

آموزش ریاضی

بهینه سازی

علی هاشمی

نقطه بحرانی 8

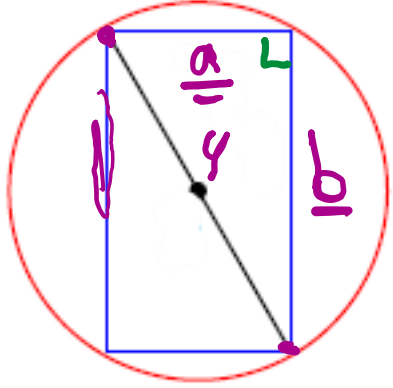
نقطه استرخش 8

8 min | max

نقطه سازگی



1) مستطیل محاط در دایره به قطر 6 واحد را حول یک ضلع خود دوران می دهیم تا استوانه های قائم ایجاد شود. وقتی حجم این استوانه ها بیشترین مقدار را دارد، ارتفاع آن کدام است؟



$$a^2 + b^2 = 36$$

$$\rightarrow a^2 = 36 - b^2$$

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot a \cdot b = \pi (36 - b^2) \cdot b = \pi (36b - b^3)$$

$$V' = 0 \rightarrow \pi (36 - 3b^2) = 0 \rightarrow 3b^2 = 36 \rightarrow b^2 = 12$$

$$\rightarrow b = +\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$



نقطه‌ای با کدام طول بر روی محور x ها انتخاب شود، به طوری که تفاضل فواصل آن، از دو نقطه $A \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 7 \\ -2 \end{vmatrix}$ بیشترین مقدار را داشته

باشد؟

$$0 / x=11$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + 25} - \sqrt{(x-7)^2 + 4}$$

$$\frac{0}{0} = 0$$

$$\frac{x(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + 25}} - \frac{x(x-7)}{\sqrt{(x-7)^2 + 4}} = 0$$

$$\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 + 25} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2 + 4}$$

$$\cancel{(x-1)^2} \sqrt{(x-7)^2 + 4} = \cancel{(x-7)^2} \sqrt{(x-1)^2 + 25}$$

$$2x - 2 = 5x - 35$$

$$3x = 33 \rightarrow x=11$$



دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است. اگر حاصلضرب آن‌ها مینیمم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

$$2x = y + 6 \rightarrow y = 2x - 6 \rightarrow y = 2 - 6 = -4$$

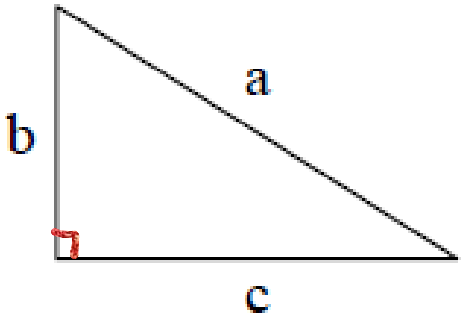
$$x \cdot y = x(2x - 6) = 2x^2 - 6x$$

$$y = 0 \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

$$x + y = 3 - 6 = -3$$



پیش‌ترین مساحت از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که مجموع یک ضلع زاویه قائمه و وتر آن برابر ۶ باشد، کدام است؟



$$S = \frac{1}{2} b \cdot c = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{c^2}{12} \right) c = \frac{1}{2} \left(3c - \frac{c^3}{12} \right)$$

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{12} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$a + b = 6 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\rightarrow c^2 = (a - b)(6) \rightarrow a - b = \frac{c^2}{6}$$

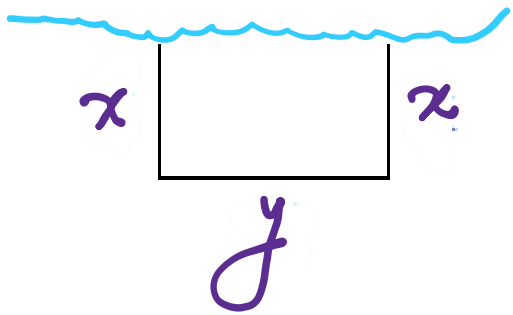
$$\begin{cases} a + b = 6 \\ -a + b = -\frac{c^2}{6} \end{cases}$$

$$2b = 6 - \frac{c^2}{6} \rightarrow b = 3 - \frac{c^2}{12}$$

$$S' = 0 \rightarrow 3 - \frac{c^2}{12} = 0 \rightarrow c = \sqrt{12} \rightarrow b = 2$$



۵ بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟



$$2x + y = 88 \rightarrow y = 88 - 2x$$

$$y = 44$$

$$S = xy = x(88 - 2x) = 88x - 2x^2$$

$$S' = 0 \rightarrow 88 - 4x = 0 \rightarrow x = 22$$

$$S = xy = 22 \times 44 = 968$$



کمترین فاصله نقطه $(4, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = \sqrt{2x+9}$ کدام است؟

$$A \left| \begin{array}{c} 4 \\ 0 \end{array} \right.$$

$$B \left| \begin{array}{c} x \\ \sqrt{2x+9} \end{array} \right.$$

$$L = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{2x+9} - 0)^2}$$

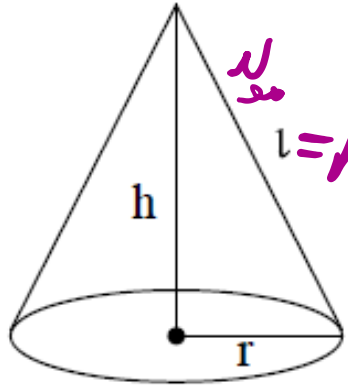
$$\rightarrow L = \sqrt{x^2 - 1x + 14 + 2x + 9} = \sqrt{x^2 - 9x + 25}$$

$$L' = 0 \rightarrow 2x - 9 = 0 \rightarrow x = 3$$

$$L = \sqrt{9 - 11 + 25} = \sqrt{14} = \frac{4}{9}$$



در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم $\frac{\pi}{3}$ ، با کدام ارتفاع، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟ ۷



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \rightarrow r^2 h = 1 \rightarrow r^2 = \frac{1}{h} \rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{h}}$$

$$S = \pi r l = \pi r \cdot \sqrt{h^2 + r^2} = \pi \sqrt{\frac{1}{h}} \cdot \sqrt{h^2 + \frac{1}{h}}$$

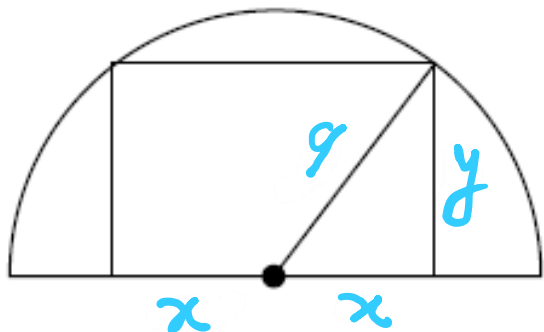
$$\rightarrow S = \pi \sqrt{h + \frac{1}{h^2}} \quad S' = 0 \rightarrow 1 - \frac{2}{h^3} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{h^3} = 1 \rightarrow h^3 = 1 \rightarrow h = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$\frac{1}{h^2} = h^{-2} \rightarrow -2h^{-3} = \frac{-2}{h^3}$$



بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟



$$S = 2xy = 2x \sqrt{36 - x^2}$$

$$x^2 + y^2 = 36 \rightarrow y^2 = 36 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$$

$$S = 2\sqrt{36x^2 - x^4} \quad S' = 0 \rightarrow 72x - 4x^3 = 0 \rightarrow x(72 - 4x^2) = 0$$

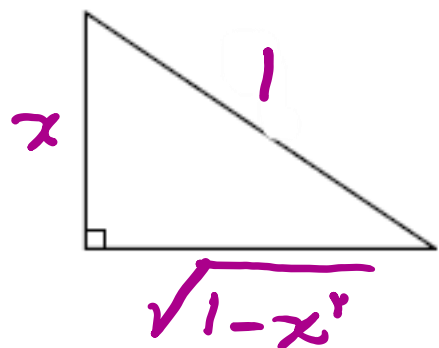
$$\rightarrow 72 - 4x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{72}{4} = 18 \rightarrow x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{36 - 18} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$S = 2 \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 72$$



بیشترین محیط مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که طول وتر آنها برابر یک واحد است، کدام است؟



$$P = 1 + x + \sqrt{1 - x^2}$$

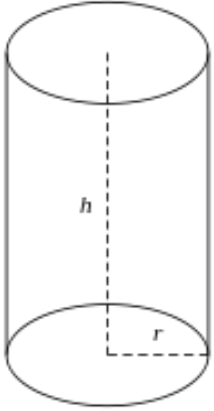
$$P' = 0 \rightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \rightarrow \frac{x^2}{1-x^2} = 1 \rightarrow x^2 = 1-x^2$$

$$\rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$P = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$



۱۰ در ساخت یک لیوان فلزی (بدون درب) به شکل استوانه قائم با حجم π ، با کدام ارتفاع کمترین مقدار فلز مصرف می‌شود؟



$$V = \pi r^2 h = \pi \rightarrow r^2 h = 1 \rightarrow h = \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{a}{x} \rightarrow \frac{-a}{x^2}$$

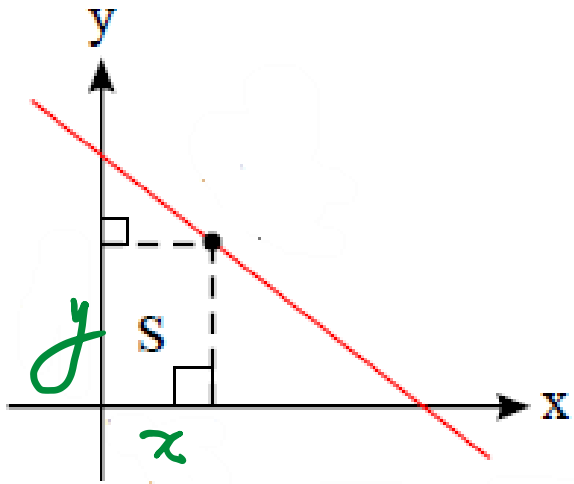
$$S = 2\pi r h + \pi r^2 = 2\pi r \cdot \frac{1}{r^2} + \pi r^2 = \frac{2\pi}{r} + \pi r^2$$

$$S' = 0 \rightarrow \frac{-2\pi}{r^2} + 2\pi r = 0 \rightarrow 2\pi r = \frac{2\pi}{r^2} \rightarrow r^3 = 1 \rightarrow r = 1$$

$$h = 1$$



حداکثر مساحت مستطیلی که دو ضلع آن روی محورهای مختصات و یک رأسش روی خط $3x + y = 12$ قرار دارد، چقدر است؟



$$S = xy$$

$$y = 12 - 3x$$

$$\rightarrow S = x(12 - 3x) = 12x - 3x^2$$

$$S' = 0$$

$$\rightarrow 12 - 6x = 0 \rightarrow 6x = 12 \rightarrow x = 2$$

$$y = 12 - 3x \xrightarrow{x=2} y = 6$$

$$S = xy = 2 \times 6 = 12$$



۱۲) کمترین فاصله نقطه $A \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right.$ از منحنی $f(x) = \sqrt{4x+9} + 1$ کدام است؟

$$A \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

$$B \left| \begin{matrix} x \\ \sqrt{4x+9} - 1 \end{matrix} \right.$$

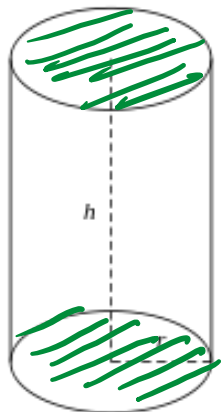
$$AB = \sqrt{(x-0)^2 + (\sqrt{4x+9} - 1 - 1)^2} = \sqrt{x^2 + 4x + 9}$$

$$AB' = 0 \rightarrow 2x + 4 = 0 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2 \checkmark$$

$$AB = \sqrt{4 - 4 + 9} = \sqrt{5}$$



حجم یک استوانه در بسته 54π است. کمترین سطح بیرونی آن چقدر است؟



$$V = \pi r^2 h = 54\pi \rightarrow r^2 h = 54 \rightarrow h = \frac{54}{r^2}$$

$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot \frac{54}{r^2} + 2\pi r^2 = \frac{108\pi}{r} + 2\pi r^2$$

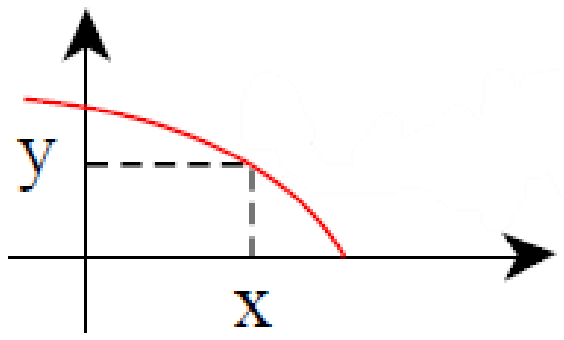
$$S' = 0 \rightarrow \frac{-108\pi}{r^2} + 4\pi r = 0 \rightarrow 4\pi r = \frac{108\pi}{r^2}$$

$$\rightarrow 4r^3 = 108 \rightarrow r^3 = 27 \rightarrow r = 3 \checkmark$$

$$S = \frac{108\pi}{3} + 2\pi \times 9 = 54\pi$$



حداکثر مساحت مستطیلی که بین منحنی $y = \sqrt{6-x}$ و محورهای مختصات محصور است، چقدر است؟



$S = xy$ $y = \sqrt{6-x}$

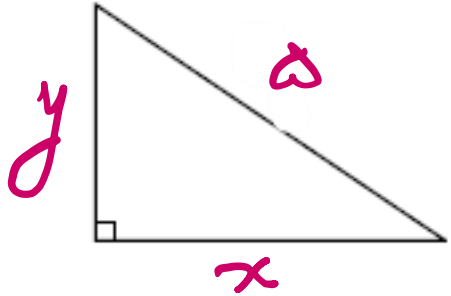
$S = x\sqrt{6-x} = \sqrt{6x^2 - x^3}$

$S' = 0 \rightarrow 12x - 3x^2 = 0 \rightarrow \underline{3x} (4-x) = 0 \rightarrow x = 4$

$S = x\sqrt{6-x} = 4\sqrt{2}$



۱۵) اگر x و y دو ضلع قائم از مثلثی به وتر ۵ باشند، بیشترین مقدار $x + 2y$ کدام است؟



$$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow y^2 = 25 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$$

$$y = \sqrt{25}$$

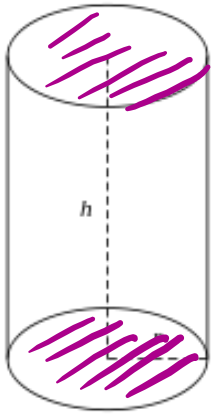
$$x + 2\sqrt{25 - x^2} \rightarrow 1 + 2 \left(\frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} \right) = 0$$

$$\frac{2x}{\sqrt{25 - x^2}} = 1 \rightarrow 2x^2 = 25 - x^2 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \sqrt{5}$$

$$x + 2y = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$



۱۶) می‌خواهیم یک مخزن استوانه‌ای با حجم 200π بسازیم. هزینه ساخت هر واحد سطح درپوش و کف مخزن ۸ و هر واحد سطح دیواره مخزن ۱۰ واحد قیمت است. ارتفاع استوانه را چه مقدار انتخاب کنیم تا هزینه ساخت حداقل شود؟



$$V = \pi r^2 h = 200\pi \rightarrow r^2 h = 200 \rightarrow h = \frac{200}{r^2} \rightarrow h = 1$$

هزینه $C = 2\pi r h \times 10 + 2\pi r^2 \times 8$

$$\rightarrow C = 2\pi r \cdot \frac{200}{r^2} \cdot 10 + 2\pi r^2 \times 8 = \frac{4000\pi}{r} + 16\pi r^2$$

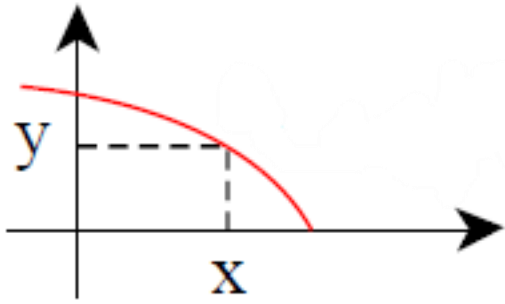
$$C' = 0 \rightarrow \frac{-4000\pi}{r^2} + 32\pi r = 0 \rightarrow 32\pi r = \frac{4000\pi}{r^2}$$

$$\rightarrow 32\pi r^3 = 4000\pi \rightarrow r^3 = 125 \rightarrow r = 5 \checkmark$$



۱۷) بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادله $y = \sqrt{12 - x}$ ، در ناحیه

اول واقع شود، کدام است؟



$$S = xy = x\sqrt{12-x}$$

$$S = \sqrt{12x^2 - x^3}$$

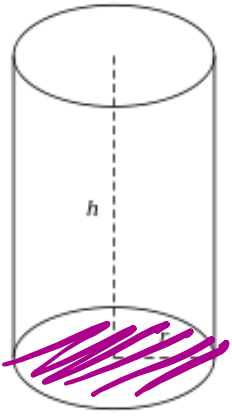
$$S' = 0 \rightarrow 12x - 1x^2 = 0$$

$$x(12 - x) = 0 \rightarrow x = 12$$

$$S = x\sqrt{12-x} = 12 \times 2 = 24$$



می خواهیم یک قوطی فلزی استوانه ای شکل با ضخامت معین و درباز بسازیم که گنجایش آن ۳۰۰۰ واحد مکعب باشد. ارتفاع قوطی کدام باشد تا مقدار فلز به کار رفته برای تولید آن مینیمم شود؟ ($\pi \simeq 3$)



$$V = \pi r^2 h = 1000 \rightarrow \pi r^2 h = 1000 \rightarrow h = \frac{1000}{r^2} \rightarrow h = 10$$

$$S = 2\pi r h + \pi r^2 = 2\pi r \cdot \frac{1000}{r^2} + \pi r^2 = \frac{2000\pi}{r} + \pi r^2$$

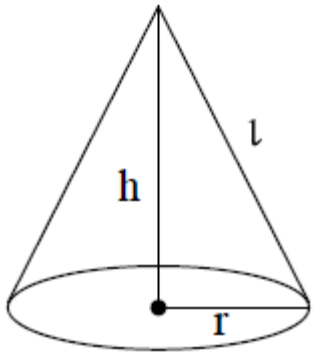
$$S' = 0 \rightarrow -\frac{2000\pi}{r^2} + 2\pi r = 0 \rightarrow 2\pi r = \frac{2000\pi}{r^2}$$

$$\rightarrow r^3 = 1000 \rightarrow r = 10 \checkmark$$



۱۹ در بین همه مخروط‌های قائم که طول مولد آنها ثابت است، آن که بیش‌ترین حجم را دارد در نظر می‌گیریم. نسبت ارتفاع به شعاع قاعده آن

کدام است؟



$$\frac{h}{r} = \frac{\frac{l}{\sqrt{3}}}{\frac{l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$l^2 = h^2 + r^2 \rightarrow r^2 = l^2 - h^2$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (l^2 - h^2) h = \frac{1}{3} \pi (l^2 h - h^3)$$

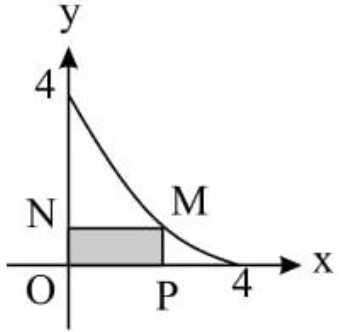
$$V' = 0 \rightarrow l^2 - 3h^2 = 0 \rightarrow h^2 = \frac{l^2}{3}$$

$$r^2 = l^2 - h^2 \rightarrow r^2 = l^2 - \frac{l^2}{3} = \frac{2}{3} l^2$$



۲۰) شکل زیر مربوط به تابع $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ است. اگر نقطه M همواره روی این تابع قرار داشته باشد، طول نقطه P چقدر باشد تا مساحت

مستطیل $ONMP$ ماکسیمم شود؟



۱
۲
۳
۴

۱
۳

$$S = xy = x(2 - \sqrt{x})^2$$

$$S' = 0 \rightarrow x = ? \rightarrow S = ?$$

$$\sqrt{y} = 2 - \sqrt{x} \rightarrow y = (2 - \sqrt{x})^2$$



خانه ریاضی علی هاشمی

Alihashemi-math.com



Freemath



Alihashemi_math