

آموزش حسابان یازدهم

تابع درجه دوم

(فصل اول - درس دوم)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

$$y = a(x - \underline{\alpha})^2 + \underline{\beta}$$

رأس كسبي

$$x = \alpha \quad | \quad y = \underline{\beta}$$

موقع رأس $x = \alpha$

$a > 0$ \rightarrow اوج بالا \rightarrow min

$a < 0$ \rightarrow اوج اسفل \rightarrow max

$$y = +(\underline{x-2})^2 + 1$$

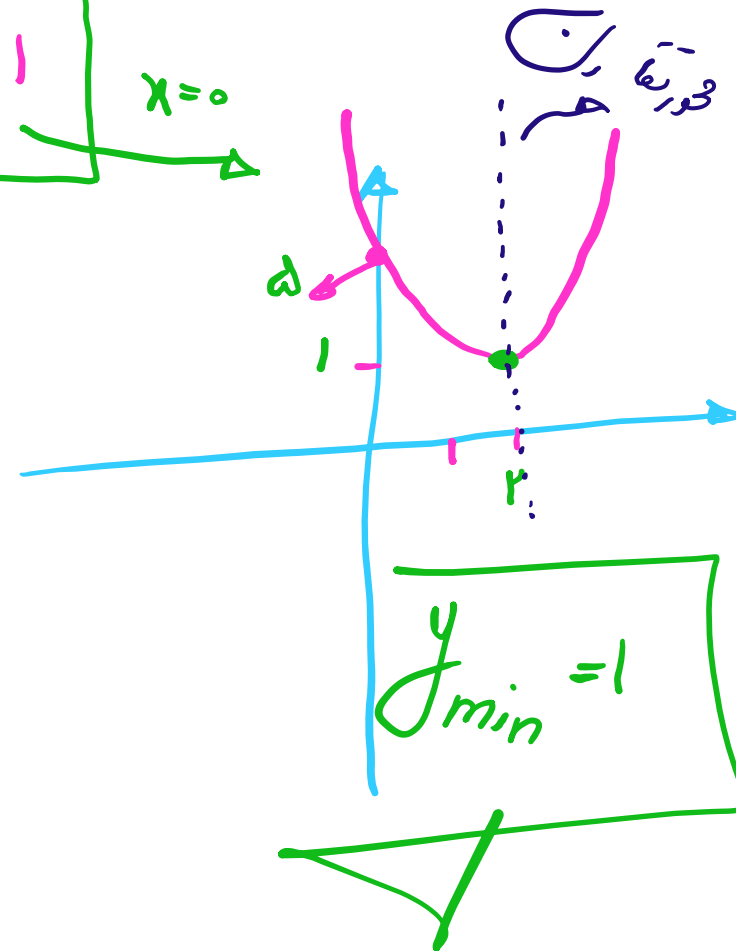
رأس كسبي

$$x = 2 \quad | \quad y = 1$$

موقع رأس $x = 2$

$a > 0$ \rightarrow بالا

معادله استاندارد سهمی



سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۹

$$y = ax^2 + bx + c$$

رأس کھنٹی

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$y = \frac{-\Delta}{4a}$$

کوتھان

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$a > 0$ بالا \rightarrow min

$a < 0$ پائس \rightarrow max

معادله شاخته سومی

$$y = x^2 - 4x + 4$$

رأس کھنٹی

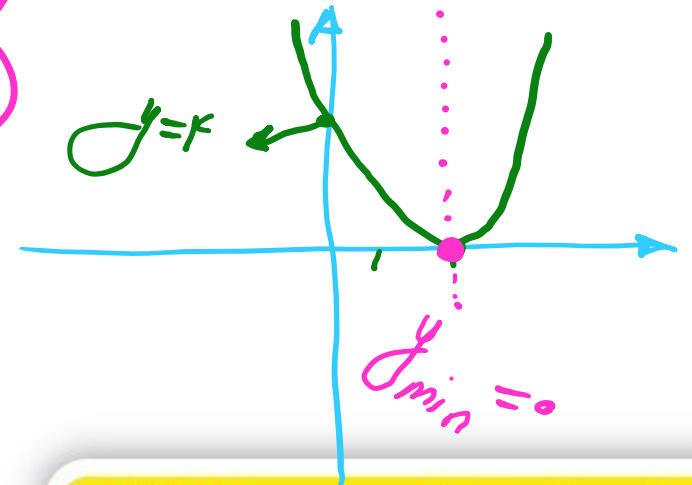
$$x = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = 4 - 4 + 4 = 0 = \frac{-(16 - 16)}{4 \times 1} = 0$$

کوتھان

$$x = 2$$

$a > 0$ بالا



سایت علی جبرا Aligebra.com

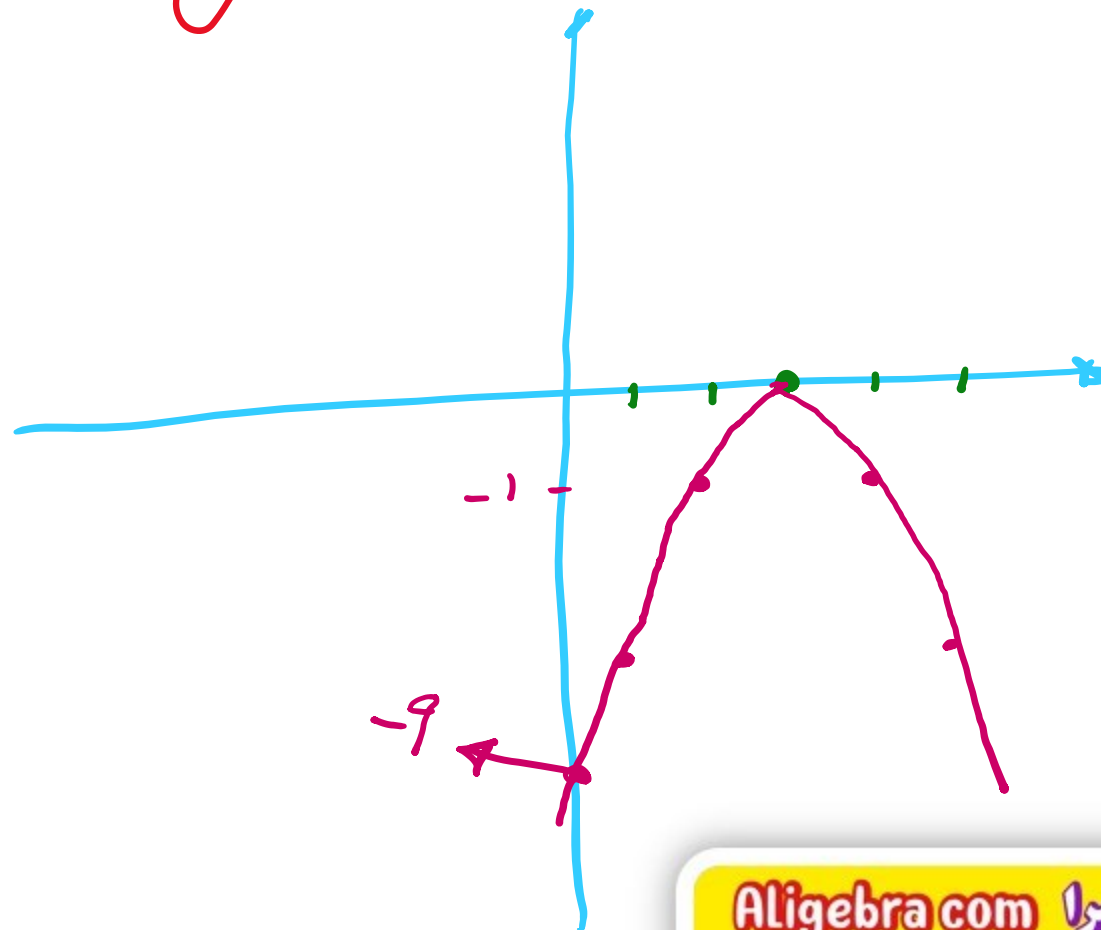
پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۴۲۸۹

$$f = -x^2 + 4x - 9$$

$$\begin{aligned} x=2 &\rightarrow y = -4 + 8 - 9 = -5 \\ x=1 &\rightarrow y = -1 + 4 - 9 = -6 \end{aligned}$$

$$1) x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$2) y = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16-36)}{-4} = 0$$

$$3) \begin{array}{c|cccccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline f & -6 & -5 & -4 & -5 & -6 \end{array}$$


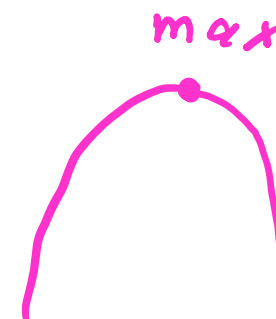
$$y = \underline{a}x^2 + bx + c$$

کمترین و بیشترین مقدار y

$\underbrace{a > 0}_{\text{min}} \rightarrow y_{\min} = \frac{-\Delta}{4a}$



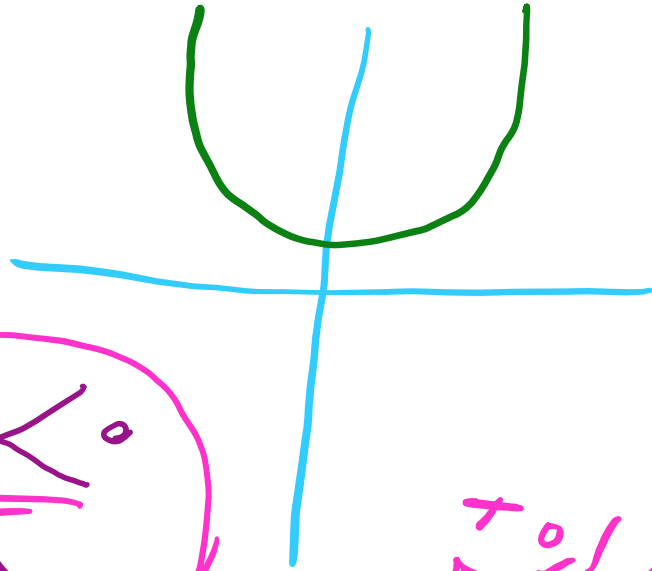
$\underbrace{a < 0}_{\text{max}} \rightarrow y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a}$



سایت علی جبرا Aligebra.com

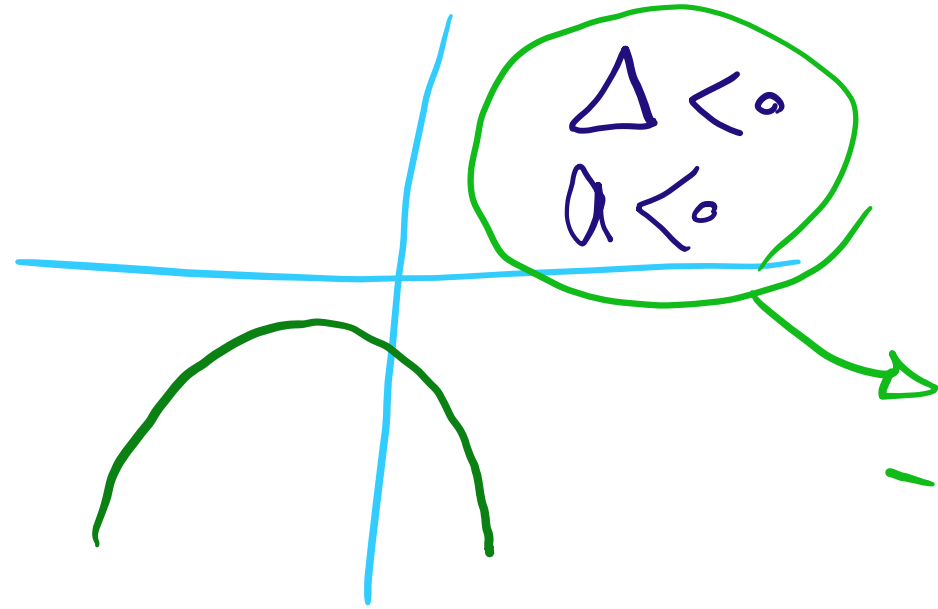
پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

همواره مثبت و همواره منفی



$$\Delta < 0$$
$$a > 0$$

همواره مثبت



$$\Delta < 0$$
$$a < 0$$

همواره -

$$y = ax^2 + bx + c \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۹

$$y = ax^2 + bx + c$$

α β
 $y=0 \rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$

$$1) \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

$$2) \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

$$3) |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

1 اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

$$f = \frac{-\Delta}{4a} = 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow 16 - 4(k+3)(k) = 0$$

$$4 - k - 3k = 0 \rightarrow -k - 3k + 4 = 0$$

$$\begin{array}{l} k = 1 \\ k = -4 \end{array}$$

$$k = -4 \rightarrow y_{\max} = 0$$

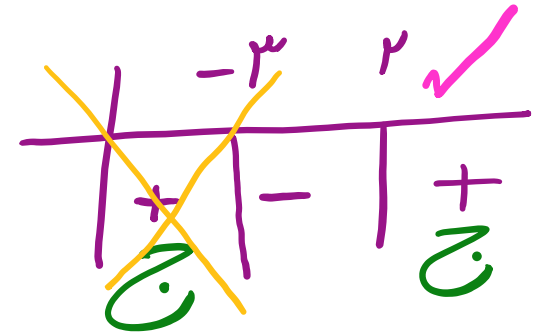
$$k = 1 \rightarrow y_{\min} = 0$$

۲) به ازای کدام مقدار m ، منحنی تابع $y = (m + 2)x^2 + 4x + m - 1$ همواره بالای محور x ‌هاست؟

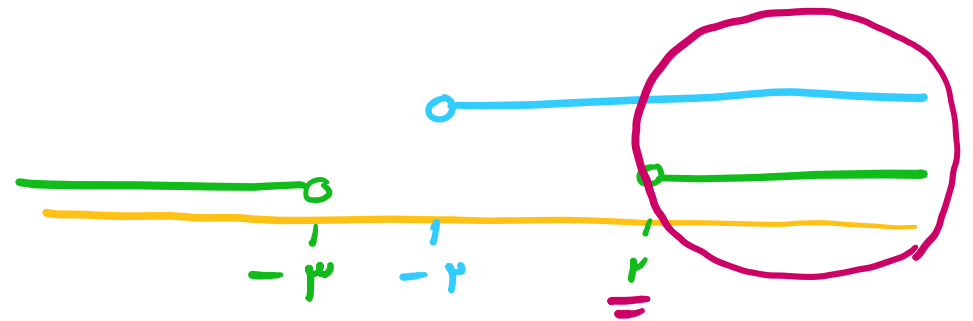
۱) $\Delta < 0 \rightarrow 16 - 4(m+2)(m-1) < 0 \rightarrow m^2 + m - 4 > 0$

$m^2 + m - 4 = 0 \rightarrow (m + 4)(m - 2) = 0$

$m = -4$
 $m = 2$



۲) $a > 0 \rightarrow m + 2 > 0 \rightarrow m > -2$



۳ اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه‌ی دوم $y = (a - 1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد، این

منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(a-1)} = 2 \rightarrow a-1 = -1 \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{-1}{2}x^2 + x + 3 = 0 \quad x(-2) \rightarrow x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

$$x = 4 \checkmark$$

$$x = -3$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۴) منحنی به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ محور طول‌ها را در ۳ و ۱ و محور عرض‌ها را در ۶ قطع کرده است.

کمترین مقدار y کدام است؟

A | $x=1$
 $y=0$

$a + b + c = 0$
 $a + b = -c$

B | $x=3$
 $y=0$

$9a + 3b + c = 0$
 $3a + b = -c$

$a = 2$
 $b = -1$

C | $x=0$
 $y=6$

$0 + 0 + c = 6$
 $c = 6$

$y_{min} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(36 - 4(2)(6))}{4 \times 2} = \frac{-14}{8} = -\frac{7}{4}$

۵ از میان مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن ۱۶ سانتی‌متر است مثلی را اختیار کرده‌ایم که مساحت آن ماکسیم است مساحت این مثلث چند سانتی‌متر مربع است؟

$$a + h = 16 \quad S = \frac{1}{2} ah$$

$$\hookrightarrow h = 16 - a \rightarrow S = \frac{1}{2} a (16 - a) = 16a - \frac{1}{2} a^2$$

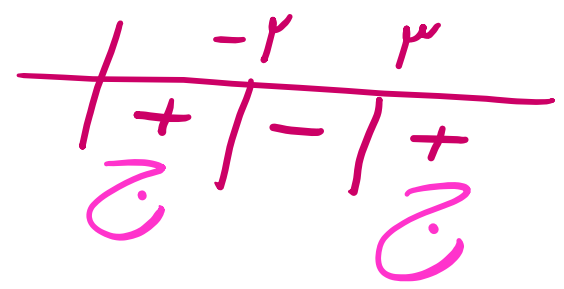
$$S = -\frac{1}{2} a^2 + 16a \quad S_{max} = \frac{-\Delta}{2a} = \frac{-(94 - 4(\frac{-1}{2})(16))}{2(\frac{-1}{2})}$$

$$S_{max} = \frac{-94}{-2} = 47$$

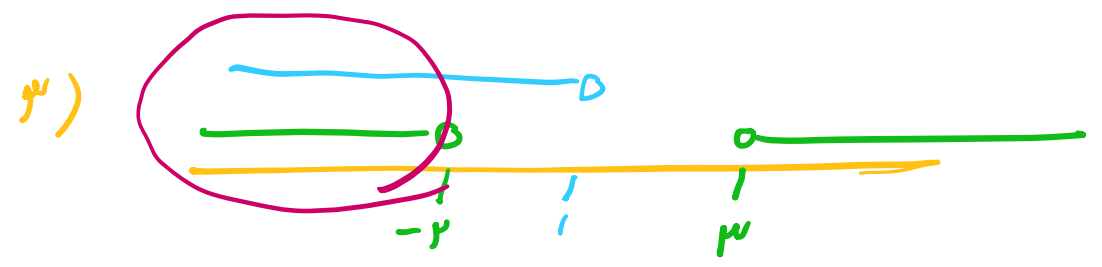
به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ ، همواره بالای محور x ها است؟

1) $\Delta < 0 \rightarrow 4 - 4(1-a)(-a) < 0 \rightarrow a^2 - a - 4 > 0$

$(a - 4)(a + 1) = 0 \rightarrow a = 4$
 $a = -1$



2) $a > 0 \rightarrow 1 - a > 0 \rightarrow a < 1$



$a < -1$

۷ محیط مستطیلی ۱۸۰ واحد است. به ازای کدام طول مستطیل مساحت آن بیشترین مقدار است؟

$$P = 2x + 2y = 180 \rightarrow x + y = 90 \rightarrow y = 90 - x$$

$$S = xy = x(90 - x) = 90x - x^2 \rightarrow S = -x^2 + 90x$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-90}{-2} = 45$$

۸) به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، سهمی به معادله $y = (1 - m)x^2 + 2(m - 3)x - 1$ همواره پایین

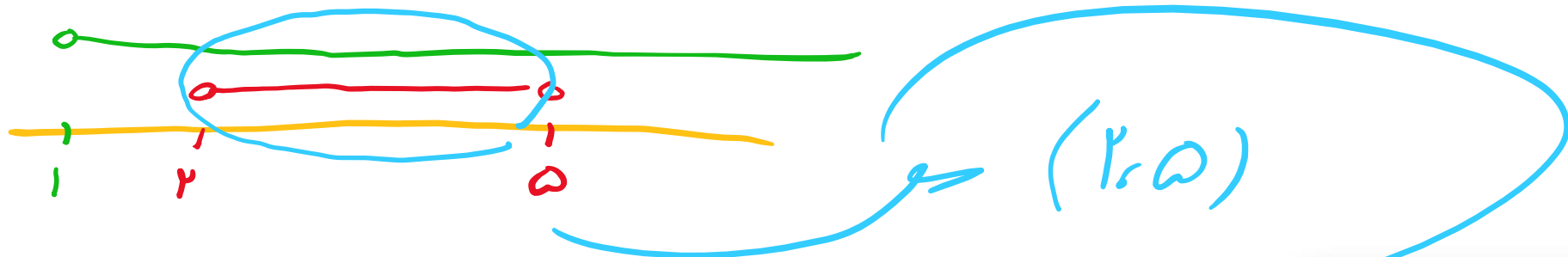
محور x ها است؟

$$1) \Delta < 0 \rightarrow (m-3)^2 - 4(1-m)(-1) < 0 \rightarrow m^2 - \sqrt{m+10} < 0$$

$$m^2 - \sqrt{m+10} = 0 \rightarrow (m-5)(m-2) = 0 \rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} & 2 & 5 & \\ \hline & + & - & + \end{array}$$

$$2) \Delta < 0 \rightarrow 1 - m < 0 \rightarrow m > 1$$

۳)



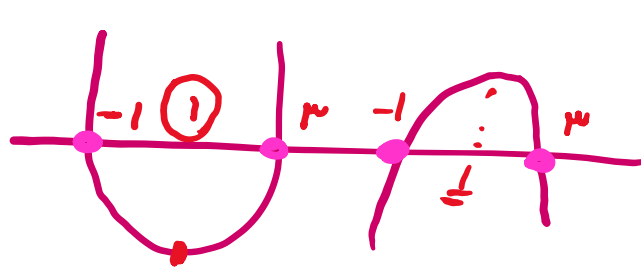
سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۹

۹ اگر رأس یک سهمی روی نیمساز ربع اول باشد و محور x ها را در دو نقطه، به طول‌های -۱ و ۳ قطع کند، آن گاه این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$y = a(x + 1)(x - 3)$$

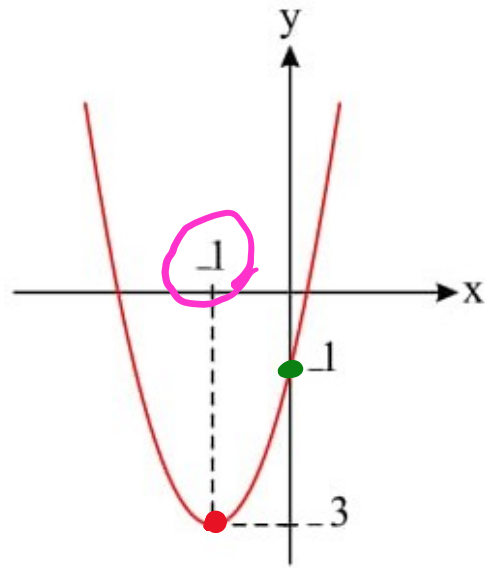


اول: $y = x$ اول: $y = x$
 دوم: $y = -x$ دوم: $y = -x$

$$\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix} \rightarrow 1 = a(2)(-2) \rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$y = \frac{-1}{4}(x+1)(x-3) \xrightarrow{x=0} y = \frac{-1}{4}(1)(-3) = \frac{3}{4}$$

۱۰ مجموع مربعات صفرهای تابع درجه دو مقابل کدام است؟



$$y = ax^2 + bx + c = \underline{2x^2 + 2x - 1}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$0 + 0 + c = -1 \rightarrow c = -1$$

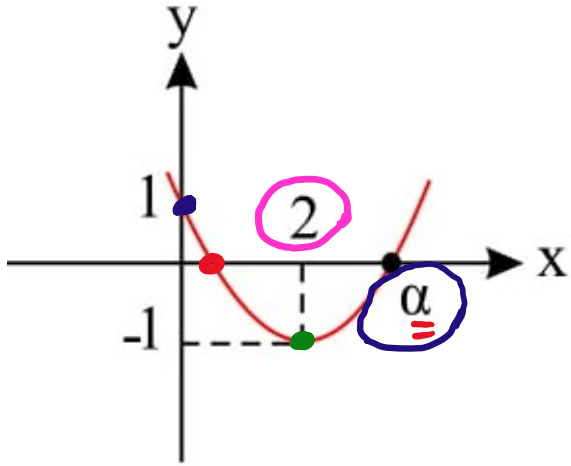
$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$a - b - 1 = -3 \rightarrow a - b = -2$$

$$x = \frac{-b}{2a} = -1 \rightarrow b = 2a$$

$$\alpha + \beta = \left(\frac{-b}{a}\right) - 2\alpha\beta = (-2) - 2\left(\frac{-1}{2}\right) = 2 + 1 = 5$$

۱۱) باتوجه به شکل روبه رو که نمودار یک تابع درجه‌ی دو را نشان می‌دهد. مقدار α کدام است؟



$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{matrix} x=0 \\ y=1 \end{matrix} \rightarrow c=1$$

$$\begin{matrix} x=2 \\ y=-1 \end{matrix} \rightarrow 4a + 2b + 1 = -1 \rightarrow 4a + 2b = -2$$

$$x = \frac{-b}{2a} = 2 \rightarrow b = -4a \rightarrow 4a - 4a = -2 \rightarrow a = \frac{1}{2} \rightarrow b = -2$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 4 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(1) = 2$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{1}$$

$$\begin{matrix} x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{matrix}$$

$$a = 2 + \sqrt{2}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۹

۱۲) اگر نقطه‌ی $S(1, -2)$ رأس سهمی $x^2 + 2ax + y + b = 0$ باشد، $a + b$ کدام است؟

$$y = -x^2 - 2ax - b$$

$$\begin{array}{l} x=1 \\ y=-2 \end{array} \rightarrow -2 = -1 - 2a - b \rightarrow \underline{2a + b = 1} \checkmark \rightarrow b = 3 \checkmark$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{2a}{-2} = 1 \rightarrow 2a = -2 \rightarrow a = -1 \checkmark$$

$$a + b = -1 + 3 = 2$$

۱۳) اگر شکل داده شده نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، آن گاه حاصل عبارت

$$A = -3a + \frac{b}{2} - c$$

کدام است؟

$$f = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$f = a(x + 1)(x - 5) \quad \begin{matrix} x=2 \\ f=11 \end{matrix} \rightarrow 11 = a(3)(-3) \rightarrow \boxed{a = -2}$$

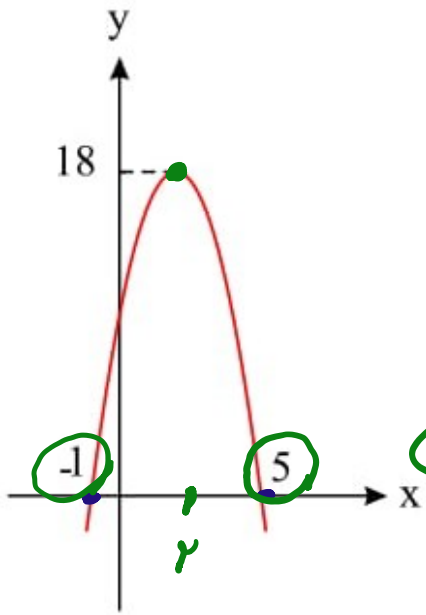
$$f = -2(x + 1)(x - 5) = -2x^2 + 1x + 10$$

$$a = -2$$

$$b = 1$$

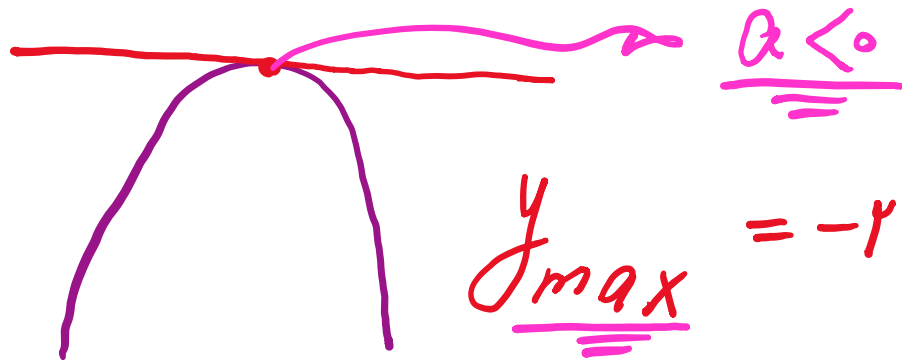
$$c = 10$$

$$\rightarrow A = +9 + 2 - 10 = 0 \quad A = 0$$



۱۴) به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر k ، خط $y = -2$ در بالاترین نقطه‌ی سهمی

$f(x) = kx^2 + 2\sqrt{2}x + k - 1$ بر سهمی مماس است؟



$$\frac{-\Delta}{2a} = -2 \rightarrow \Delta = 4a \rightarrow \cancel{1} - \cancel{2}^2 (k)(k-1) = \cancel{1}^2 k$$

$$\rightarrow 1 - k^2 + k = 2k \rightarrow k^2 + k - 2 = 0$$

$$k = 1 \quad \times$$

$$k = -2 \quad \checkmark$$

$$k = -2$$

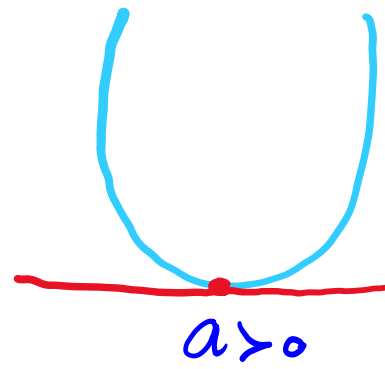
۱۵) اگر مجموع طول نقاط تلاقی سهمی $y = 2x^2 + (2 - m)x + m$ با محور x ها برابر m باشد، حاصل ضرب طول این نقاط کدام است؟

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = m \quad \frac{m-2}{2} = m \quad m = m - 2 \quad m = -2$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{m}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

۱۶ خط $y = 2$ بر نمودار تابع $y = ax^2 + 3x + (a + 2)$ در پایین ترین نقطه آن مماس است. a کدام

است؟



$$y_{\min} = 2$$

$$f = \frac{-\Delta}{4a} = 2 \rightarrow -\Delta = 1a \rightarrow -\left(\frac{9 - 4a(a+2)}{4}\right) = 1a$$

$$\rightarrow -9 + 4a^2 + 1a = 1a \rightarrow -9 + 4a^2 = 0$$

$$4a^2 = 9$$

$$a^2 = \frac{9}{4}$$

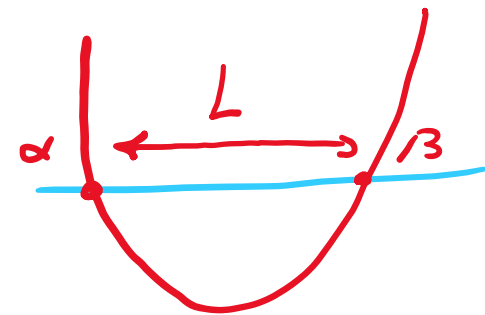
$$a = \frac{3}{2} \quad \checkmark$$
$$a = -\frac{3}{2} \quad \times$$

۱۷) محور تقارن سهمی $y = x^2 + 4x + k$ منحنی را در نقطه‌ای به عرض (-۲) قطع می‌کند. طول پاره‌خطی که

سهمی روی محور x ‌ها ایجاد می‌کند، کدام است؟

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -2 \end{array} \right\} \rightarrow -2 = 4 - 4 + k \rightarrow k = 4 \end{aligned}$$

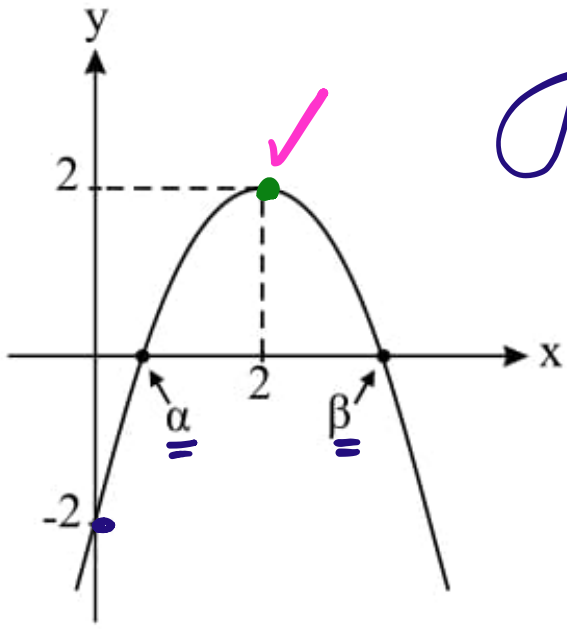


$$L = |\beta - \alpha| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{16 - 4(1)(4)}}{1} = \sqrt{0} = 0$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۹

با توجه به نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، حاصل عبارت $\alpha\beta^3 + 2\alpha^2$ کدام است؟ (۱۸)



$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \rightarrow c = -2$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \rightarrow 4a + 2b - 2 = 2 \rightarrow 2a + b = 2$$

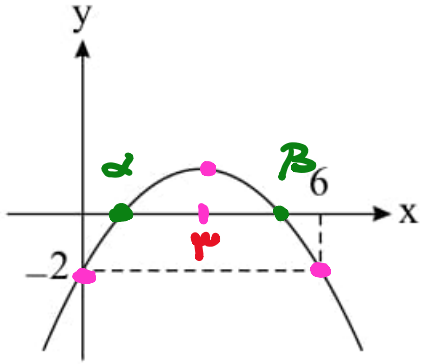
$$x = \frac{-b}{2a} = 2 \rightarrow b = -4a \rightarrow a = -1 \rightarrow b = 4$$

$$y = -x^2 + 4x - 2$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4 \\ \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \underline{\alpha\beta} \cdot \beta + 2\underline{\alpha^2} &= 2(\underline{\alpha + \beta})^2 = 2((\underline{\alpha + \beta})^2 - 2\underline{\alpha\beta}) \\ &= 2(16 - 4) = 24 \end{aligned}$$

۱۹) اگر صفرهای تابع درجه دوم زیر جملات چهارم و هشتم یک دنباله حسابی باشند، مجموع جمله دوم و دهم این دنباله حسابی کدام است؟



$$\begin{array}{l} 0 \\ -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4 \\ -2 \end{array} \rightarrow x = 3$$

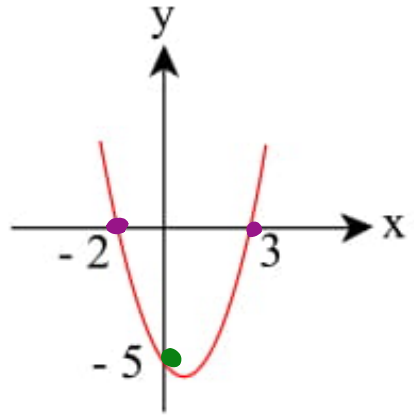
$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 3$$

$$\alpha + \beta = 6$$

$$\underbrace{a}_{4} + \underbrace{a}_{1} = 6$$

$$\underbrace{a}_{2} + \underbrace{a}_{10} = 6$$

۲۰) شکل زیر، نمودار تابع درجه‌ی دوم به معادله‌ی $y = \underline{a}x^2 + \underline{b}x + c$ را نشان می‌دهد. حاصل $a + b + c$ کدام است؟



$$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$y = a(x + 2)(x - 3) = \frac{5}{4}(x + 2)(x - 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -5 \end{array} \right\} \rightarrow -5 = a(2)(-3) \rightarrow a = 5/4$$

$$y = \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{4}x - 5 \rightarrow a + b + c = -5$$