

آموزش ریاضی

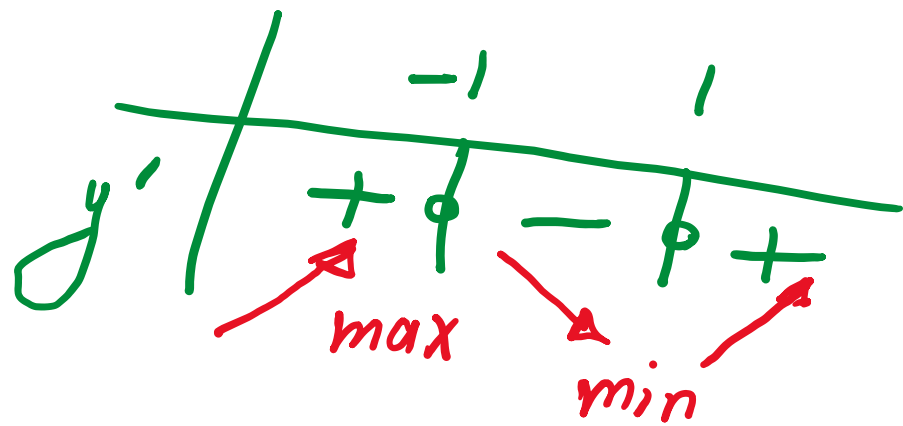
اکستریم نسبی

علی هاشمی

$$y = x^3 - 3x + 2$$

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow 3x^2 = 3 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

مغزین



$$x_{\max} = -1$$
$$x_{\min} = +1$$



1) اگر تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + a}$  دارای اکسترمم نسبی باشد، مقادیر  $a$  کدام است؟

$$y' = \frac{(2x - 2)(x + a) - (1)(x^2 - 2x)}{(x + a)^2}$$

توجه داشته باشید!

$$\rightarrow \underline{2x^2} + \underline{2ax} - \underline{2x} - \underline{2a} - \underline{x^2} + \underline{2x} = 0$$

$$\rightarrow x^2 + 2ax - 2a = 0$$

$$\Delta > 0$$

~~$$\Delta = 0$$~~

$$\Delta > 0 \rightarrow f(a^2 - f(1)(-2a)) > 0 \rightarrow \underline{f(a^2 + 2a)} > 0$$

$$\oplus f(a^2 + 2a) = 0$$

$$f(a(a+1)) = 0$$

$$| a = 0$$

$$| a = -1$$

$$\begin{array}{c} -1 \\ \hline + \quad | \quad - \quad | \quad + \\ \infty \quad \infty \quad \infty \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a > 0 \\ a < -1 \end{array}$$

$$(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$



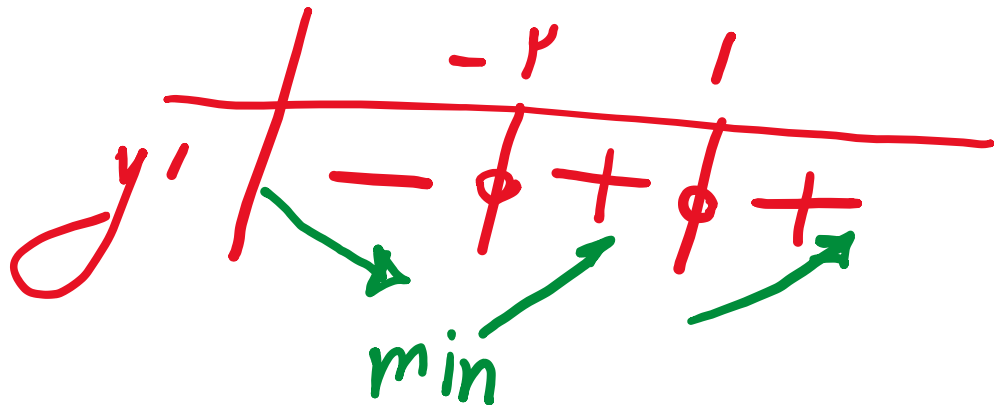
تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$  از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟ ۲

$$f' = 0 \rightarrow x^3 - 12x + 8 = 0 \quad \div 4 \rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$\textcircled{+} x^3 - x - 2x + 2 = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0$$

$$x(x-1)(x+1) - 2(x-1) = 0 \rightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\rightarrow (x-1)(x+2)(x-1) = (x-1)^2(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$



$$x_{\min} = -2$$

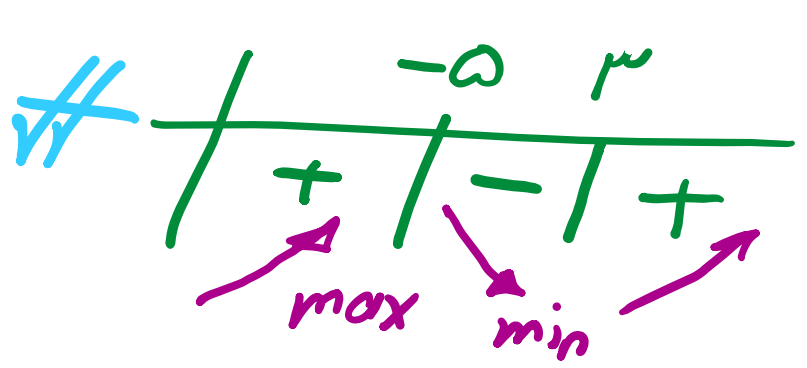


۳ دو نقطه به طول‌های ۳ و ۵ - نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$  هستند. مقدار بینیم نسبی این تابع، کدام است؟

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\begin{cases} f'(-5) = 0 \rightarrow 75 - 10a + b = 0 \\ f'(3) = 0 \rightarrow 27 + 6a + b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -45 \end{cases}$$

نقطه = 0



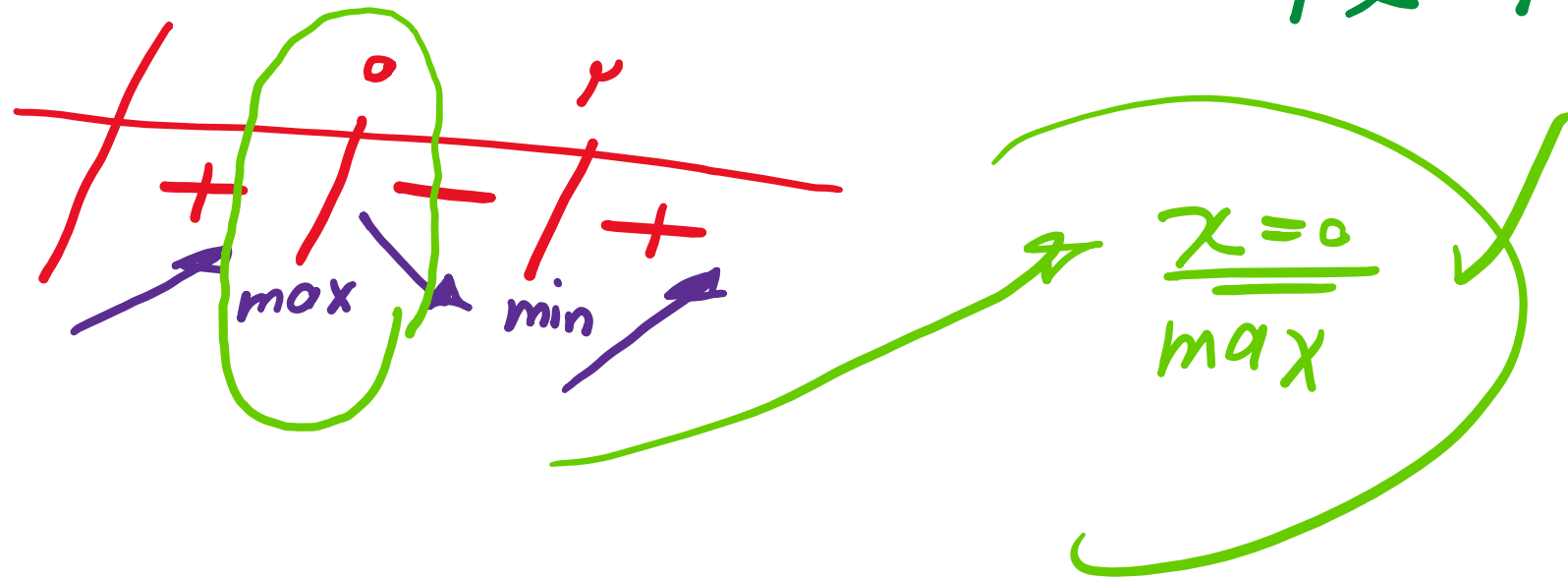
$$\begin{aligned} x_{\max} &= -5 \\ f_{\min} &= +3 \rightarrow f(3) = 27 + 27 - 135 \\ &= -81 \end{aligned}$$



نقطه‌ی بحرانی تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$  روی بازه‌ی  $(-1, 2)$  چگونه است؟ ۴

$$f'(x) = \frac{1}{3} (x^3 - 3x^2 + 4)^{-\frac{2}{3}} (3x^2 - 6x)$$

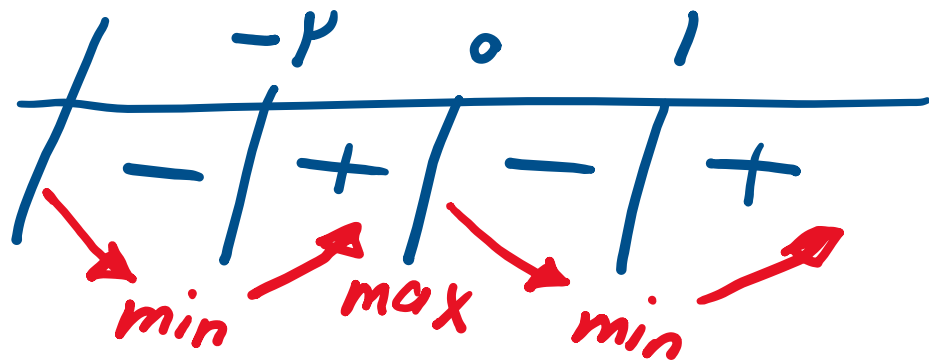
$$\oplus 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 3x(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$



طول نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$  کدام است؟

$$f' = 0 \rightarrow 4x^3 + 4x^2 - 8x = 0 \rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0$$

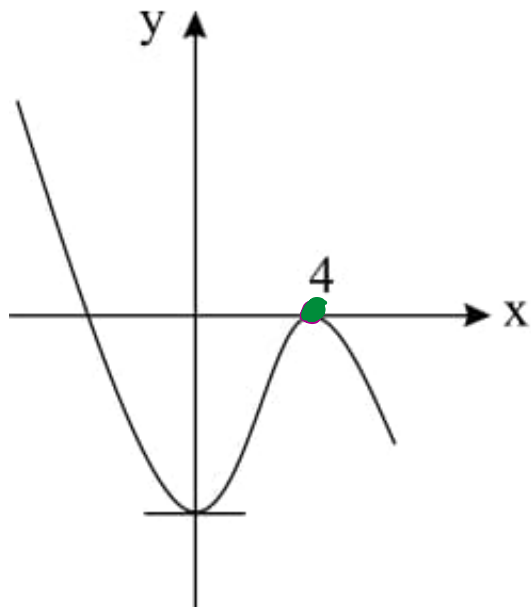
$$\rightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} x_{\min} = -2 \\ x_{\min} = +1 \\ x_{\max} = 0 \end{array}$$



شکل مقابل نمودار تابع به معادله  $y = ax^3 + bx^2 - 16$  است.  $a$  کدام است؟



$$\begin{aligned} x=4 \\ y=0 &\rightarrow 4^3a + 16b - 16 = 0 \\ &\rightarrow 4a + b = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(x=4) = 0 &\rightarrow 3ax^2 + 2bx \\ &\stackrel{\div 1}{\rightarrow} 3a + b = 0 \end{aligned}$$

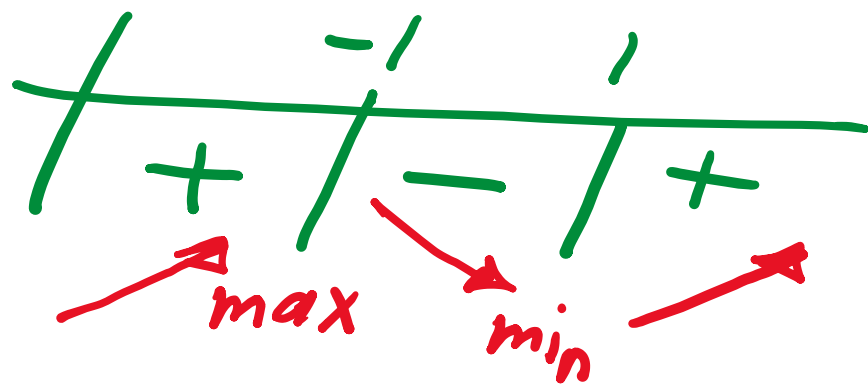
$$\begin{aligned} &\rightarrow \begin{cases} 4a + b = 1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \rightarrow a = -\frac{1}{4}, b = 1 \end{aligned}$$





7 در تابع با ضابطه  $f(x) = |x|x| - 2x$ ، فاصله دو نقطهٔ ماکسیم نسبی و مینیم نسبی آن، کدام است؟

$$f = \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow y = x^2 - 2x \rightarrow y' = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ x \leq 0 \rightarrow y = -x^2 - 2x \rightarrow y' = -2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$



$$\text{max} \begin{array}{|c} -1 \\ | \\ 1 \end{array} \quad \text{min} \begin{array}{|c} 1 \\ | \\ -1 \end{array}$$

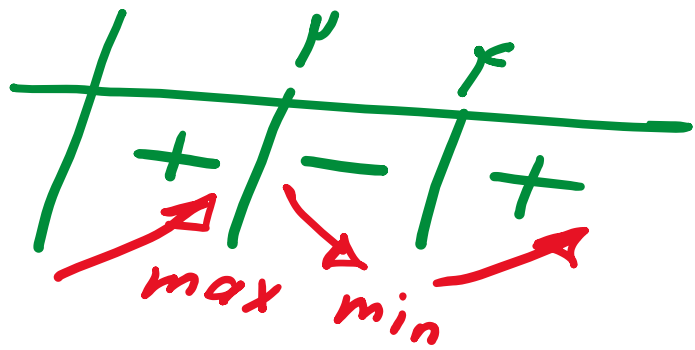
$$AB = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$



8 در تابع با ضابطه  $f(x) = |x|x - 4|$  فاصله دو نقطهٔ ماکسیم نسبی و مینیم نسبی آن، کدام است؟

$$x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$$

$$f = x^2 - 4x \rightarrow f' = 2x - 4 = 0 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$$



$$AB = \sqrt{4 + 14} = 2\sqrt{5}$$

$$f = \frac{(x-4)}{|x-4|} \quad x = 4x$$



۹ تابع  $y = x^3 + ax^2 + b$  در نقطه  $(2, 3)$  دارای مینیم نسبی است.  $b$  کدام است؟

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

$$3 = 1 + 4a + b \rightarrow 4a + b = -2$$

$$b = -2 - 4a$$

$$y' = 3x^2 + 2ax$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y'=0 \end{cases} \rightarrow 12 + 4a = 0 \rightarrow a = -3$$

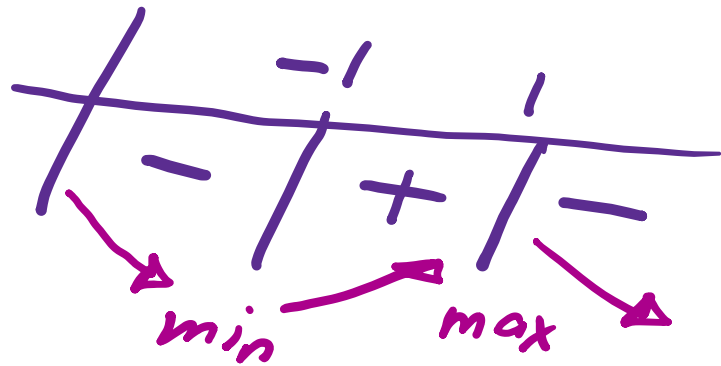


مقدار ماکسیمم تابع  $y = \frac{x}{1+x^2}$  چه قدر است؟

$$y' = \frac{1(1+x^2) - 2x(x)}{(1+x^2)^2}$$

$$\rightarrow 1 + x^2 - 2x^2 = 0$$

$$\rightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$



$$x_{\min} = -1$$

$$x_{\max} = 1$$

$$y = \frac{1}{2}$$



11 قرینه‌ی خطی که نقاط اکسترمم تابع  $f(x) = x^3 - 3x$  را به هم وصل می‌کند. نسبت به محور  $x$  ها کدام است؟

$$f' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow 3x^2 = 3 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$



$$m = \frac{2+2}{-1-1} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$y - 2 = -2(x + 1) \rightarrow y - 2 = -2x - 2 \rightarrow y = -2x$$

قرینه  
محور  $x$

$$-y = -2x \rightarrow y = 2x$$



عرض  $Max$  نسبی تابع با ضابطه‌ی  $y = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}$  کدام است؟

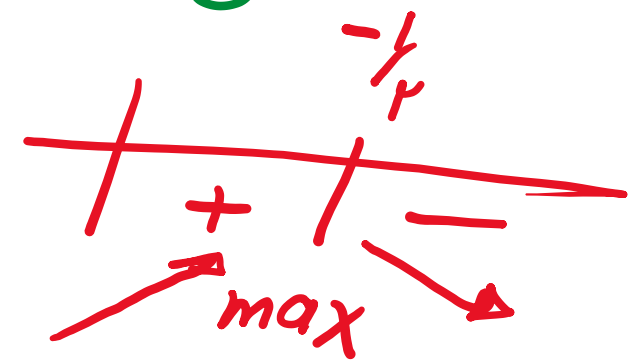
$\frac{3}{x^2} - 9x^{-3}$

$$y' = \frac{-6}{x^3} - \frac{3}{x^4}$$

$x^{-3} \rightarrow -3x^{-4}$

$min x$

$$y' = \frac{-6x - 3}{x^4} \rightarrow -6x - 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$



$$x_{max} = -\frac{1}{2} \rightarrow y = 12 - 8 = 4$$



فاصله‌ی نقطه‌های ماکسیمم و مینیمم نسبی منحنی  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$  از یکدیگر کدام است؟

$$y' = \frac{(1)(x^2 + 1) - (x)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow x^2 + 1 - 2x^2 = 0$$

$$\rightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

max  $A \mid \frac{1}{4}$

min  $B \mid -\frac{1}{4}$

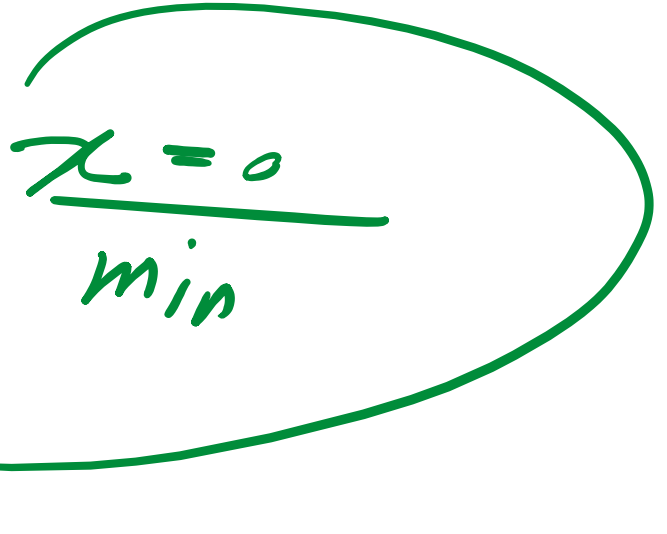
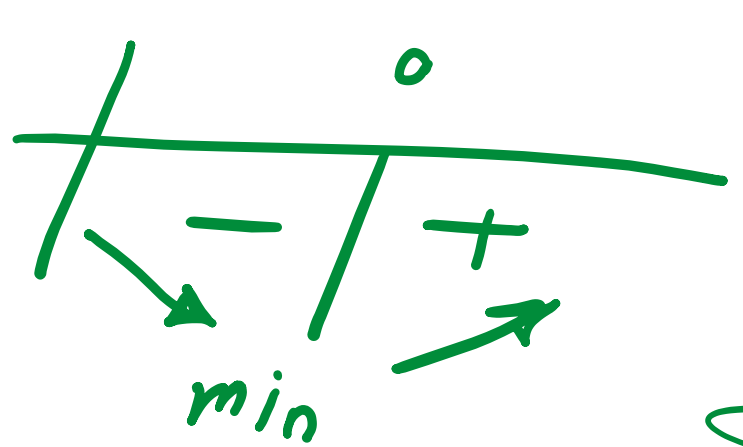
$$\rightarrow AB = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



نقطه‌ای به طول  $x = 0$  برای تابع با ضابطه‌ی  $y = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2}$  چگونه است؟

$$y' = \frac{(1-x^2)(2x) - (x^2+1)(-2x)}{(1-x^2)^2} \rightarrow 2x - 2x + 2x + 2x = 0$$

$$\rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0$$





۱۵) اگر  $(1, -2)$  نقطه‌ی مینیم نسبی تابع درجه‌ی سوم  $f(x) = ax^3 + bx$  باشد، آن گاه حاصل  $f(2)$  کدام است؟

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \rightarrow a+b=-2 \quad \checkmark$$

$$f' = 3ax^2 + b \quad \begin{cases} x=1 \\ y'=0 \end{cases} \rightarrow 3a+b=0 \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} 3a+b=0 \\ a+b=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(2) = 1 - 9 = -8 \quad \checkmark$$



# خانه ریاضی علی هاشمی

≠ [Alihashemi-math.com](http://Alihashemi-math.com)



Freemath



Alihashemi\_math