

آموزش حسابان یازدهم

مجموع جملات دنباله حسابی و هندسی

(فصل اول - درس اول)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + (n-1)d)$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} \quad \underline{\underline{|q| < 1}}$$

۱- در یک دنباله حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی هندسی باشند. چندمین جمله‌ی این دنباله حسابی، صفر است؟

$$a_3, a_7, a_9 \rightarrow a_1 + 2d, a_1 + 6d, a_1 + 8d$$

$$a, b, c \rightarrow \begin{cases} \text{حسابی} & 2b = a + c \\ \text{هندسی} & b^2 = a \cdot c \end{cases}$$

$$(a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 8d) \rightarrow \cancel{a_1^2} + 12a_1d + 36d^2 = \cancel{a_1^2} + 10a_1d + 18d^2$$

$$2a_1d + 18d^2 = 0 \rightarrow 2d(a_1 + 9d) = 0 \rightarrow 2d \times a_{11} = 0$$

$$\rightarrow a_{11} = 0 \quad \checkmark$$

۲- در یک دنباله‌ی هندسی، «جمله‌ی دوم»، «دو برابر جمله‌ی پنجم» و «جمله‌ی هشتم» می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند، بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

$$a_2, a_5, a_8 \rightarrow a, q, \quad 2a, q^4, \quad a, q^7 \quad \xrightarrow{\text{حسابی}} \quad 2a, q^4 = a, q + a, q^7$$

$$\rightarrow a, q (q^4 - 2q^7 + 1) = 0 \quad q^7 = A \quad \rightarrow \quad A^2 - 2A + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta = 14 - 4 = 12$$

$$q^7 = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$q^7 = 1 + \sqrt{3}$$

$$q^7 = 1 - \sqrt{3}$$

$$\frac{a_8}{a_2} = \frac{a, q^7}{a, q} = q^6 = (1 + \sqrt{3})^2 = 1 + 3 + 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۳- در یک دنباله‌ی عددی، مجموع چهار جمله‌ی اول ۱۵ و مجموع پنج جمله‌ی بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله‌ی یازدهم این دنباله کدام است؟

$$\begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 30 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 4a_1 + 9d = 15 \\ 5a_1 + 10d = 30 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} a_1 = 3 \\ d = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 10 \left(\frac{1}{2} \right) = 8$$

۴- در یک دنباله‌ی عددی جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی صعودی‌اند. قدر نسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

$$a_1, a_5, a_{11}$$

$$q = \frac{11 - 5}{5 - 1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$a_m, a_n, a_k \rightarrow q = \frac{k - n}{n - m}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۵- مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی $S_n = \frac{n}{2}(4n + 2)$ به دست می‌آید. جمله‌ی هفتم این دنباله

$$S_7 - S_6 = a_7$$

$$a_7 = \frac{7}{2}(28 + 2) - \frac{6}{2}(24 + 2) = 7$$

۶- در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول آن ۱۵۳ می باشد. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟

$$S_4 = \frac{a_1 (q^4 - 1)}{q - 1} = 153$$

$$S_6 = \frac{a_1 (q^6 - 1)}{q - 1} = 136$$

$$\frac{S_4}{S_6} = \frac{\frac{a_1 (q^4 - 1)}{q - 1}}{\frac{a_1 (q^6 - 1)}{q - 1}} = \frac{q^4 - 1}{q^6 - 1} = q^2 + 1 = \frac{153}{136}$$

$$\rightarrow q^2 = \frac{1}{2} \rightarrow q = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{a_1}{a_5} = \frac{a_1}{a_1 q^4} = 16 \checkmark$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۷- اگر مجموع ۶ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی با مجموع ۱۰ جمله‌ی اول آن برابر باشد، آنگاه مجموع ۱۶ جمله اول

$$S_6 = S_{10} \rightarrow \frac{6}{2} (2a_1 + 5d) = \frac{10}{2} (2a_1 + 9d)$$

$$\rightarrow 9a_1 + 15d = 10a_1 + 45d \rightarrow 9a_1 + 15d = 0$$

$$\rightarrow 9a_1 + 15d = 0 \quad \checkmark$$

$$S_{14} = \frac{14}{2} (2a_1 + 13d) = 7(0) = 0$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۸- حاصل عبارت $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ کدام است؟

$$\frac{\frac{1 \cdot \cancel{(t^{12} - 1)}}{t - 1}}{\frac{1 \cdot \cancel{(t^3 - 1)}}{t^3 - 1}} = \frac{t^3 - 1}{t - 1} = \frac{\cancel{(t - 1)}(t^2 + t + 1)}{\cancel{t - 1}}$$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) + 1 = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{4} + \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{4} + \frac{4}{4} = 2$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۹- اگر در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع پنج جمله‌ی دوم برابر ۱۱۵ و تفاضل مجموع پنج جمله‌ی اول از مجموع پنج جمله‌ی سوم برابر ۱۵۰ باشد، جمله‌ی اول کدام است؟

$$a_{10} + a_{14} + a_{13} + a_{12} + a_{11} - a_5 - a_4 - a_3 - a_2 - a_1 = 150$$

$$(a_{10} - a_5) + (a_{14} - a_4) + (a_{13} - a_3) + (a_{12} - a_2) + (a_{11} - a_1) = 5 \cdot d = 150$$

$$\rightarrow d = 30$$

$$a_4 + a_4 + a_4 + a_4 + a_4 = 115 \rightarrow \frac{5}{1} (a_4 + a_4) = 115$$

$$\rightarrow \frac{5}{1} (a_1 + 3d + a_1 + 9d) = 115 \rightarrow a_1 = 2$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۰- در یک دنباله‌ی عددی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟

$$\frac{10}{2} (2a_1 + 19d) = 3 \times \frac{12}{2} (2a_1 + 11d) \rightarrow 2a_1 + d = 0$$

$$a_3 = 6 \rightarrow a_1 + 2d = 6 \quad d = -2a_1 \rightarrow a_1 = -2, \quad d = 4$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = -2 + 36 = 34$$

۱۱- در دو دنباله‌ی حسابی $۲, ۷, ۱۲, \dots$ و $۸, ۱۱, ۱۴, \dots$ چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

$$\begin{array}{l} ۲, ۷, ۱۲, ۱۷ \\ ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷ \end{array} \rightarrow \underline{a_1 = ۱۷}, \underline{d = ۱۵}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = ۱۷ + (n-1)15 = \boxed{15n + ۲}$$

$$۱۰۰ \leq 15n + ۲ \leq ۹۹۹ \rightarrow \frac{۹۸}{15} \leq n \leq \frac{۹۹۷}{15}$$

$$\rightarrow ۷ \leq n \leq ۶۶ \rightarrow \text{تعداد} = ۶۶ - ۷ + ۱ = ۶۰$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۲- در یک دنباله‌ی عددی مجموع پنج جمله‌ی اول ۳۳ و مجموع هفت جمله‌ی اول $\frac{۲۸۷}{۵}$ می‌باشد، قدر نسبت این دنباله

$$\sum_{i=1}^5 = ۳۳ \rightarrow \frac{۵}{۲} (۲a_1 + ۴d) = ۳۳ \rightarrow ۵a_1 + ۱۰d = ۳۳ \checkmark$$

$$\sum_{i=1}^7 = \frac{۲۸۷}{۵} \rightarrow \frac{۷}{۲} (۲a_1 + ۶d) = \frac{۲۸۷}{۵} \rightarrow ۷a_1 + ۲۱d = \frac{۲۸۷}{۵} \checkmark$$

دستگاه

$$d = 1/5$$

۱۳- مجموع n جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است، در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله‌ی هفتم و ختم به جمله‌ی هجدهم، کدام است؟

$$S_{11} - S_4 = \frac{11(11-15)}{6} - \frac{4(4-15)}{6}$$

$$\rightarrow S_{11} - S_4 = 9 + 9 = 18$$

۱۴- دنباله‌ی هندسی $\frac{1}{2}, \dots, x, 2$ غیر نزولی است. مجموع شش جمله‌ی اول آن کدام است؟

$$a, b, c \rightarrow b^2 = a \cdot c \rightarrow x^2 = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$x=1 \rightarrow q = \frac{1}{2} \quad \times$$

$$x=-1 \rightarrow q = \frac{-1}{2} \quad \checkmark$$

$$S_4 = \frac{a_1 (q^4 - 1)}{q - 1} = \frac{2 \left(\left(\frac{-1}{2} \right)^4 - 1 \right)}{\frac{-1}{2} - 1} = \frac{21}{19}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۵- در یک دنباله‌ی هندسی حاصلضرب جملات سوم تا ششم برابر ۲ است. حاصلضرب هشت جمله‌ی اول آن کدام

$$a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 = 2 \rightarrow a_1 q^2 \cdot a_1 q^3 \cdot a_1 q^4 \cdot a_1 q^5 = 2 \rightarrow a^4 q^{14} = 2$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = a^8 q^{28} = (a^4 q^{14})^2$$

جواب: $= 2^2 = 4$

۱۶- در یک دنباله‌ی هندسی صعودی به صورت $4, a, 9, b, \dots$ ، مجموع شش جمله‌ی اول کدام است؟

$$\begin{array}{l} a_1 = 4 \\ a_3 = 9 \end{array} \rightarrow \frac{a_1 q^2}{a_1} = \frac{9}{4} \rightarrow q^2 = \frac{9}{4} \xrightarrow{\text{صورت}} q = \frac{3}{2}$$

$$S_4 = \frac{a_1 (q^4 - 1)}{q - 1} = \frac{4 \left(\left(\frac{3}{2} \right)^4 - 1 \right)}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{940}{1}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۷- بین دو عدد ۳۲۴ و ۴، سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل، تشکیل یک دنباله‌ی هندسی دهند، مجموع

این ۵ عدد مثبت کدام است؟

$$\frac{4}{a_1} < \dots < \dots < \dots < \frac{324}{a_5} \rightarrow \frac{a_1 q^4}{a_1} = q^4 = \frac{324}{4} = 81$$

$$q^4 = 81 \rightarrow q = \sqrt[4]{81} = 3$$

$$S_5 = \frac{4(3^5 - 1)}{3 - 1} = 414$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۸- اگر جملات چهارم و ششم و دوازدهم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند قدر نسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

$$q = \frac{12 - 9}{9 - 4} = \frac{9}{4} = 3 \quad \checkmark$$

$$a_m, a_n, a_k \rightarrow q = \frac{k - n}{n - m}$$

۱۹- حاصل $(1 + x + x^2 + \dots + x^9)(1 - x + x^2 - \dots + x^9)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

$$\frac{1-x^9}{1-x} \times \frac{1+x^9}{1+x} = \frac{1-x^{18}}{1-x^2}$$

→ جواب = $\frac{1-(x^2)^9}{1-x^2} = \frac{1-(\sqrt{2})^9}{1-2}$

→ جواب = $\frac{1-2^4.5}{1-2}$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۲۰- در یک دنباله هندسی مجموع ۸ جمله اول $\frac{5}{4}$ مجموع ۴ جمله اول آن است، جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟

$$\frac{S_1}{S_4} = \frac{5}{4} \rightarrow \frac{\frac{a_1(q^1-1)}{q-1}}{\frac{a_1(q^4-1)}{q-1}} = \frac{(q-1)(q^4+1)}{q^4-1} = \frac{5}{4}$$

$$q^4+1 = \frac{5}{4} \rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \rightarrow q^2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 q^6}{a_1} = q^6 = (q^2)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$