

آموزش حسابان یازدهم

مسائل معادلات گویا

(فصل اول – درس سوم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۱- استخری دو شیر آب A و B دارد. در صورتی که شیر A استخر را ۳ ساعت زودتر از استخر B پر کند و بدانیم اگر دو شیر آب باهم باز باشند استخر در ۲ ساعت پر می‌شود، شیر B به تنهایی استخر را در چند ساعت پر می‌کند؟

$$\begin{array}{lcl}
 B \xrightarrow{t} \text{هر ساعت} \frac{1}{t} & & A+B \xrightarrow{2} \text{هر ساعت} \frac{1}{2} \\
 A \xrightarrow{t-3} \text{هر ساعت} \frac{1}{t-3} & &
 \end{array}$$

$$\frac{1}{t-3} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{t + t - 3}{t(t-3)} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow t^2 - \sqrt{t} + 6 = 0 \rightarrow \begin{array}{l} t=1 \\ t=6 \end{array}$$

۲- کارگر A کاری را در ۳ روز و کارگر B همان کار را در ۶ روز انجام می‌دهد. اگر دو کارگر باهم کار کنند، کار در چند روز تمام می‌شود؟

A $\frac{1}{3}$ افزایش

B $\frac{1}{6}$ روان

روشهای

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

۲

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۳- گلدانی نقره داریم که نسبت وزن نقره‌ی خالص به وزن مس خالص آن برابر ۸ است استاد قلم‌کار آن را ذوب کرده و ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کرده و گلدان جدیدی می‌سازد. اگر $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید نقره باشد، این گلدان قبل ذوب شدن چه وزنی داشته است؟

$$\text{وزن مس} = x \rightarrow \text{وزن نقره} = 1x \rightarrow \boxed{\text{وزن کل} = x + 1x = 9x}$$

$$\text{وزن جدید} = 9x + 100$$

$$\frac{4}{5} (9x + 100) = 1x \xrightarrow{\times 5} 4(9x + 100) = 5x \rightarrow 36x + 400 = 5x \rightarrow x = 100$$

$$\text{وزن} = 9x = 9 \times 100 = 900$$

۴- هنگامی که دو چاپگر باهم کار می‌کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می‌شود. اگر چاپگر قدیمی‌تر به تنهایی برای این کار، ۳ ساعت زمان بیشتری نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در این صورت هر کدام از چاپگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می‌کنند؟

$$\begin{array}{l} \text{جدید} = x \xrightarrow{\text{هر ساعت}} \frac{1}{x} \\ \text{قد} = x+3 \xrightarrow{\text{هر ساعت}} \frac{1}{x+3} \end{array} \quad \text{کل = ۴} \xrightarrow{\text{هر ساعت}} \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4} \xrightarrow{4x(x+3)} 4(x+3) + 4x = x(x+3)$$

$$\rightarrow x^2 - 5x - 12 = 0 \quad \Delta = 13 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{جدید} = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \rightarrow \text{قد} = 3 + \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۵- شخص A کاری را ۲۰ روز زودتر از شخص B انجام می‌دهد. اگر این دو نفر با هم کار کنند، کار ۱۶ روز زودتر از حالتی که شخص A به تنهایی کار می‌کرد تمام می‌شد. شخص B به تنهایی کار را در چند روز انجام می‌دهد؟

$$A : x \xrightarrow{\text{روزانه}} \frac{1}{x}$$

$$B : x + 10 \xrightarrow{\text{روزانه}} \frac{1}{x + 10}$$

$$\text{کماری} : x - 14 \xrightarrow{\text{روزانه}} \frac{1}{x - 14}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 10} = \frac{1}{x - 14} \xrightarrow{x(x + 10)(x - 14)} (x + 10)(x - 14) + x(x - 14) = x(x + 10)$$

$$\xrightarrow{x^2 - 14x - 140 = 0} (x + 10)(x - 24) = 0 \xrightarrow{x = 24}$$

$$B : x + 10 = 24 + 10 = 34$$

۶- صد کیلو گرم محلول آب و شکر با غلظت ۲۰٪ موجود است اگر نیمی از آب آن را تبخیر کنیم، چند کیلو گرم باید شکر اضافه کنیم تا غلظت آن ۴۰٪ گردد؟

$$\begin{array}{c}
 \text{۲۰٪} \xrightarrow{100 \text{ kg}} \left\{ \begin{array}{l} 20 \text{ kg} \\ 100 \text{ kg} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{شکر}} \begin{array}{l} 20 \text{ kg} \\ 40 \text{ kg} \end{array}
 \end{array}$$

$$\frac{20}{100} = \frac{20 + x}{40 + x} \rightarrow x = \frac{20}{3}$$

۷- دو شیر آب A و B به یک استخر متصل‌اند. اگر فقط یکی از شیرها باز باشد، شیر A استخر را ۲ ساعت زودتر از شیر B پر می‌کند. چنانچه دو شیر را باهم باز کنیم، آنگاه استخر در ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه پر می‌شود. اگر شیر B به تنهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پر می‌شود؟

$$A: \frac{1}{x-2} \quad \text{سرعت}$$

$$B: \frac{1}{x} \quad \text{سرعت}$$

$$1 + \frac{20}{60} = \frac{4}{3} \quad \text{سرعت}$$

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x} = \frac{4}{3} \quad \times 3x(x-2) \rightarrow 3x + 3(x-2) = 4x(x-2)$$

$$3x^2 - 14x + 1 = 0 \quad \Delta$$

$$x = 4 \quad \checkmark$$

$$x = \frac{1}{3} \quad \times$$

$$B: x \rightarrow 4 \quad \checkmark$$

۸- دو کارگر وقتی باهم کار می‌کنند، کاری را در ۱۲ روز انجام می‌دهند. ولی اگر به تنهایی کار می‌کردند نفر اول ۱۰ روز زودتر از نفر دوم کار را تمام می‌کرد. کارگر دوم به تنهایی کار را در چند روز تمام می‌کند؟

$$\begin{array}{l} A \text{ نفر} = x - 10 \xrightarrow{\text{روزانه}} \frac{1}{x-10} \\ B \text{ نفر} = x \xrightarrow{\text{روزانه}} \frac{1}{x} \end{array} \quad \text{همکاری} = 12 \xrightarrow{\text{روزانه}} \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{1}{12} \xrightarrow{x(x-10)12} 12(x-10) + 12x = x(x-10)$$

$$\rightarrow x^2 - 34x + 120 = 0 \rightarrow (x-10)(x-12) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x = 10 \checkmark \\ x = 12 \times \end{array}$$

$$B: x \rightarrow 12$$

۹- مخزن آبی دو شیر دارد. اگر یکی از شیرها را باز کنیم در ۳۰ دقیقه ۱۰۰۰ لیتر آب را تخلیه می‌کند. اگر دو شیر را با هم باز کنیم ۱۰۰۰ لیتر آب در ۱۰ دقیقه تخلیه می‌شود. اگر شیر دوم را به تنهایی باز کنیم، در چند دقیقه ۱۰۰۰ لیتر آب تخلیه خواهد شد؟

$$\begin{array}{l}
 A : \frac{1}{30} \xrightarrow{\text{هر دقیقه}} \frac{1}{30} \\
 B : x \xrightarrow{\quad} \frac{1}{x}
 \end{array}
 \qquad
 \frac{1}{10} \xrightarrow{\text{همکاری}} \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{x} = \frac{1}{10} \xrightarrow{\times x} x + \frac{1}{30} = \frac{x}{10} \xrightarrow{\quad} \frac{1}{30}x = \frac{x}{10}$$

$$\xrightarrow{\quad} x = 15$$

۱۰- مادری تعدادی شکلات را بین خودش و اعضای خانواده‌اش به طور مساوی تقسیم می‌کند، اما برای این که به هر نفر تعداد بیشتری شکلات برسد، سهم خودش را می‌بخشد و بار دیگر همه شکلات‌ها را بین اعضای خانواده‌اش به طور مساوی تقسیم می‌کند که در این صورت سهم هر فرد $\frac{1}{6}$ بیشتر می‌شود. تعداد اعضای خانواده (به همراه مادر) چند تاست؟

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6}n(n-1) \rightarrow \frac{1}{6}n - \frac{1}{6}(n-1) = \frac{1}{6}n(n-1) \rightarrow n^2 - n - 6 = 0$$

$$(n-3)(n+2) \rightarrow \begin{array}{l} n=3 \\ n=-2 \end{array}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۱- یک زمین کشاورزی را دو شخص A و B می‌خواهند بذر بکارند. اگر شخص A به تنهایی زمین را بذر بکارد ۲ ساعت زودتر از این که شخص B به تنهایی زمین را بذر بکارد، کار تمام می‌شود. اگر دو شخص با هم ۳ ساعت کار کنند برای آن که کار به اتمام برسد شخص B به تنهایی یک ساعت دیگر باید اضافه‌تر از این ۳ ساعت کار کند. شخص A به تنهایی کار را در چند ساعت به اتمام می‌رساند؟

$$A: x \xrightarrow{\text{ساعت}} \frac{1}{x}$$

$$B: x+2 \xrightarrow{\text{ساعت}} \frac{1}{x+2}$$

$$= 1 \text{ همگی}$$

$$3\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{x+2}\right) + \frac{1}{x+2} = 1 \rightarrow 3(x+2) + 4x = x(x+2)$$

$$\rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\begin{cases} x = 6 \checkmark \\ x = -1 \times \end{cases}$$

۱۲- گلدانی از جنس نقره و مس داریم که نسبت وزن نقره خالص به وزن مس خالص آن، برابر ۸ است. استاد قلمکار آن را ذوب و ۲۰۰ گرم مس به آن اضافه کرد و گلدان جدیدی ساخت. می‌دانیم $\frac{۳}{۴}$ وزن گلدان جدید، نقره است. وزن نقره به کار رفته در گلدان جدید چند گرم است؟

$$9x = \text{وزن مس} \quad 1x = \text{وزن نقره} \quad x = \text{وزن مس}$$

$$9x + 200 = \text{وزن جدید}$$

$$\frac{3}{4}(9x + 200) = 1x \rightarrow 27x + 150 = 4x \rightarrow x = 120$$

$$1x = 1x \cdot 120 = 120 = 9\% \text{ نقره}$$

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۳- دو کارگر وقتی با هم کار می‌کنند کاری را در ۱۲ ساعت ~~تمام~~ می‌کنند. اما اگر هر کدام به تنهایی کار می‌کردند کارگر اول ۱۰ روز زودتر از کارگر دوم این کار را تمام می‌کرد. کارگر دوم به تنهایی کار را در چند روز انجام می‌دهد؟

$$A: x \xrightarrow{\text{روزانه}} \frac{1}{x}$$

$$B: x+10 \xrightarrow{\text{روزانه}} \frac{1}{x+10}$$

$$12: \text{کلی} \xrightarrow{\text{روزانه}} \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{12} \xrightarrow{\times 12x(x+10)} 12(x+10) + 12x = x(x+10)$$

$$x^2 - 12x - 120 = 0 \rightarrow x = \frac{10}{1} \xrightarrow{B} 10 + 10 = 20$$

$$x = -6 \times$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۴- علی و محمد پازلی را با هم در ۲ ساعت و ۲۴ دقیقه می‌چینند. اگر علی به تنهایی در مدت ۴ ساعت آن را بچیند. محمد به تنهایی چند ساعت دیرتر از علی پازل را خواهد چید؟

$$\begin{array}{l} \text{علی} : 4 \text{ ساعت} \rightarrow \frac{1}{4} \\ \text{محمد} : x \text{ ساعت} \rightarrow \frac{1}{x} \end{array}$$

$$\text{همکاری} : 2 + \frac{24}{60} = \frac{12}{5} \text{ ساعت}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \xrightarrow{\times 12x} 12 + 3x = 5x \rightarrow 12 = 2x \rightarrow x = 6$$

$$x = 6$$

۱۵- هزینه یک سفر تفریحی یک روزه کلاسی ۷۰۰ هزار تومان است. مدرسه برای کاهش هزینه‌ها، از ۵ نفر از اولیاء دعوت کرده است و هزینه سرانه به میزان ۷ هزار تومان کاهش یافته است. تعداد افراد کلاس چند نفر است؟

$$\text{هزینه} = 700 \rightarrow \left(\frac{700}{n} - 7 \right) \times (n+5) = 700$$

$$\times n \rightarrow (700 - 7n)(n+5) = 700n$$

$$\rightarrow n^2 + 5n - 500 = 0$$

$$\begin{array}{l} n = 10 \checkmark \\ n = -150 \times \end{array}$$

$$n = 10$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۶- یک پیتزا را بین چند نفر به طور مساوی تقسیم کردیم. سپس ۲ نفر به جمع آن‌ها اضافه شده و دوباره تکه پیتزاها را به طور مساوی بین همه افراد تقسیم کردیم. در این حالت به هریک از افراد اولیه به اندازه $\frac{1}{12}$ پیتزا کم‌تر رسید. در این صورت تعداد اولیه افراد چند نفر بوده است؟

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{12}$$

$$\times 12n(n+2) \rightarrow 12(n+2) - 12n = n(n+2)$$

$$\rightarrow n^2 + 2n - 24 = 0 \rightarrow \begin{cases} n = -6 \\ n = 4 \end{cases}$$

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۷- وقتی دو چاپگر باهم کار کنند فیش حقوق کارمندان در $\frac{6}{5}$ ساعت چاپ می شود. اگر چاپگر قدیمی تر به تنهایی کار کند فیش ها ۱ ساعت دیرتر از وقتی چاپ می شود که چاپگر جدیدتر به تنهایی کار کند. چاپگر جدیدتر به تنهایی در چند ساعت، فیش ها را چاپ می کند؟

A: $x-1$ $\xrightarrow{\text{هر ساعت}} \frac{1}{x-1}$

B: x $\xrightarrow{\text{هر ساعت}} \frac{1}{x}$

کلی: $\frac{6}{5}$ $\xrightarrow{\text{هر ساعت}} \frac{5}{6}$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} = \frac{5}{6} \rightarrow 6x + 6(x-1) = 5x(x-1)$$

$$\rightarrow 5x^2 - 17x + 6 = 0$$

$$x = 3 \quad x = \frac{2}{5} \quad x = \frac{3}{5} = 1 = 2$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۸- دو شیر A و B به یک استخر متصل هستند. شیر A استخر را ۱۰ ساعت زودتر از شیر B پُر می‌کند و اگر دو شیر را با هم باز کنیم، استخر در ۱۲ ساعت پُر می‌شود. اگر شیر B به تنهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پُر می‌شود؟

$$\begin{array}{lcl}
 A: x-10 & \xrightarrow{\text{هر ساعت}} & \frac{1}{x-10} \\
 B: x & \xrightarrow{\text{هر ساعت}} & \frac{1}{x}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{lcl}
 12: \text{همکاری} & \xrightarrow{\text{هر ساعت}} & \frac{1}{12}
 \end{array}$$

$$\frac{1}{x-10} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12} \rightarrow 12x + 12(x-10) = x(x-10)$$

$$\rightarrow x^2 - 14x + 120 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = 4 \end{cases}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۹- استخری به طول ۴۰ متر موجود است. امیر طول استخر را ۲۰ ثانیه زودتر از علی شنا می‌کند. اگر آنها از دو طرف استخر به سمت یکدیگر شنا کنند، پس از ۲۴ ثانیه به همدیگر می‌رسند. سرعت علی چند متر بر ثانیه است؟

$$\begin{array}{l} \text{علی: } \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{حرانه}} x \\ \text{امیر: } \frac{1}{x-20} \xrightarrow{\text{حرانه}} x-20 \end{array}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-20} = \frac{1}{24} \rightarrow 24(x-20) + 24x = x(x-20)$$

$$\rightarrow x^2 - 44x + 480 = 0$$

$$\begin{array}{l} x = 1 \quad \times \\ x = 40 \end{array}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۲۰- یک کارگاه نجاری در یک هفته از روز شنبه، هر روز تولید خود را نصف کرده است، این کارگاه در روز دوشنبه تولیدش ۳۰۰ صندلی از روز شنبه کمتر بوده است، مجموع تولید این کارگاه از روز شنبه تا چهارشنبه چه تعداد صندلی بوده است؟

$$\overset{۰}{\text{شنبه}} = x \xrightarrow{۱} \frac{x}{2} \xrightarrow{۲} \frac{x}{4} \xrightarrow{۳} \frac{x}{8} \xrightarrow{۴} \frac{x}{16}$$

$$\overset{۰}{\text{شنبه}} - \overset{۰}{\text{دوشنبه}} = ۳۰۰ \rightarrow x - \frac{x}{4} = ۳۰۰ \rightarrow x = ۴۰۰ \checkmark$$

$$\text{تولید} = x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} = \frac{۳۱}{16} x$$

$$\text{جواب} = \frac{۳۱}{16} (۴۰۰) = ۷۷۵$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM