

گام به گام ریاضی دوازدهم

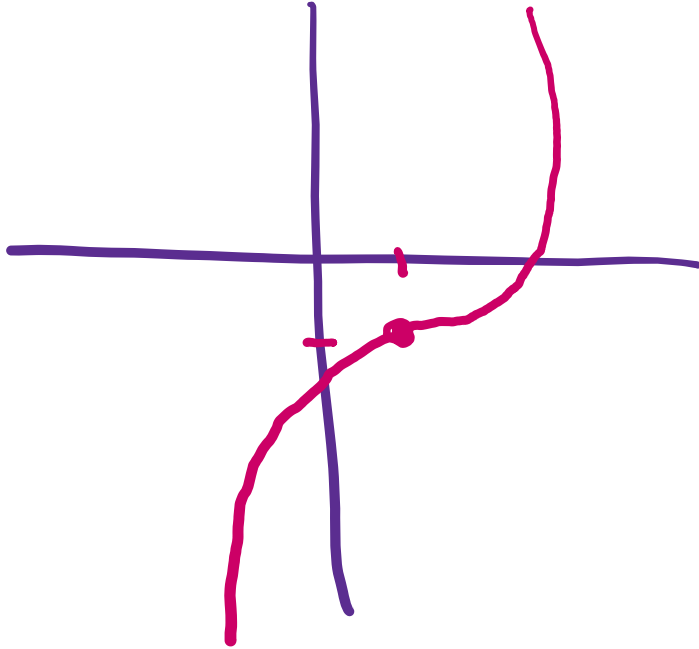
حل تمرین‌های فصل (۱) (تابع)

علی هاشمی

۱ نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

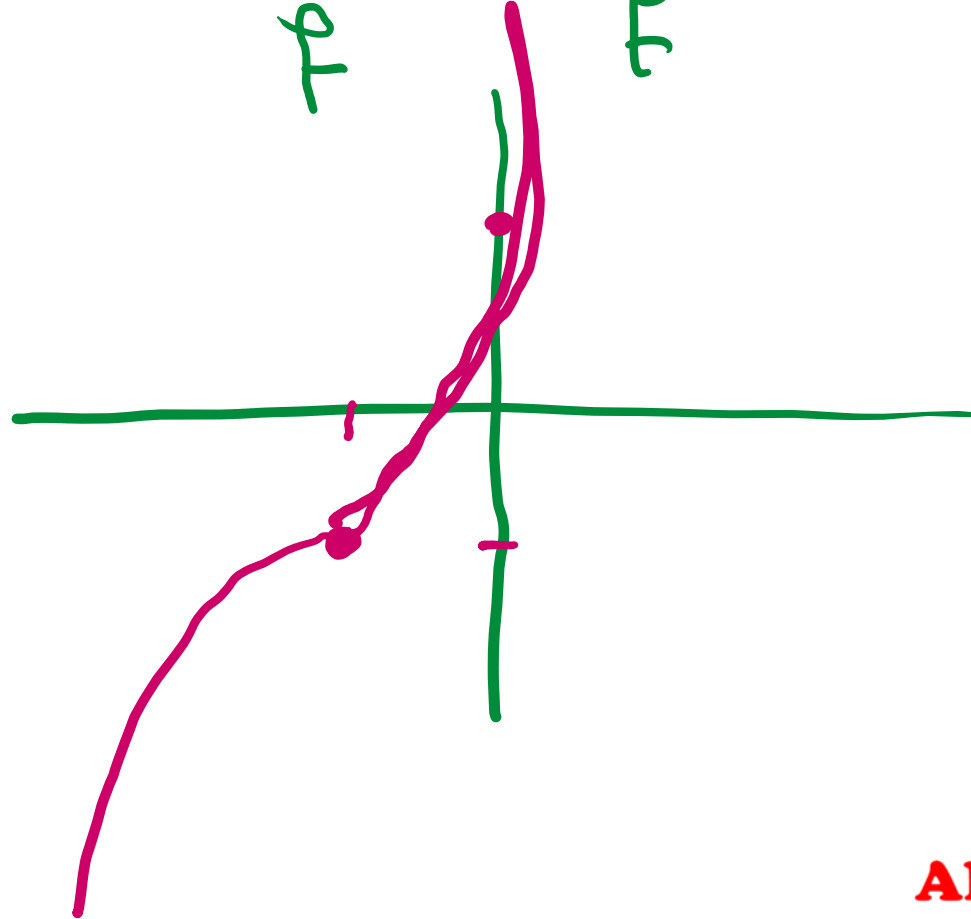
الف) $y = (x-1)^3 - 1$

$$D_f = R_f = R$$



ب) $y = (x+2)^3 - 2$

$$D_f = R_f = R$$

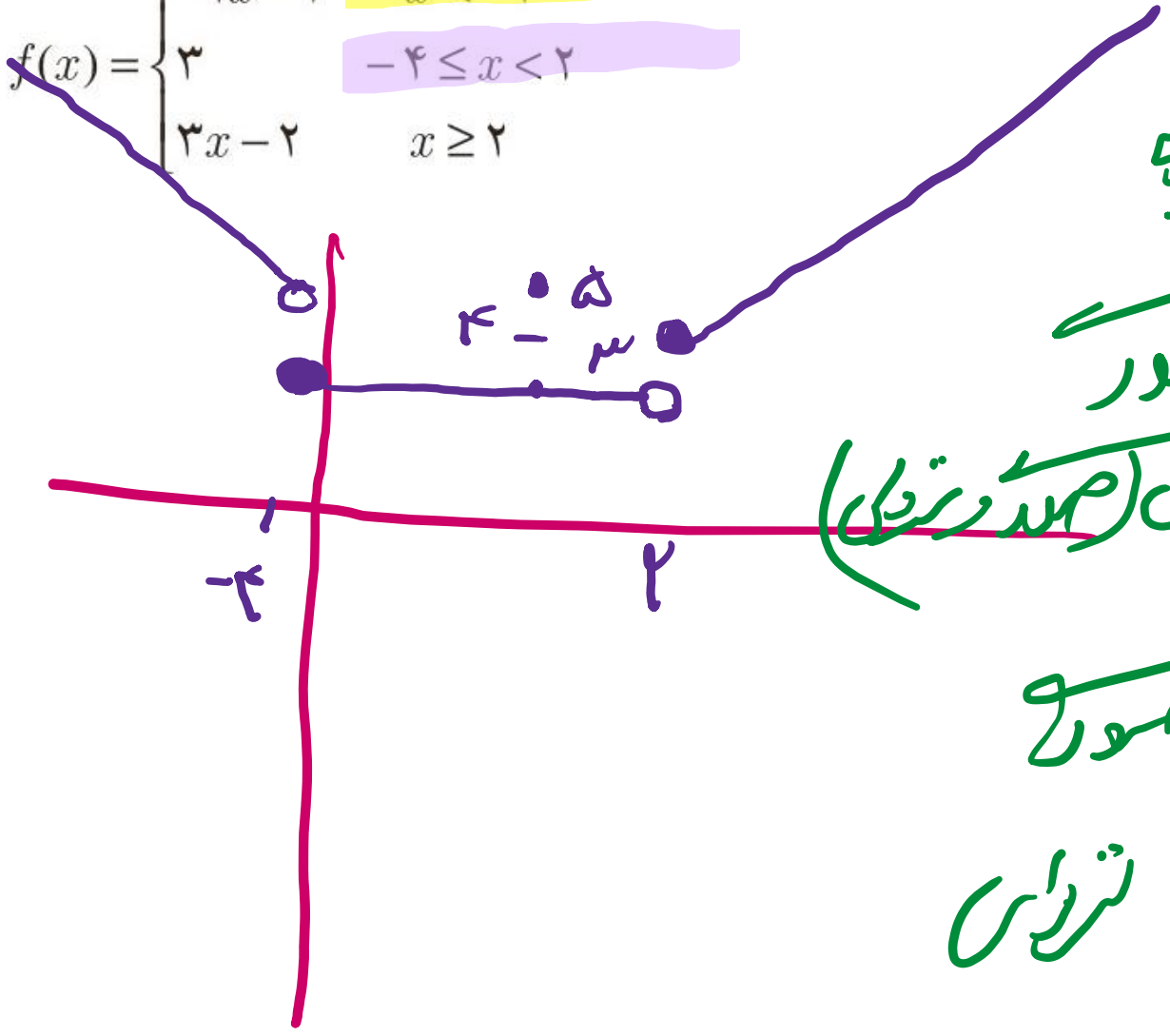


ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$



$(-\infty, -4)$ الکد نزولی

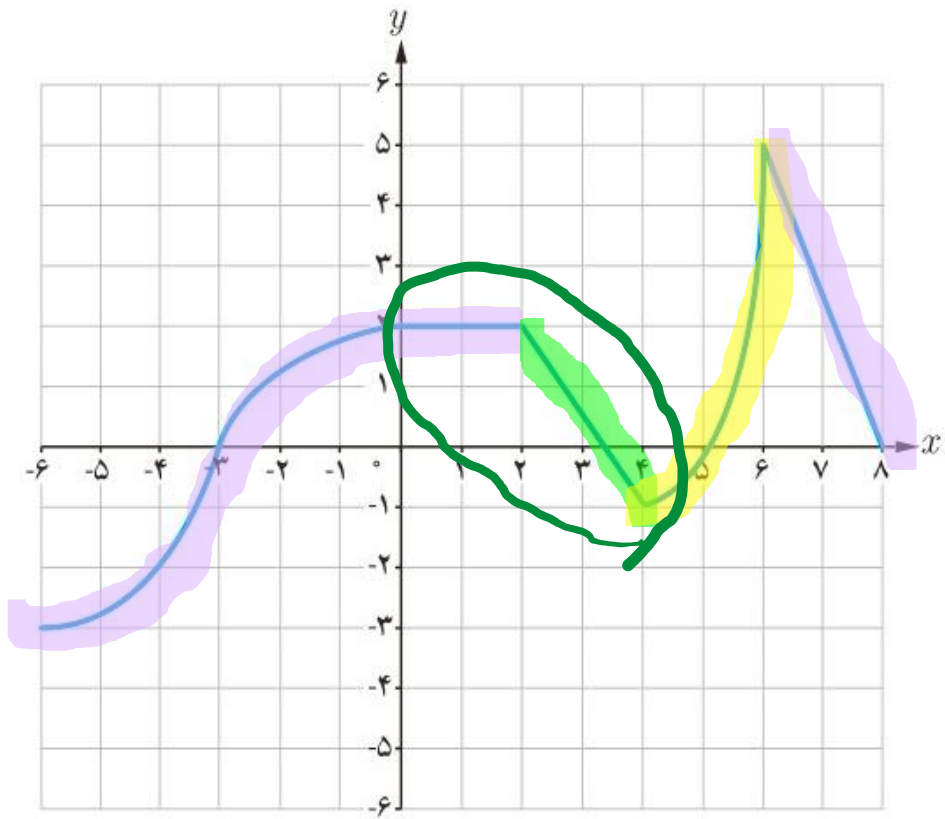
$[2, +\infty)$ الکد صعودی

$[-4, 2)$ ثابت (صاف)

$[-4, +\infty)$ صعودی

$(-\infty, 2)$ نزولی

۳ با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



صعودی (صعودتی)

کمی‌انزولی

کمی‌صعودی

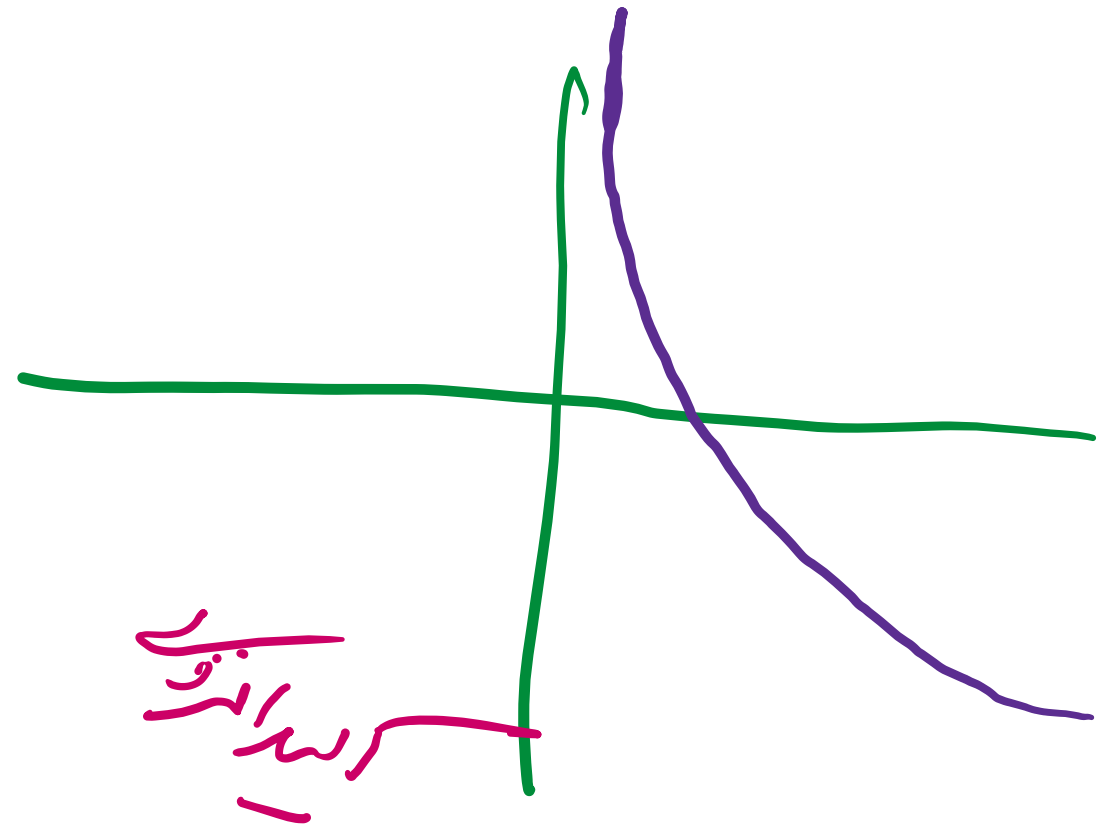
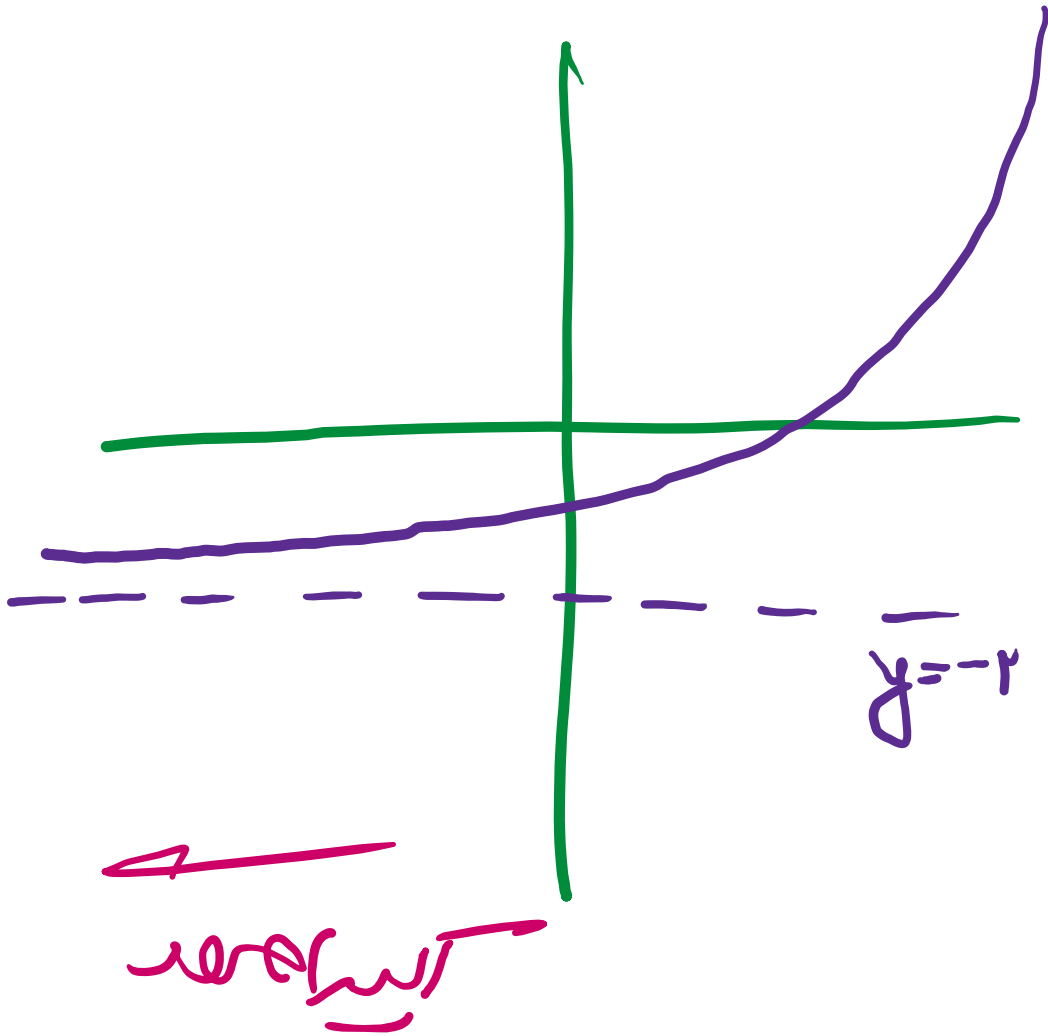
کمی‌انزولی

نزولی

$(-\infty, 2]$ صعودی

$(-\infty, 0]$ نزولی

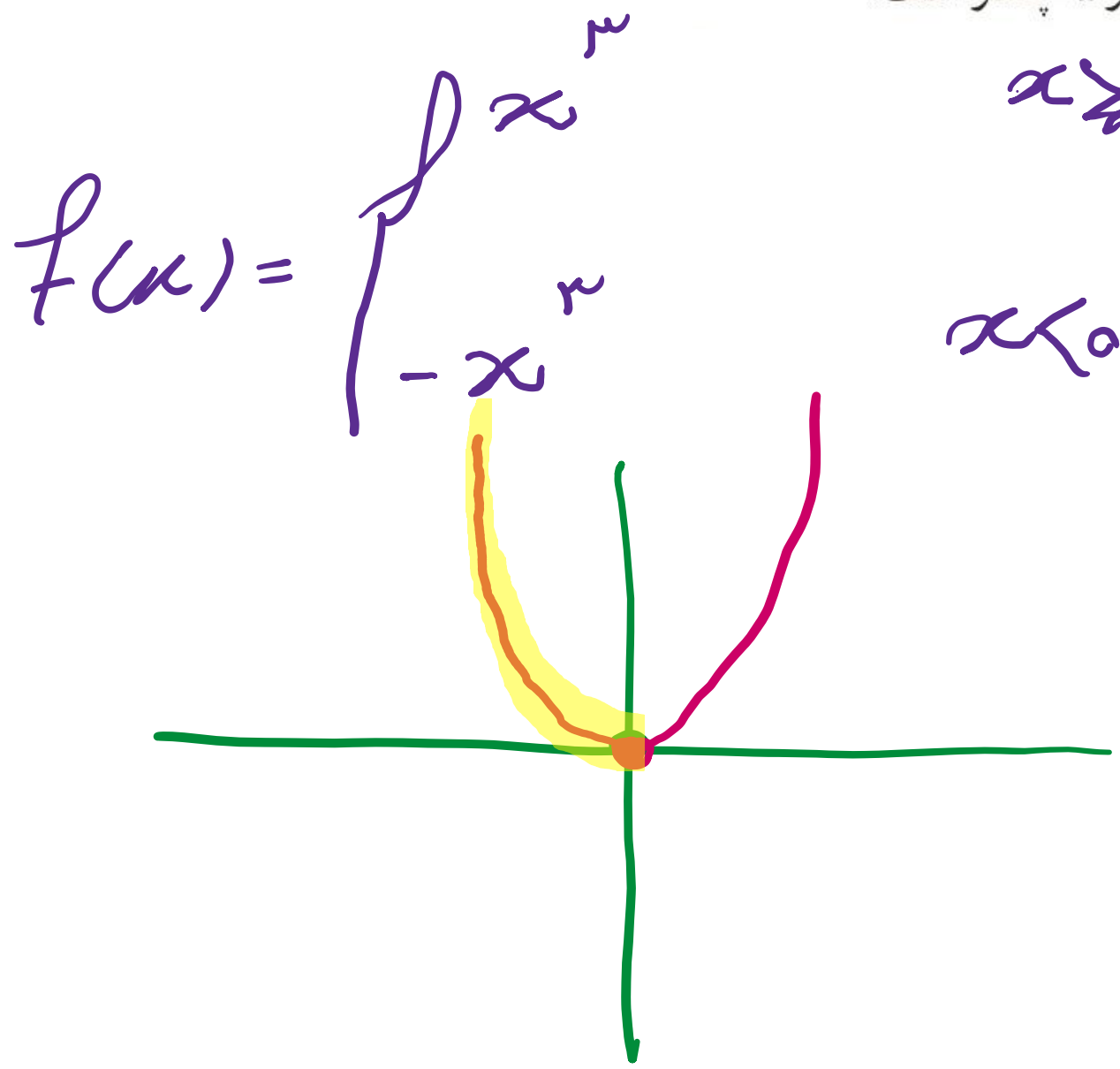
۴ تابع نمایی $y = 2^x - 2$ و تابع لگاریتمی $y = -\log_2^x + 2$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.



۵ تابع $y = x^2|x|$ در بازه $[-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟

$x \geq 0$

$x < 0$

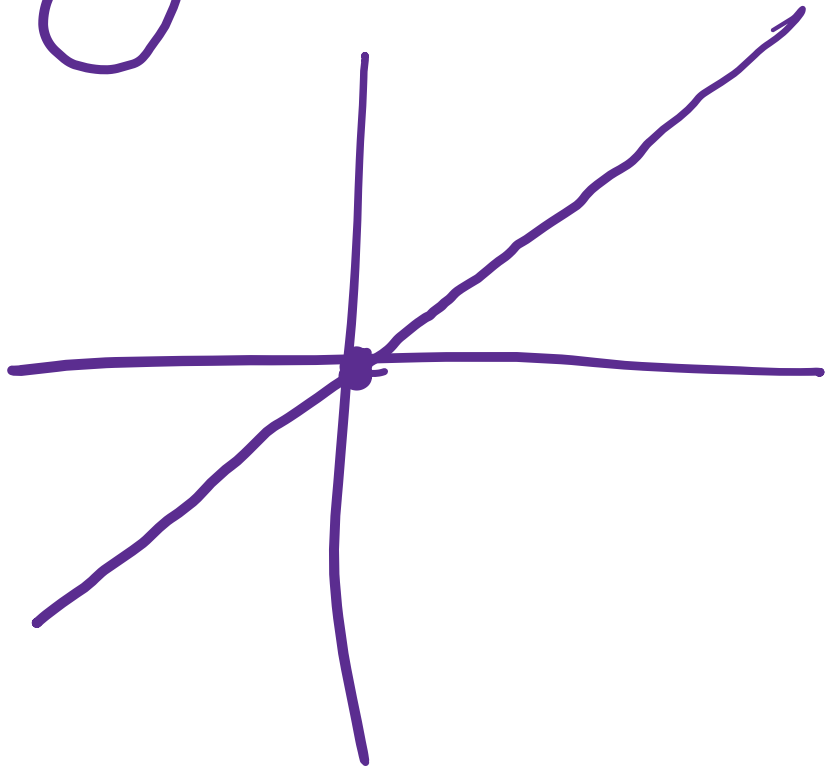


$[-\infty, 0]$ نزولی

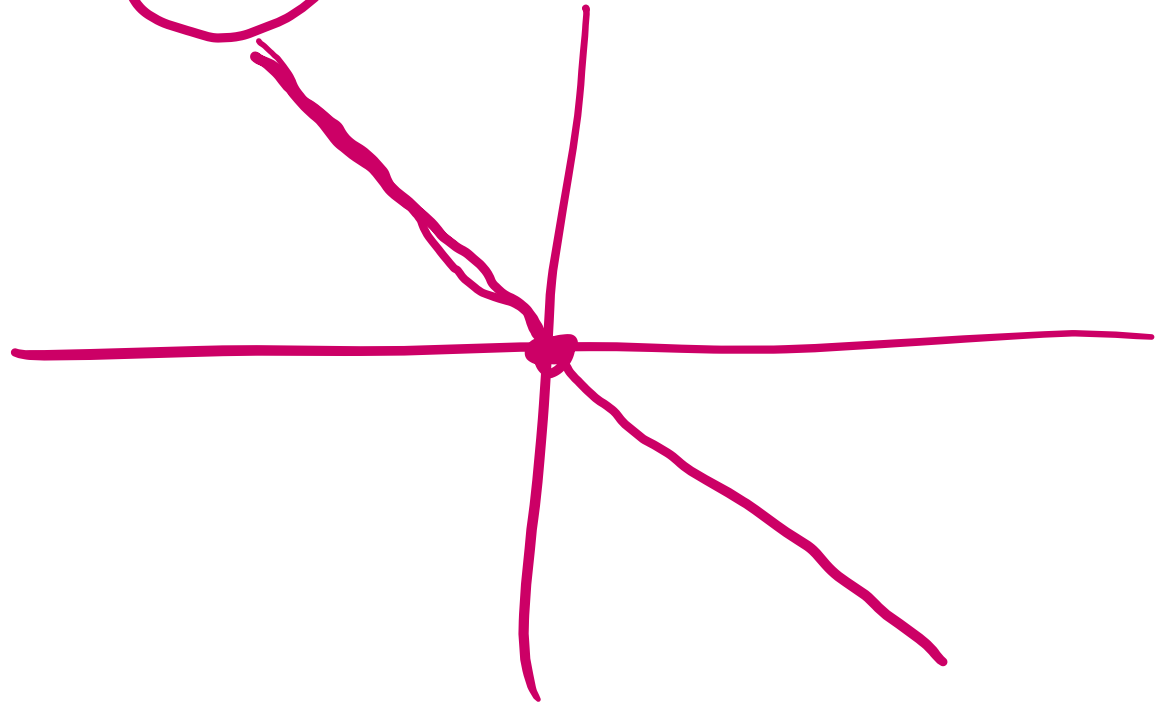
$a = 0$

۶ تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً نزولی باشد.

$$y = x$$



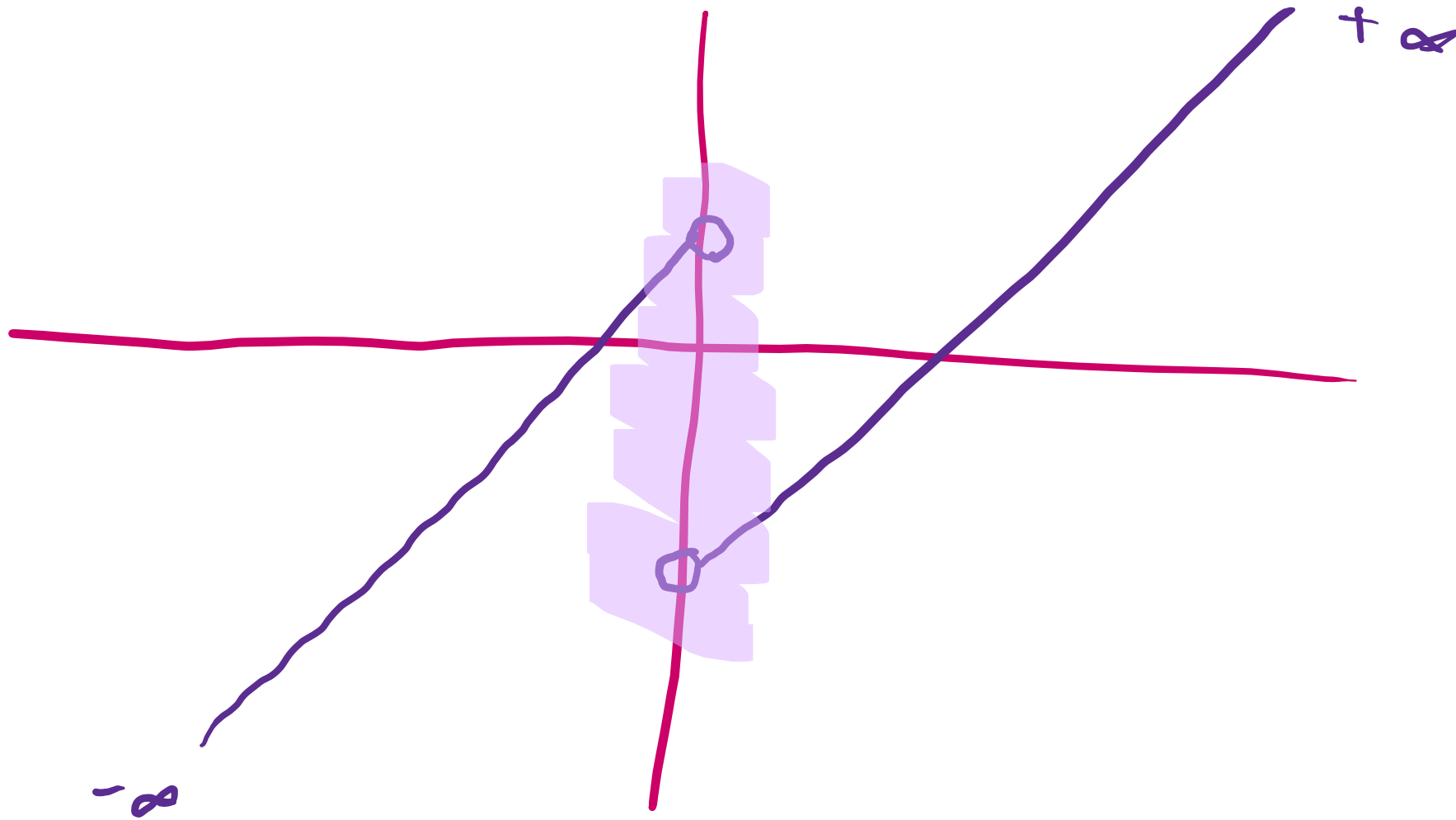
$$y = -x$$



ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۷ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی در R اکیداً صعودی نباشد.



ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱ اگر $f = \{(7, 8), (5, 3), (9, 8), (11, 4)\}$ و $g = \{(5, 7), (3, 5), (7, 9), (9, 11)\}$ توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

$$f \circ g = f(g(x)) = \{(5, 11), (3, 13), (7, 11), (9, 14)\}$$

$$g \circ f = g(f(x)) = \{\cancel{(7, 8)}, (5, 5), \cancel{(9, 8)}, \cancel{(11, 4)}\}$$

۲ در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

الف) $f(x) = x^2 - 5$; $g(x) = \sqrt{x+6}$: $D_{f \circ g}, (f \circ g)(x)$

$$f \circ g = (\sqrt{x+6})^2 - 5 = x+6-5 = x+1$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

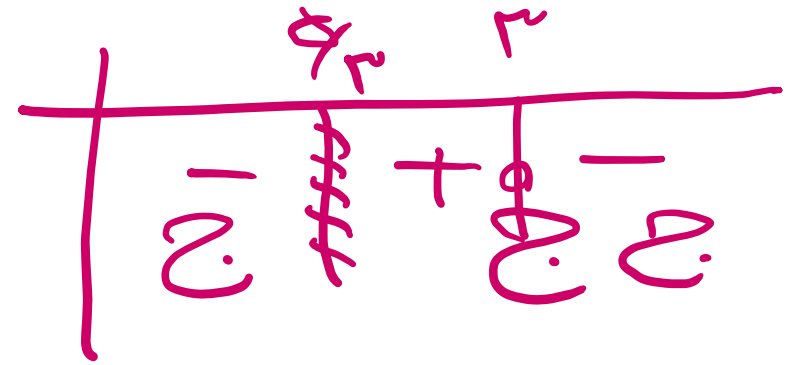
$$D_{f \circ g} = \{x \geq -6 \mid \sqrt{x+6} \in \mathbb{R}\} = [-6, +\infty)$$

۲ در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

$$x \leq \frac{4}{3}$$

ب) $f(x) = \sqrt{3-2x}$; $g(x) = \frac{6}{3x-5}$: $D_{f \circ g}, (f \circ g)(x)$

$$f \circ g(x) = \sqrt{3-2\left(\frac{6}{3x-5}\right)}$$



$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g, g(x) \in D_f \right\}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \neq \frac{5}{3}, \frac{4}{3x-5} \leq \frac{4}{3} \right\} = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right) \cup [3, +\infty)$$

$$\frac{4}{3x-5} - \frac{4}{3} \leq 0 \rightarrow \frac{12-9x+10}{3(3x-5)} = \frac{22-9x}{3(3x-5)} \leq 0$$

۲ در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

$$x \geq 4$$
$$x \leq -4$$

پ) $f(x) = \sqrt{x+2}$; $g(x) = \sqrt{x^2 - 16}$; $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

$$g \circ f(x) = \sqrt{(\sqrt{x+2})^2 - 16} = \sqrt{x+2-16} = \sqrt{x-14}$$

$$D_{g \circ f} = \{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \}$$

$$D_{g \circ f} = \{ x \geq -2 \mid \sqrt{x+2} \geq 4 \}$$
$$x \geq 14$$

$$= [14, +\infty)$$

۲ در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

ت) $f(x) = \sin x$; $g(x) = \sqrt{x}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

$$g \circ f(x) = \sqrt{\sin x}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \geq 0\} = [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \dots$$

۳ اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ ، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

$$3g - 4 = 3x^2 - 6x + 14$$

$$3g = 3x^2 - 6x + 18$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 6$$

۴ مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ؛ آنگاه $(f \circ g)(5) = -25$.

ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

پ) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آنگاه $(f \circ g)(4) = 5$.

ت) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 2x - 1$ ، آنگاه $(f \circ g)(5) = g(2)$.

$$\text{الف) } f \circ g(5) = f(g(5)) = f(\sqrt{21}) = 21 - 4 = 17 \quad \times$$

$$\text{ب) } f(x) = x, g(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f \circ g = \frac{1}{x}, g \circ f = \frac{1}{x} \quad \times$$

$$\text{پ) } f(g(4)) = f(7) = 5 \quad \checkmark$$

$$\text{ت) } f(g(5)) = f(9) = 3 \quad / \quad g(2) = 3 \quad \checkmark$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۵) الناز می خواهد از فروشگاه بهار یک لپ تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنجشنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام یک از حالت های الف یا ب به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

الف) $2,000,000 \times \frac{20}{100} = 400,000 \rightarrow 1,600,000 \rightarrow 1,600,000$

ب) $2,000,000 - 200,000 = 1,800,000 \rightarrow 1,800,000 \times \frac{20}{100} = 360,000$

$\rightarrow 1,800,000 - 360,000 = 1,440,000$

۶ تابع $h(x) = (3x^2 - 4x + 1)^5$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

الف) $f(x) = \sqrt[5]{x}$; $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$

ب) $k(x) = x^5$; $l(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$$f \circ g(x) = \sqrt[5]{3x^2 - 4x + 1}$$

$$k \circ l(x) = (3x^2 - 4x + 1)^5$$

۷ هریک از توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

ب) $l(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x^2 + 1 \rightarrow f \circ g(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 5 \rightarrow f \circ g(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

۸ با توجه به نمودارهای توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $(fog)(-1)$

ب) $(gof)(0)$

پ) $(fog)(1)$

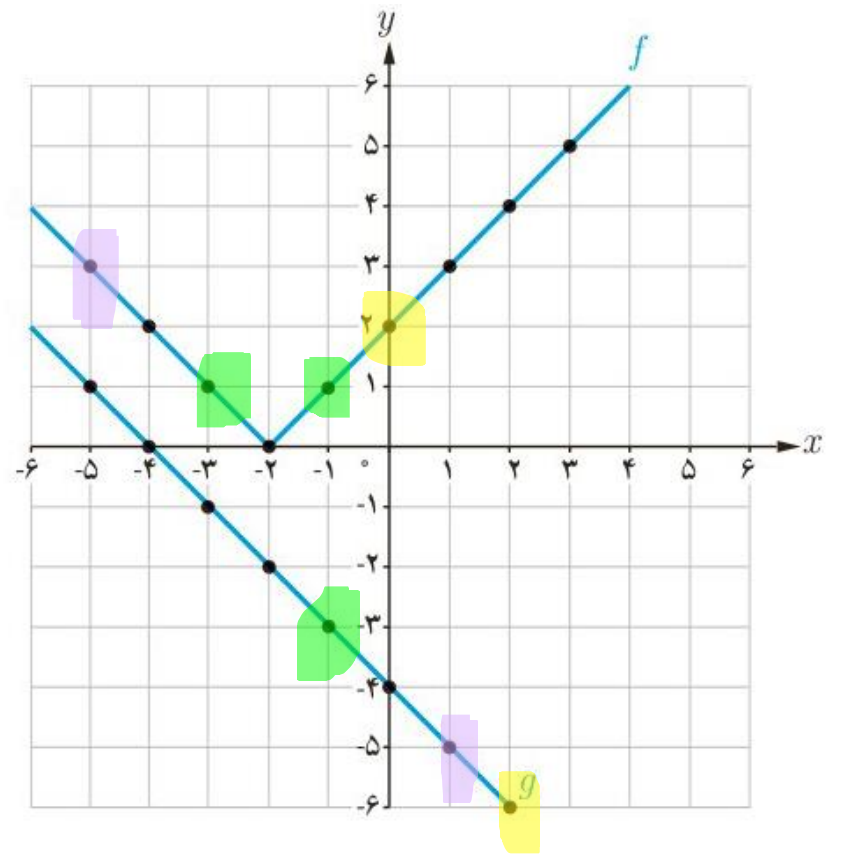
ت) $(gof)(-1)$

الف) $f(g(-1)) = f(-3) = 1$

ب) $g(f(0)) = g(2) = -6$

پ) $f(g(1)) = f(-5) = 3$

ت) $g(f(-1)) = g(1) = -5$



۹ با توجه به ضابطه‌های توابع f و g ، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x) = 2x - 5$ ، $g(x) = x^2 - 3x + 8$: $(f \circ g)(x) = 7$

$$2(x^2 - 3x + 8) - 5 = 7 \rightarrow x^2 - 3x + 8 = 9$$

$$\rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array} \right\}$$

۹ با توجه به ضابطه‌های توابع f و g ، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

ب) $f(x) = 3x^2 + x - 1$, $g(x) = 1 - 2x$: $(g \circ f)(x) = -5$

$$g \circ f(x) = 1 - 2(3x^2 + x - 1) = -5 \rightarrow y = 2(3x^2 + x - 1)$$

$$3x^2 + x - 1 = 3 \rightarrow 3x^2 + x - 4 = 0$$

$x = 1$
 $x = -\frac{4}{3}$

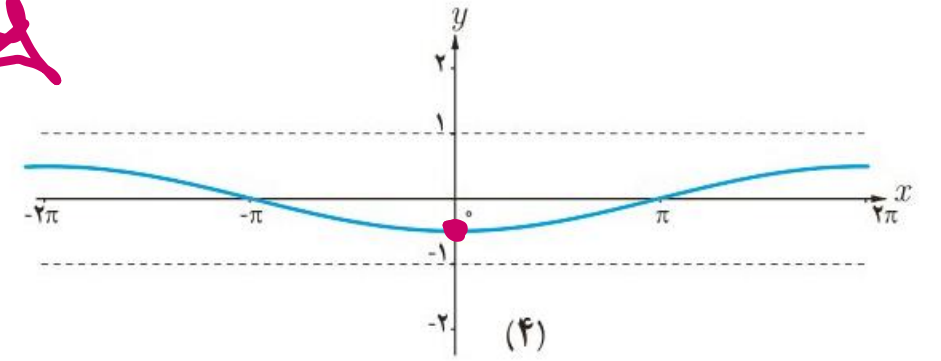
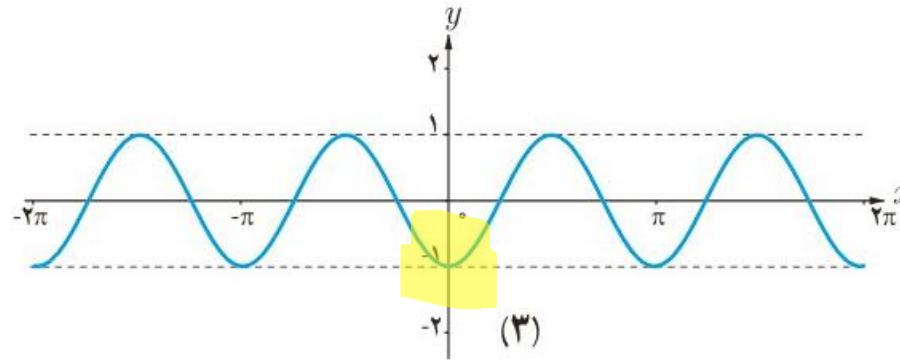
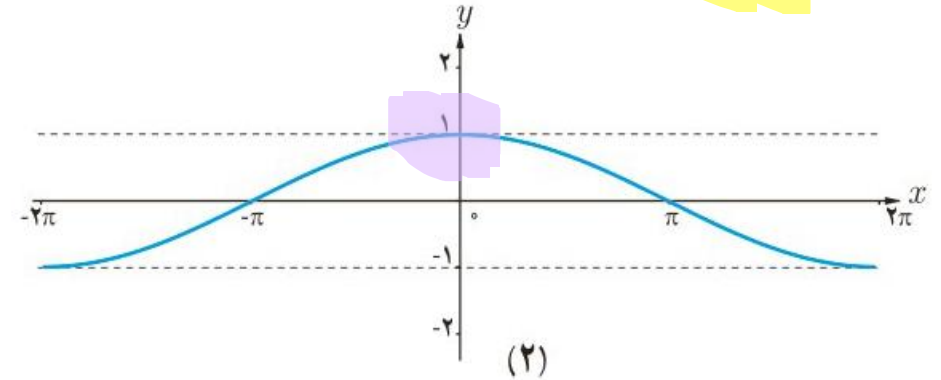
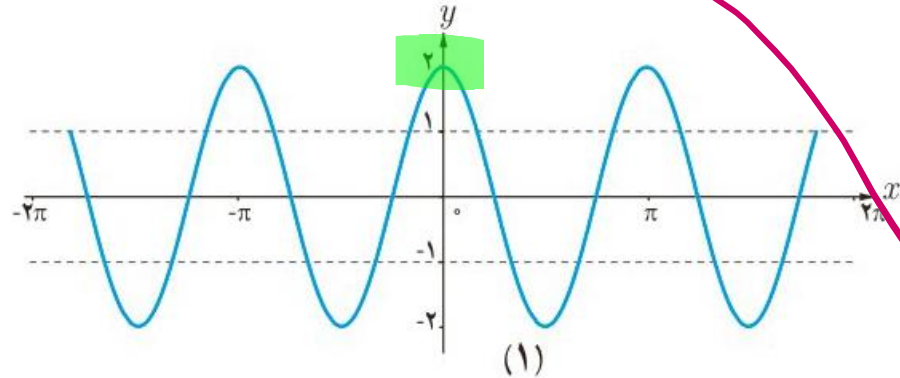
۱. با استفاده از نمودار $y = \cos x$ ، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

الف) $y = -\frac{1}{2} \cos(-\frac{1}{2}x)$

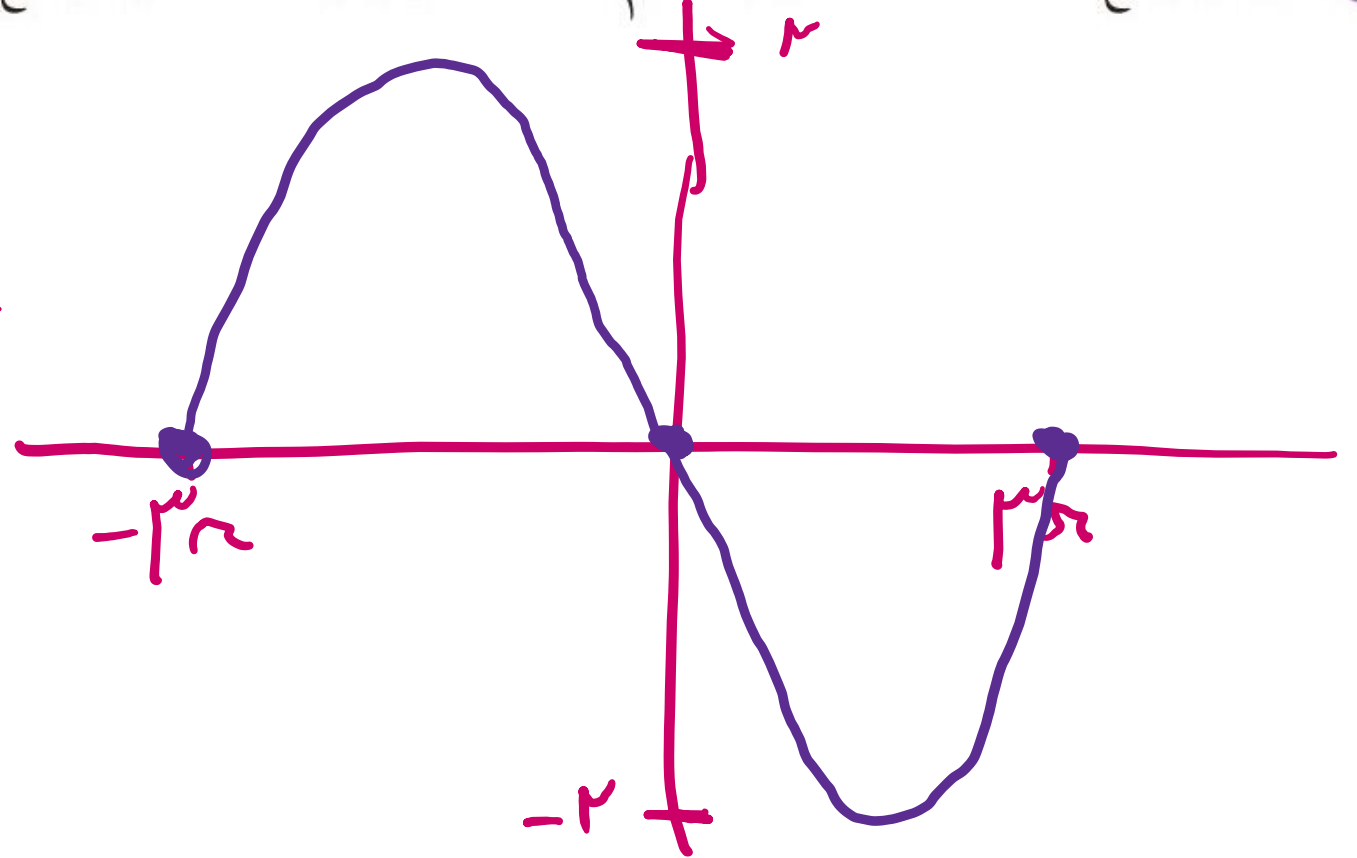
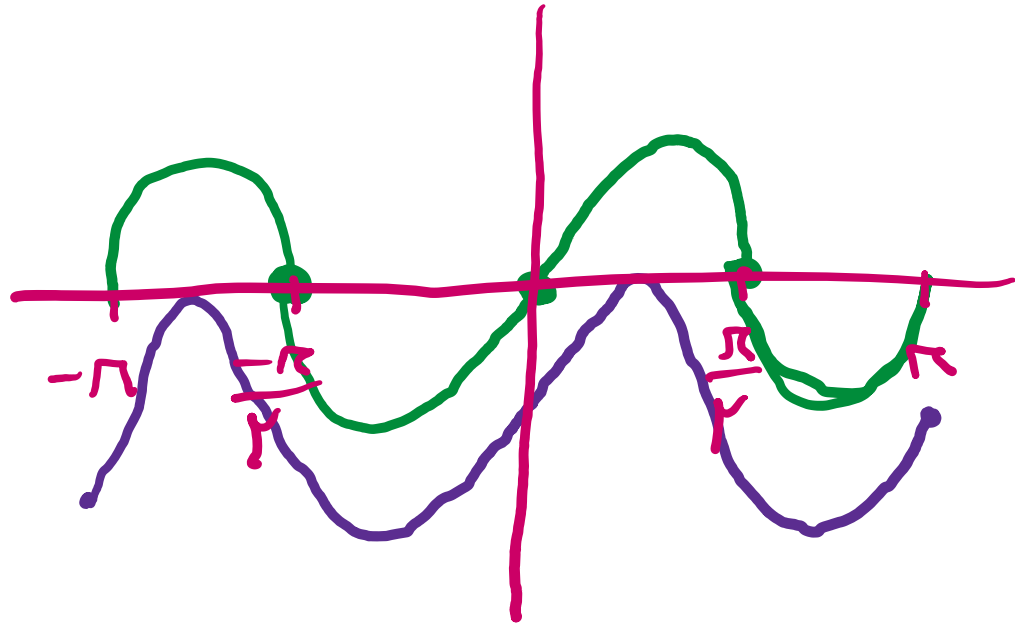
ب) $y = 2 \cos 2x$

پ) $y = \cos(\frac{1}{2}x)$

ت) $y = -\cos 2x$



۱۱ نمودار توابع $y = -\sin 2x - 1$ و $y = 2\sin\left(\frac{-1}{3}x\right)$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.



$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

۱ ضابطه تابع وارون توابع یک به یک زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{-\lambda x + \mu}{\nu}$

ب) $g(x) = -\omega - \sqrt{\mu x + 1}$

$$y = \frac{-\lambda x + \mu}{\nu} \rightarrow \nu y = -\lambda x + \mu \rightarrow \lambda x = \mu - \nu y$$

$$x = \frac{\mu - \nu y}{\lambda} \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{\mu - \nu y}{\lambda}$$

$$y = -\omega - \sqrt{\mu x + 1} \rightarrow \sqrt{\mu x + 1} = -\omega - y \rightarrow \mu x + 1 = (\omega + y)^2$$

$$\mu x = (\omega + y)^2 - 1 \rightarrow x = \frac{(\omega + y)^2 - 1}{\mu} \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{(\omega + y)^2 - 1}{\mu}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

در مورد هر یک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x) = \frac{-\sqrt{x}}{2} - 3$, $g(x) = -\frac{2x+6}{\sqrt{x}}$

ب) $f(x) = -\sqrt{x-1}$, $g(x) = 1+x^2 ; x \leq 0$

الف) $y+3 = \frac{-\sqrt{x}}{2} \rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{x}}(y+3) \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{-(2y+6)}{\sqrt{y}}$

ب) $y = -\sqrt{x-1} \rightarrow y^2 = x-1 \rightarrow x = y^2+1$

$\rightarrow f^{-1}(y) = y^2+1 , x \leq 0$

۳ رابطه بین درجه سانتی گراد و فارنهایت که برای اندازه گیری دما استفاده می شوند به صورت $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ است که در آن x میزان درجه سانتی گراد و $f(x)$ میزان درجه فارنهایت است. $f^{-1}(x)$ را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می دهد.

$$y - 32 = \frac{9}{5}x \rightarrow x = \frac{5}{9}(y - 32)$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$$

۴ توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه آنها توابعی یک به یک بسازید و ضابطه وارون آنها را به دست آورید.

الف) $f(x) = |x|$

ب) $g(x) = -x^2$

پ) $h(x) = x^2 + 4x + 3 \rightarrow \Delta x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$

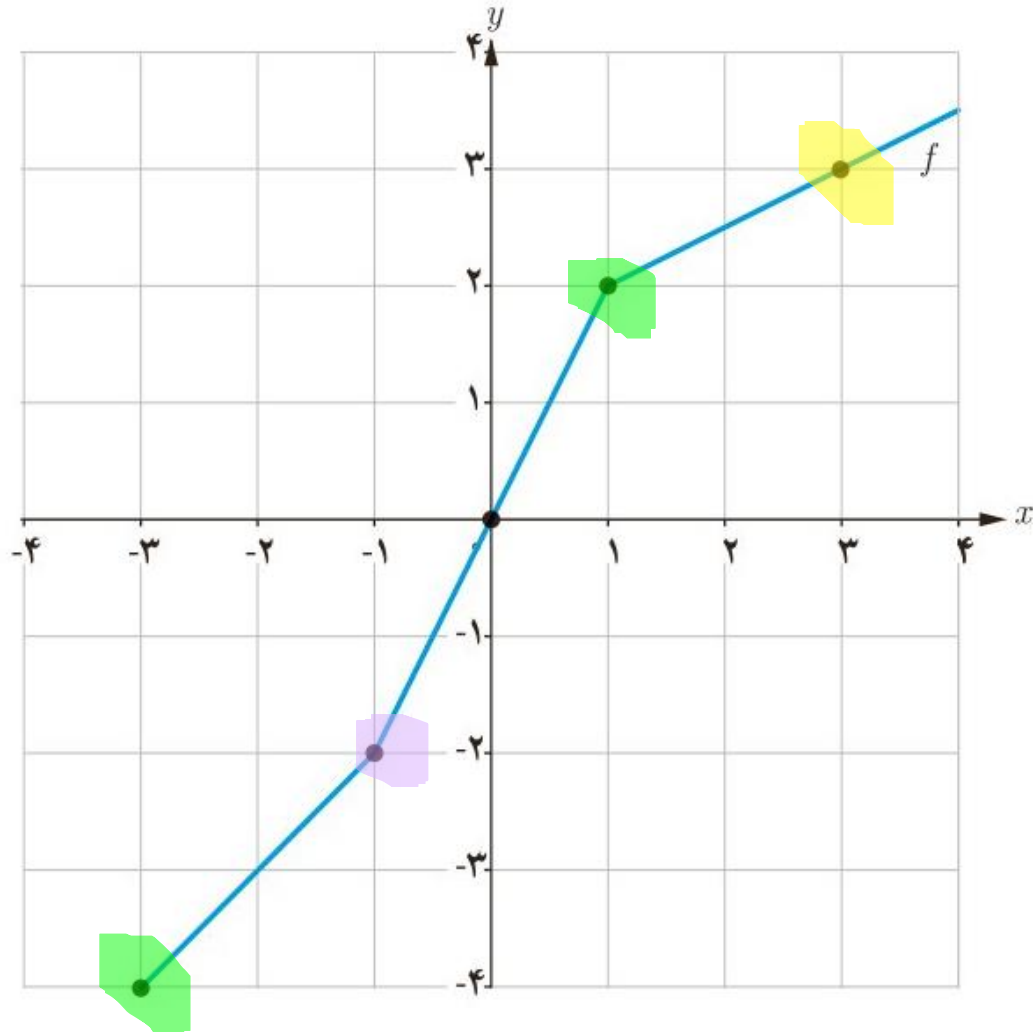
الف) $x \geq 0 \rightarrow y = x \rightarrow f^{-1}(x) = x, x \geq 0$

ب) $x \leq 0 \rightarrow y = -x^2 \rightarrow x = \sqrt{-y} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{-x}, x \leq 0$

د) $x \geq -2 \rightarrow y = (x^2 + 4x + 3) - 1 = (x+2)^2 - 1 \rightarrow y+1 = (x+2)^2$

$\rightarrow \sqrt{y+1} = |x+2| \rightarrow x = \sqrt{y+1} - 2 \rightarrow f^{-1} = \sqrt{x+1} - 2, x \geq -1$

۵ از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.



x	-4	-2	2	3
$f^{-1}(x)$	-3	-1	1	3

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۶ با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ، یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

$$x = \frac{f}{2} = 2 \rightarrow y = x^2 - 4x + 5, \quad x \geq 2$$

$$y = (x-2)^2 + 1 \rightarrow \sqrt{y-1} = |x-2| \rightarrow \sqrt{y-1} + 2 = x$$

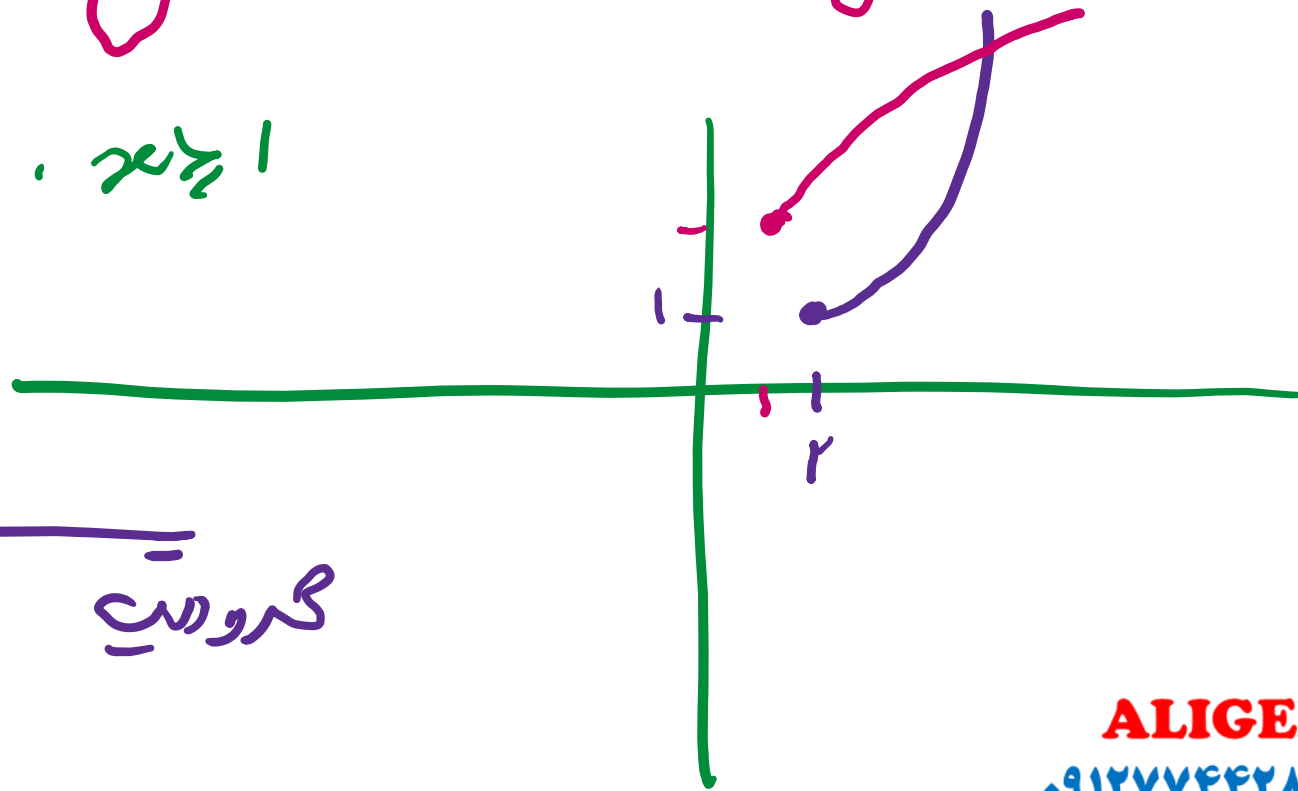
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2, \quad x \geq 1$$

$$D_f = R_f = R$$

$$D_f = [2, +\infty)$$

$$R_f = [1, +\infty)$$

گروهی



۷ اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $(f \circ g)^{-1}(5)$

ب) $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$

پ) $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$

$$y + 3 = \frac{1}{8}x \rightarrow x = 8(y + 3) \rightarrow f^{-1}(x) = 8(x + 3)$$
$$y = x^3 \rightarrow \sqrt[3]{y} = x \rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

الف) $(f \circ g)^{-1}(5) = g^{-1} \circ f^{-1}(5) = g^{-1}(f^{-1}(5)) = g^{-1}(48) = \sqrt[3]{48}$

ب) $f^{-1}(f^{-1}(6)) = f^{-1}(74) = 8 \times 74 = 592$

پ) $g^{-1}(f^{-1}(5)) = g^{-1}(47) = \sqrt[3]{47}$

علی جیبرا سائیت تخصصی ریاضی فیزیک

WWW.ALICEBRA.COM

AG

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱
۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

