

گام به گام ریاضی دوازدهم

(هندسه)

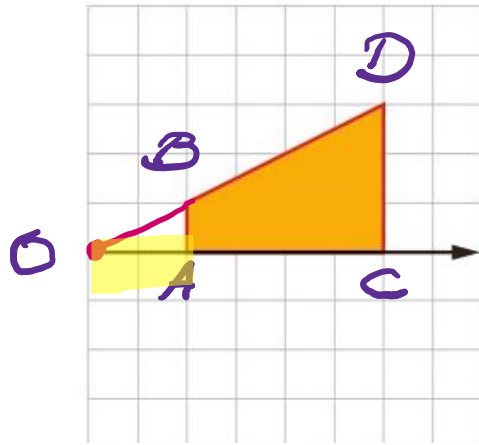
حل تمرین های فصل (۶)

علی هاشمی

۱ در شکل روبه‌رو می‌خواهیم دوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.

الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟



$$V = 11\pi - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{5\pi R^2}{3}$$

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} \rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{1}{3} \rightarrow x=2 \rightarrow OA=2$$

$$V_{\text{cylinder}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 4 = 12\pi$$

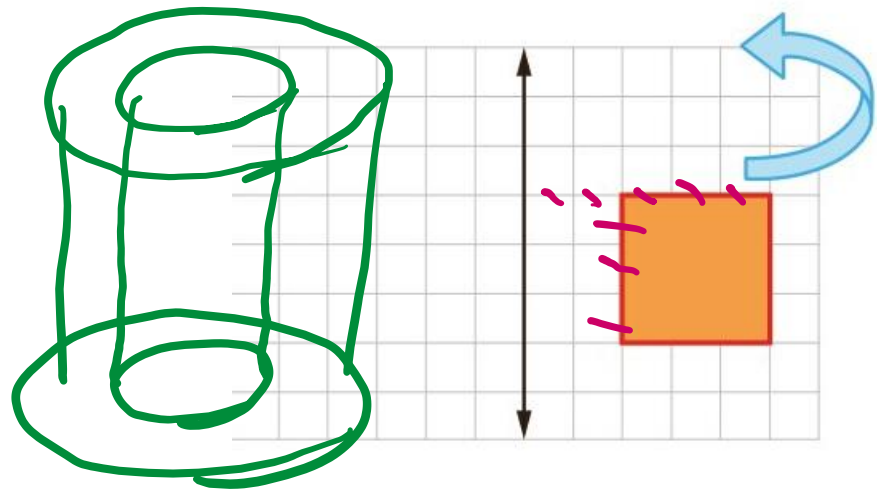
$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 1 \times 2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$S = \frac{1}{2} (2+4) \times 4 = 12$$

۲ مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل روبه‌رو در فاصله ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.

الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.

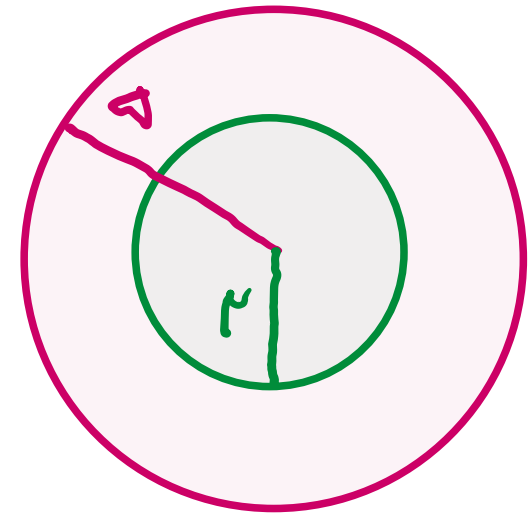
ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه‌ای موازی با قاعده آن توصیف کنید.



$$V_{\text{بزرگ}} = \pi r^2 h = \pi \times 5^2 \times 4 = 100\pi$$

$$V_{\text{کوچک}} = \pi r^2 h = \pi \times 2^2 \times 4 = 16\pi$$

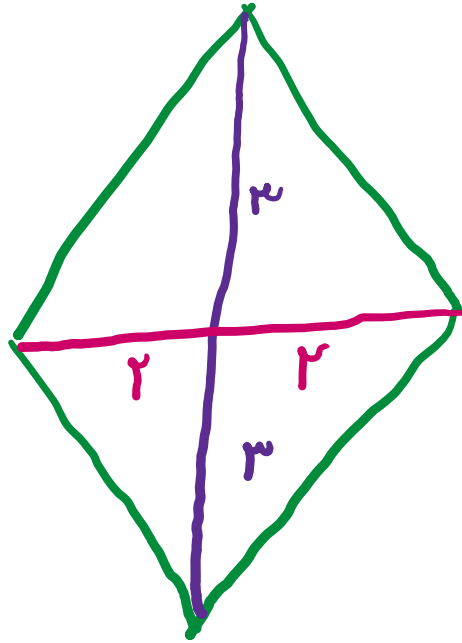
$$V = 100\pi - 16\pi = 84\pi$$



ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۳ اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟



$$V = \frac{1}{2} \pi r^2 h \times 2$$

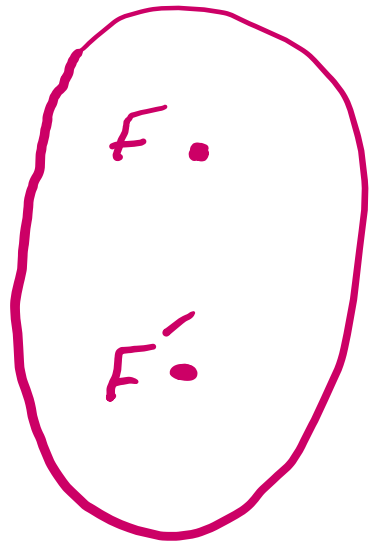
$$V = \frac{1}{2} \times \pi \times 2 \times 3 \times 2$$

$$V = 12\pi$$

۴) کانون‌های یک بیضی نقاط $(1, 3)$ و $(1, -5)$ است.

الف) فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a=6$ باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.



$$FF' = \sqrt{(1-1)^2 + (3+5)^2} = 8 \rightarrow 2c = 8 \rightarrow c = 4$$

$$b, 0 = w \quad \left| \begin{array}{l} x = \frac{1+1}{2} = 1 \\ y = \frac{-5+3}{2} = -1 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = +1 \\ y = -1 \end{array} \right.$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

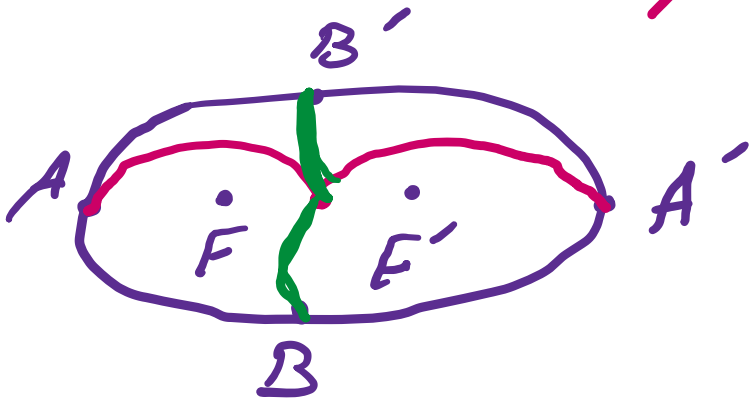
۵ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $(-4, -1)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.
 الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{4}{5} = \frac{c}{a} \rightarrow a = \frac{5}{4}c \quad / \quad 2b = 6 \rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow \frac{25}{16}c^2 = 9 + c^2 \rightarrow \frac{9}{16}c^2 = 9 \rightarrow c = 4 \rightarrow a = 5$$

$$2a = 2 \times 5 = 10 \quad / \quad 2c = 2 \times 4 = 8$$



$$\begin{array}{l} A' \quad | \quad -4+5 \\ \quad \quad | \quad -1 \\ F' \quad | \quad -4+4 \\ \quad \quad | \quad -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A \quad | \quad -4-5 \\ \quad \quad | \quad -1 \\ F \quad | \quad -4-4 \\ \quad \quad | \quad -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} B \quad | \quad -4 \\ \quad \quad | \quad -1-3 \\ B' \quad | \quad -4 \\ \quad \quad | \quad -1+3 \end{array}$$

۱ در هر دایره مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آن را پیدا کنید، محل تقاطع هر دایره را با محورهای مختصات، در صورت وجود مشخص کنید و درستی پاسخ خود را به کمک رسم دایره بررسی کنید.

الف)
$$f'_x = 0 \rightarrow 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$f'_y = 0 \rightarrow 2y + 1 = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$R = \sqrt{9 + 1 - 1} = \frac{3}{2}$$

الف) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$

ب) $x^2 + (y + 3)^2 - 4 = 0$

$x = 0 \rightarrow y^2 + 2y + 1 = 0 \rightarrow (y + 1)^2 = 0 \rightarrow y = -1$
 $y = 0 \rightarrow x^2 - 9x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4}}{2}$

ب) $0 \mid \begin{matrix} 0 \\ -3 \end{matrix}$ $R = \sqrt{4} = 2$

$x = 0 \rightarrow (y + 3)^2 = 4 \rightarrow y + 3 = \pm 2 \rightarrow y = -1, y = -5$

$y = 0 \rightarrow x^2 + 9 = 4 \rightarrow x^2 = -5 \rightarrow \text{no real solution}$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲ در حالت‌های زیر معادله دایره را بنویسید :

الف) دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(2, -1)$ باشد.

ب) دایره‌ای که مرکز آن $(2, 3)$ و نقطه $(-3, -9)$ نقطه‌ای روی آن باشد.

پ) دایره‌ای که نقاط $(0, 3)$ و $(-4, -1)$ دو سریکی از قطرهای آن باشند.

$$\text{الف) } R = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$$

$$\text{ب) } R = \sqrt{25 + 144} = 13 \rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 169$$

$$\text{پ) } D = \sqrt{14 + 14} = 2\sqrt{2} \rightarrow R = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{x+0}{2} &= -2 \\ \frac{-1+3}{2} &= 1 \end{aligned}$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۳ وضعیت نقاط $(0,0)$ و $(-1,-2)$ ، $(0,-1)$ ، $(1,0)$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ مشخص کنید.

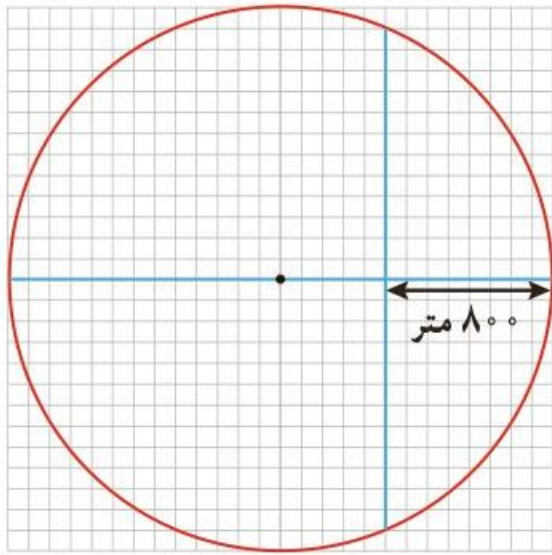
$$(1,0) \rightarrow 1 - 2 + 1 = 0 \rightarrow \text{روی دایره}$$

$$(-1,-2) \rightarrow 1 + 4 + 2 - 4 + 1 = 0 \rightarrow \text{روی دایره}$$

$$(0,-1) \rightarrow 1 - 2 + 1 = 0 \rightarrow \text{داخل دایره}$$

$$(0,0) \rightarrow 0 + 0 + 0 + 0 + 1 = 1 \rightarrow \text{خارج دایره}$$

۴ شهرداری قصد دارد در یک فضای سبز دایره‌ای شکل به شعاع ۱۳۰۰ متر، دو مسیر پیاده‌روی مطابق شکل بسازد. اگر مختصات مرکز دایره $(۱۳, ۱۳)$ و هر واحد برابر ۱۰۰ متر باشد:



الف) معادله این دایره چیست؟

ب) مختصات نقاط برخورد دو مسیر را با دایره پیدا کنید.

پ) دو مسیر در چه نقطه‌ای با یکدیگر متقاطع‌اند؟

ت) طول مسیر عمودی چقدر است؟

$$(x-13)^2 + (y-13)^2 = 169$$

$$x=11 \rightarrow 16 + (y-13)^2 = 169 \rightarrow y-13 = 12 \rightarrow y=25$$

$$y-13 = -12 \rightarrow y=1$$

$$y=13 \rightarrow (x-13)^2 = 169 \rightarrow x-13 = \pm 13 \rightarrow x=0 \text{ و } x=26$$

$$\begin{array}{c} 11 \\ 13 \end{array}$$

$$25-1=24 \rightarrow 24 \text{ م}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۵ معادله گسترده یک دایره به شکل $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آن را پیدا کنید و معادله آن را به شکل استاندارد بنویسید.

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 + 2y + 1 - 1 - 8 = 0$$

$$\rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 10 \rightarrow \left| \begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array} \right|$$
$$\left| R = \sqrt{10} \right|$$

۶ وضع خط‌های زیر را نسبت به دایره مشخص کنید.

الف) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ و $6x + 4y = 0$

ب) $x^2 + y^2 = 2$ و $y = -x - 2$

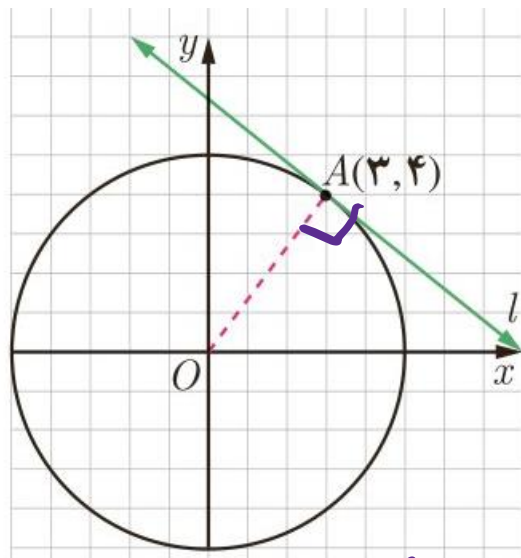
$x + y + 2 = 0$

الف) $\frac{0}{2} \quad R = \sqrt{4 + 4 - 7} = 1 \quad L = \frac{|12 + 11|}{\sqrt{36 + 16}} = \frac{10}{\sqrt{52}}$

$L > R \rightarrow$ تقاطع ندارد.

ب) $\frac{0}{0} \quad R = \sqrt{2} \quad L = \frac{|0 + 0 + 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{2}$

$L = R \rightarrow$ خط بر دایره مماس است



۷ اگر بدانیم خط l در نقطه $(3,4)$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات مماس است، معادله خط مماس چیست؟

۰/۰ A/r

$$m_{OA} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3} \longrightarrow \text{شیب خط} = -\frac{3}{4}$$

$$y-4 = -\frac{3}{4}(x-3) \longrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۸ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن، نقطه $(0, 3)$ و بر خط $3x - 4y = 3$ مماس باشد.

$$R = \frac{|0 - 12 - 3|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$(x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

۹ مشخص کنید در حالت‌های زیر دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

الف) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ و $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 9$

$O_1 / -2$

$R_1 = \sqrt{1 + 1 + 4} = 3$

$O_1 O_2 = \sqrt{4 + 14} = 2\sqrt{5}$

$O_2 / 2$

$R_2 = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}$

$|R_1 - R_2| < O_1 O_2 < R_1 + R_2$ متقاطع

ب) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 7$ و $x^2 + (y-5)^2 = 5$

$O_1 / 2$

$R_1 = \sqrt{7}$

$O_1 O_2 = \sqrt{4 + 48} = \sqrt{52}$

$O_2 / 5$

$R_2 = \sqrt{5}$

$O_1 O_2 > R_1 + R_2$

متصل نیست

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۰ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-1, -1)$ و با دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ مماس درون باشد.

$$O / \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \rightarrow R = \sqrt{2 + 9 + 3} = 4$$

$$OO' = \sqrt{4 + 14} = 5 \rightarrow |R_1 - R_2| = 5$$

$$|R_1 - 4| = 5 \rightarrow R_1 - 4 = 5 \rightarrow R_1 = 9 \quad \checkmark$$

$$|R_1 - 4| = 5 \rightarrow R_1 - 4 = -5 \rightarrow R_1 = -1 \quad \times$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی جیبرا سایت تخصصی ریاضی فیزیک

WWW.ALICEBRA.COM



۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱
۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

