

# آموزش ماتریس

## دستگاه معادلات

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**



$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}}_B$$

$$AX = B \quad \times A^{-1}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

مقاطع  $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$   $\rightarrow |A| \neq 0$   $\rightarrow$  جواب منفرد

موازی  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$   $\rightarrow |A| = 0$   $\rightarrow$  جواب نداشت

مصحح  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$   $\rightarrow |A| = 0$   $\rightarrow$  بی‌نهایت جواب

۱- دستگاه  $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$  را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4-4} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

۲- دستگاه  $\begin{cases} (m-3)x + 3y = m \\ 4x + (m+1)y = 2 \end{cases}$  به ازای چه مقادیری  $m$  دارای جواب منحصر به فرد می باشد.

$$\begin{vmatrix} m-3 & 3 \\ 4 & m+1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$(m-3)(m+1) - 12 \neq 0 \rightarrow m^2 - 2m - 3 - 12 \neq 0$$

$$m^2 - 2m - 15 \neq 0 \rightarrow (m-5)(m+3) \neq 0$$

$$\begin{array}{l} m \neq 5 \\ m \neq -3 \end{array}$$

۳- مقدار  $m$  را چنان بیابید که دستگاه  

$$\begin{cases} mx + 3y = -3 \\ 4x + (m + 4)y = 2 \end{cases}$$
 جواب نداشته باشد.

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{m+4} \neq \frac{-3}{2}$$

$$\underline{\underline{|A| = 0}} \rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$m(m+4) = 12 \Rightarrow m^2 + 4m - 12 = 0 \Rightarrow (m+4)(m-2) = 0$$

برای  $m = -4$   $\rightarrow \frac{-4}{4} = \frac{3}{-2} \neq \frac{-3}{2}$  ✗

چون  $m = 2$   $\rightarrow \frac{2}{4} = \frac{3}{4} \neq \frac{-3}{2}$  ✓

$$m = 2$$

۴- به ازای کدام رابطه بین  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، دستگاه  
جواب‌های غیر صفر نیز دارد؟  
$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ (a + b)x + cy = 0 \end{cases}$$

$$ac = b^2 + c^2 \quad \textcircled{۴}$$

$$b^2 = ac - ab \quad \textcircled{۳}$$

$$ac = b^2 - c^2 \quad \textcircled{۲}$$

$$b^2 = ab + ac \quad \textcircled{۱}$$

$$|A|=0 \rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a+b & c \end{vmatrix} = 0$$

$$ac - b(a+b) = 0 \rightarrow ac - ba - b^2 = 0$$

$$\rightarrow b^2 = ac - ab$$

۵- در دستگاه معادلات  $\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$ ، رابطه  $ad - bc = 1$  برقرار است. مقدار  $x$  کدام است؟

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d + b \\ -c - a \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d + b \\ -c - a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = d + b \\ y = -c - a \end{cases}$$



۶- اگر دستگاه معادلات  $\begin{cases} ax - 3y = 1 \\ 20x + by = 5 \end{cases}$  بی شمار جواب داشته باشد، کدام دستگاه معادلات، جواب منحصر به فرد دارد؟

$$|A| \neq 0$$

$$\begin{cases} ax + by = 2 \\ 3ax + 3by = 5 \end{cases} \quad \textcircled{4}$$

$$\begin{cases} ax + 15y = 5 \\ bx + ay = 3 \end{cases} \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{cases} ax - 15y = 1 \\ 4x + by = 5 \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{cases} 15x - 4y = 1 \\ bx + ay = 3 \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{a}{20} = \frac{-3}{b} = \frac{1}{5} \rightarrow a = 4, b = -15$$

$$1) \begin{vmatrix} 15 & -4 \\ -15 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \times$$

$$2) \begin{vmatrix} 4 & -15 \\ 4 & -15 \end{vmatrix} = 0 \quad \times$$

$$3) \begin{vmatrix} 4 & 15 \\ -15 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \checkmark$$

$$4) \begin{vmatrix} 4 & -15 \\ 12 & -45 \end{vmatrix} = 0 \quad \times$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

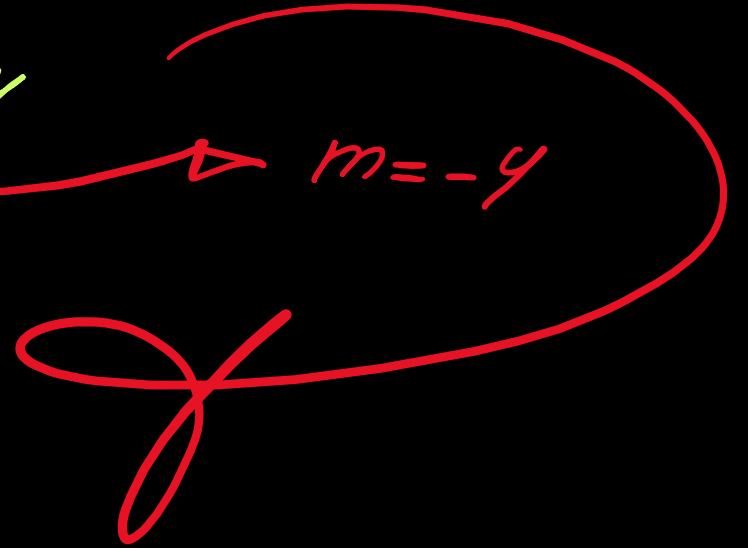
**ALIGEBRA.COM**

۷- به ازای چند مقدار  $m$ ، دستگاه معادلات خطی  $\begin{cases} mx + 2y = m + 2 \\ 3x + (m + 5)y = 2 \end{cases}$  بیش از یک دسته جواب دارد؟

$$\frac{m}{3} = \frac{2}{m+5} = \frac{m+2}{2}$$

$$\frac{m}{3} = \frac{2}{m+5} \rightarrow m^2 + 5m - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -6 \end{cases}$$

$$\frac{m}{3} = \frac{m+2}{2} \rightarrow 2m + 4 = 3m \rightarrow m = -4$$



۸- به ازای کدام مقدار  $n$  دستگاه معادلات

$$\begin{cases} mx + 3y = 6 \\ 3x + my = n^2 + 5n \end{cases}$$

هیچ گاه بیش از یک دسته جواب ندارد؟

$$\frac{m}{3} = \frac{\mu}{m} = \frac{4}{n^2 + 5n}$$

$$\frac{m}{3} = \frac{\mu}{m} \rightarrow m^2 = 9 \rightarrow m = \pm 3$$

$$m = 3 \rightarrow \frac{4}{n^2 + 5n} = 1 \rightarrow n^2 + 5n - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = -4 \end{cases}$$

$$m = -3 \rightarrow \frac{4}{n^2 + 5n} = -1 \rightarrow n^2 + 5n + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} n = -3 \\ n = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 3 \rightarrow n = 1 \text{ و } n = -4 \\ m = -3 \rightarrow n = -3 \text{ و } n = -2 \end{cases}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**

۹- اگر دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات  $\begin{cases} ax + 2y = 4 \\ bx - 5y = 7 \end{cases}$  برابر ۱۷ باشد، آنگاه مقدار  $x$  کدام است؟

$$\begin{bmatrix} a & 2 \\ b & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & -5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-20 - 14}{17} \\ \frac{-4b + 7a}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow x = \frac{-20 - 14}{17} = -2$$

۱۰- اگر وارون ماتریس ضرایب دستگاه معادلات  $\begin{cases} ax + 4y = 7 \\ 2x + by = 4 \end{cases}$  به صورت  $\begin{bmatrix} 3 & c \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$  باشد، آنگاه مجموع جواب‌های دستگاه کدام است؟

$$\begin{bmatrix} a & 4 \\ 2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 2 & b \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ab-1} \begin{bmatrix} b & -4 \\ -2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & -4 \\ -2 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{b}{ab-1} = \mu \quad / \quad \frac{-4}{ab-1} = c \quad / \quad \frac{-2}{ab-1} = -2 \quad / \quad \frac{a}{ab-1} = \mu$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \end{bmatrix}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**



**Alihashemi\_math**



**Freemath**