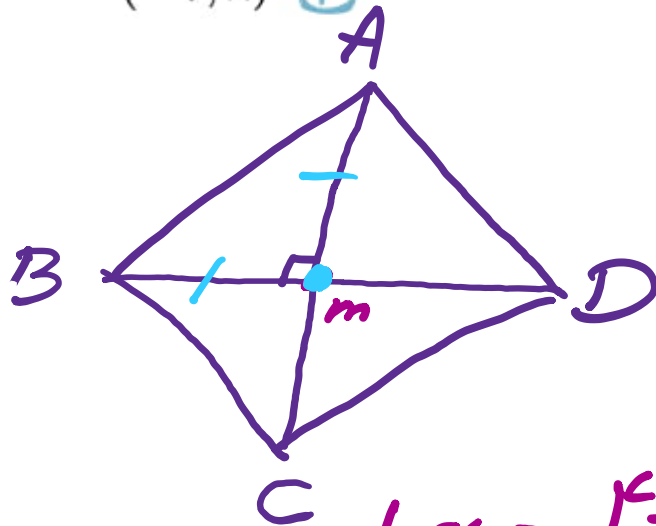
۱۰ در لوزی $ABCD$ دو رأس $A \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix}$ مقابل هم هستند. کدام نقطه مختصات رأس B نمی تواند باشد؟

$(-1, 8)$ ۴

$(3, -4)$ ۳

$(2, -1)$ ۲

$(0, 4)$ ۱



$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \\ m = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

A, C $\hookrightarrow$

$$\begin{cases} x = \frac{4-2}{2} = 1 \\ y = \frac{3+1}{2} = 2 \end{cases}$$

$$m_{AC} = \frac{3-1}{4+2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۱۱ مساحت مثلثی با رئوس $A(1, 1)$ و $B(2, 3)$ و $C(k, -1)$ برابر ۳ است. مقادیر k کدام اند؟

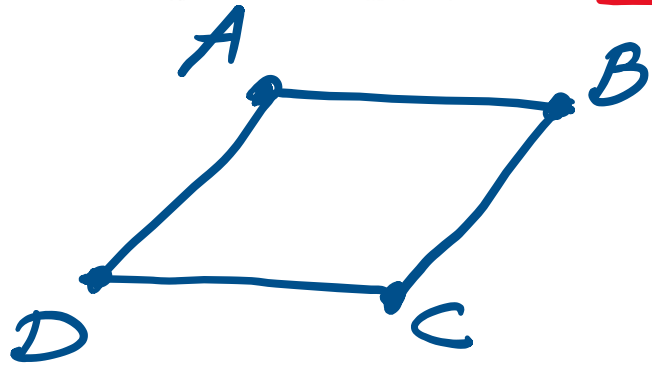
$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$3 = \frac{1}{2} |1 + 2(-1) + k(-1)| \rightarrow |1k| = 4$$

$$|x| = a \rightarrow x = \pm a$$

$$1k = \pm 4 \rightarrow k = \pm 4$$

۱۲) نقاط $A \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}$ ، $B \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} -3 \\ -2 \end{vmatrix}$ سه رأس متوازی الاضلاع $ABCD$ هستند. مجموع طول و عرض مختصات رأس D آن کدام است؟



$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

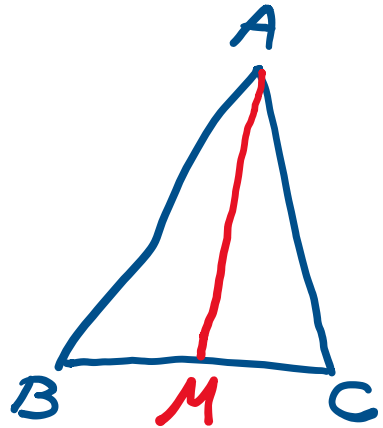
$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

$$3 - 3 = -2 + x_D \rightarrow x_D = 2$$

$$4 - 2 = 1 + y_D \rightarrow y_D = 1$$

$$x_D + y_D = 3$$

۱۳ در مثلث ABC به رئوس $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ، $B \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ و $C \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ، امتداد میانه AM محور طول‌ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟



$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= 2 \\ m &= -1 \end{aligned}$$

$$y - 2 = -1(x - 0)$$

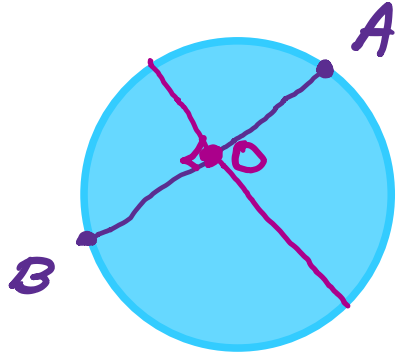
$$y = -x + 2$$

When $y = 0$, $x = 2$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-1}{2} = 0 \\ y &= \frac{2+2}{2} = 2 \end{aligned}$$

$$m_{AM} = \frac{2-2}{1-0} = \frac{-1}{1} = -1$$

۱۴) نقاط $A \begin{vmatrix} ۲ \\ ۳ \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} -۱ \\ -۵ \end{vmatrix}$ روی محیط یک دایره واقع هستند. معادله قطری از دایره که بر پاره خط AB عمود است،



$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ y_0 = -1 \\ m = -\frac{3}{1} \end{cases}$$

$$y + 1 = -\frac{3}{1} \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

$$\xrightarrow{\times 14} 14x + 14y = -13$$

$$m_{AB} = \frac{3 + 5}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2-1}{2}}{\frac{3-5}{2}} &= \frac{1}{2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

دو نقطه روی خط به معادله $x - y = 1$ قرار دارند که فاصله آن‌ها از خط به معادله $2x + 3y = 6$ برابر $\sqrt{13}$ است. مجموع عرض این دو نقطه کدام است؟

$$\begin{cases} x = a \\ y = a - 1 \end{cases}$$

$$2x + 3y - 6 = 0$$

$$L = \frac{|2a + 3(a-1) - 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|5a - 9|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$\rightarrow |5a - 9| = 13$$

$$\begin{cases} 5a - 9 = 13 \rightarrow a = \frac{22}{5} \rightarrow a - 1 = \frac{17}{5} \\ 5a - 9 = -13 \rightarrow a = -\frac{4}{5} \rightarrow a - 1 = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a - 9 = -13 \rightarrow a = -\frac{4}{5} \rightarrow a - 1 = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

$$\frac{17}{5} - \frac{9}{5} = \frac{8}{5}$$

فاصله دو خط موازی $y = \frac{a}{6}x + 4$ و $y = -\frac{b}{3}x - 1$ برابر ۳ است. حاصل ab کدام است؟

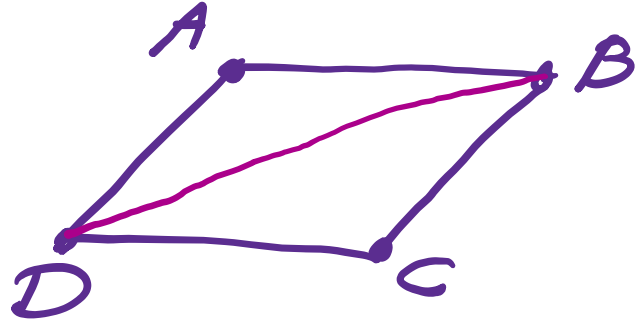
$$\frac{a}{6} = \frac{-b}{3} \rightarrow a = -2b \rightarrow b = -\frac{a}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{6}x - y + 4 &= 0 \\ \frac{a}{6}x - y - 1 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \frac{d}{\sqrt{\frac{a^2}{36} + 1}} = 5 \rightarrow \sqrt{\frac{a^2}{36} + 1} = \frac{d}{5}$$

$$\rightarrow \frac{a^2}{36} + 1 = \frac{25}{9} \rightarrow \frac{a^2}{36} = \frac{14}{9} \rightarrow \frac{a}{6} = \frac{\sqrt{14}}{3} \rightarrow a = 2\sqrt{14}$$

$$\rightarrow ab = -32$$

۱۷) نقاط $A(۲, ۳)$ ، $B(۴, ۱)$ و $C(۸, ۲)$ سه رأس متوازی الاضلاع $ABCD$ هستند، طول قطر BD کدام است؟



$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

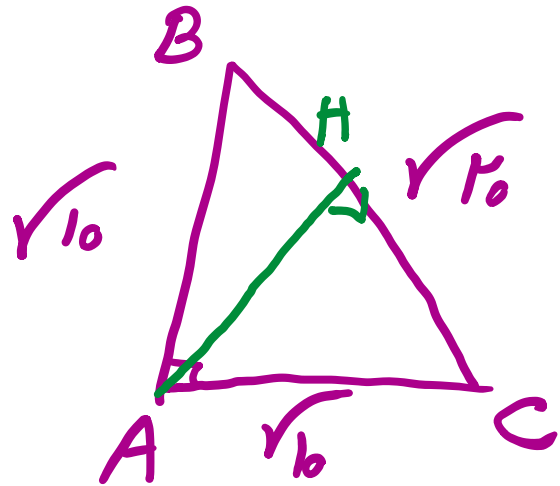
$$2 + 1 = 4 + x_D \rightarrow x_D = -1$$

$$3 + 2 = 1 + y_D \rightarrow y_D = 4$$

$$BD = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

۱۸ در مثلث بارئوس $A \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix}$ اندازه ارتفاع وارد بر بزرگ ترین ضلع کدام است؟

$$AB = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \quad AC = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \quad BC = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$



$$S = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot \sqrt{20}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 5$$

$$\frac{1}{2} \cdot AH \cdot \sqrt{20} = 5 \rightarrow AH = \frac{10}{\sqrt{20}} \times \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}} = \frac{10\sqrt{20}}{20} = \sqrt{5}$$

مجموع طول نقاطی که روی خط $y = 2x - 3$ قرار دارند و فاصله آنها از خط $5x + 2y = 11$ برابر $\sqrt{29}$ باشد

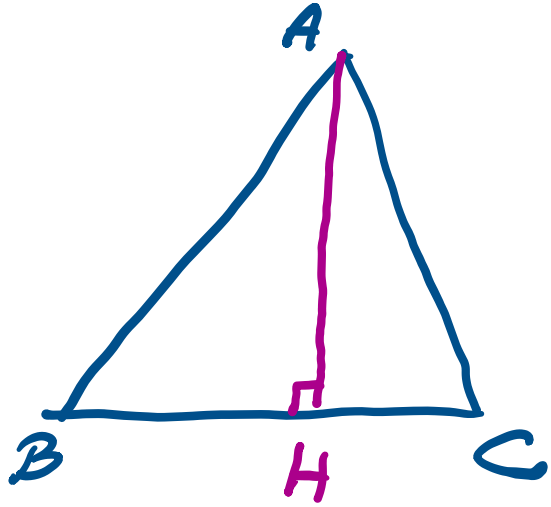
$$\begin{aligned} x &= a \\ y &= 2a - 3 \end{aligned} \quad 5x + 2y - 11 = 0$$

$$L = \frac{|5a + 2(2a - 3) - 11|}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = \sqrt{29} \rightarrow |9a - 14| = 29$$

$$\begin{aligned} 9a - 14 &= 29 \rightarrow a_1 = \frac{43}{9} \\ 9a - 14 &= -29 \rightarrow a_2 = -\frac{15}{9} \end{aligned}$$

$$a_1 + a_2 = \frac{28}{9}$$

۲۰ اگر نقاط $A(2, 1)$ و $B(0, -1)$ و $C(4, -4)$ رئوس مثلث ABC باشند، مختصات محل برخورد ارتفاع AH و ضلع BC



مقادیر AH و BC مستقیم
 $\rightarrow$ دستگاه

$$\begin{cases} x = \frac{1}{25} \\ y = -\frac{31}{25} \end{cases}$$