آموزش ریاضی

حد با مشتق

علی هاشمی

Alihashemi-math.com

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{Hop} \lim_{x \to 2} \frac{f'(x)}{1} = f'(2) = ?$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{5h} = \frac{0}{0} \xrightarrow{Hop} \lim_{h \to 0} \frac{f'(2+h)}{5} = \frac{f'(2)}{5} = ?$$

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' \cdot f'(u)$$

$$y = f(x^3 + x) \Rightarrow y' = (3x^2 + 1) \cdot f'(x^3 + x)$$

$$y = f\left(\sqrt{x^2 + 5x}\right) \Rightarrow y' = \frac{2x + 5}{2\sqrt{x^2 + 5x}} \cdot f'\left(\sqrt{x^2 + 5x}\right)$$

۱ اگر تابع f در $x=۴$ مشتق‌پذیر و $\frac{-۳}{۲} = \lim\limits_{x\to ۴} \frac{f(x)+۷}{x-۴}$ باشد، آنگاه مشتق $y=\frac{f(۲x)}{x}$ در $x=۲$، کدام است؟

$$\frac{f(۴)+۷}{۰}=\frac{-۳}{۲} \rightarrow \begin{cases} f(۴)+۷=۰ \rightarrow \boxed{f(۴)=-۷} \\ \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim\limits_{x\to ۴}\frac{f'(x)}{۱} = \boxed{f'(۴)=\frac{-۳}{۲}} \end{cases}$$

$$y'=\frac{۲f'(۲x)\cdot x - f(۲x)}{x^۲} \xrightarrow{x=۲} y'=\frac{۴f'(۴)-f(۴)}{۴}$$

$$y'=\frac{۴(\frac{-۳}{۲})-(-۷)}{۴}=\frac{-۶+۷}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

سایت خانه ریاضی علی هاشمی
Alihashemi-math.com

۲ اگر $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{f'(4-h)-f'(4+h)}$ کدام است؟

$\frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{-1\,f''(4-h)-f''(4+h)} = \frac{1}{-f''(4)-f''(4)} = \frac{-1}{2f''(4)}$

$y = x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{-1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \rightarrow y'' = \frac{3}{4}x^{-5/2}$

$f''(4) = \frac{3}{4}\times 4^{-5/2} = \frac{3}{4}\times\frac{1}{\sqrt{4^5}} = \frac{3}{4}\times\frac{1}{32} = \boxed{\frac{3}{128}}$

جواب $= \frac{-1}{2\left(\frac{3}{128}\right)} = -64/3$

۳ اگر $\lim\limits_{x\to(-۲)} \dfrac{f(x)-f(-۲)}{x+۲}$ برابر $\dfrac{۱}{۲}$ باشد، مشتق $y=f(\dfrac{۱}{x})$ در $x=-\dfrac{۱}{۲}$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{HoP} \frac{f'(x)}{1} = f'(-۲) = \boxed{\frac{1}{۲}}$$

$$y' = \underbrace{\frac{-1}{x^{۲}}}_{} \cdot f'\big(\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{}\big) \xrightarrow{x=-۱/۲} y' = -۴ \times f'(-۲)$$

$$y' = -۴\left(\frac{1}{۲}\right) = -۲$$

۴

۴ اگر $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{f(۳)-f(x)}{x-۳}$ برابر ۴ باشد، مشتق تابع $g(x)=f(\dfrac{۳}{x})$ در نقطهٔ $x=۱$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow[x\to ۳]{Hop} \frac{0-f'(x)}{1} = -f'(۳)=۴ \to \boxed{f'(۳)=-۴}$$

$$y'=\frac{-۳}{x^۲}\cdot f'\left(\frac{۳}{x}\right) \xrightarrow{x=۱} y'=-۳f'(۳)$$

$$y'=-۳(-۴)=۱۲$$

۵ اگر $\lim_{x\to ۱} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \frac{۳}{۲}$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$ ، آن گاه $(fog)'$ در $x=۰$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow[x\to 1]{HoP} \boxed{\frac{f'(x)}{1} = f'(1) = \frac{3}{2}}$$

$$y = f(g(x)) \longrightarrow y' = g'(x) \cdot f'(g(x)) \xrightarrow{x=0} y' = g'(0) \cdot f'(g(0))$$

$$g(x) = \sqrt{x+1} \longrightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \longrightarrow \begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y' = \frac{1}{2} \times f'(1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

۶ اگر تابع f در $x=-۲$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(-۲+h)+۳}{h}=\dfrac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه مشتق $y=x^۲ f(x)$ در $x=-۲$، کدام است؟

$$\frac{f(-۲)+۳}{۰}=\frac{۱}{۲}\rightarrow \begin{cases} f(-۲)+۳=۰ \rightarrow \boxed{f(-۲)=-۳} \\ \frac{۰}{۰}\xrightarrow[h\to ۰]{Hop}\frac{f'(-۲+h)}{۱}=\boxed{f'(-۲)=\frac{۱}{۲}}\end{cases}$$

$$y'=۲x\,f(x)+x^۲ f'(x)\xrightarrow{x=-۲} y'=-۴f(-۲)+۴f'(-۲)$$

$$y'=-۴(-۳)+۴\left(\frac{۱}{۲}\right)=۱۲+۲=۱۴$$

۷) اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=-\dfrac{۲}{۳}$ ، مقدار مشتق $y=f(\sqrt{۱-۳x})$ به ازای $x=-۱$ کدام است؟

$$\frac{0}{0}\xrightarrow[h\to 0]{HOP}\boxed{\frac{f'(۲+h)}{1}=f'(۲)=\frac{-۲}{۳}}$$

$$y'=\frac{-۳}{۲\sqrt{1-۳x}}\cdot f'(\sqrt{1-۳x})\xrightarrow{x=-1} y'=\frac{-۳}{۴}\cdot f'(۲)$$

$$y'=\frac{-۳}{۴}\left(\frac{-۲}{۳}\right)=\frac{1}{۲}$$

۸ اگر $\lim\limits_{x \to ۳} \dfrac{f(x) - f(۳)}{۶ - ۲x} = ۳$ باشد، مقدار مشتق $f(\dfrac{۲x + ۱}{x - ۱})$ به‌ازای $x = ۴$ کدام است؟

$$\frac{۰}{۰} \xrightarrow[x \to ۳]{HoP} \frac{f'(x)}{-۲} = \frac{f'(۳)}{-۲} = ۳ \Rightarrow \boxed{f'(۳) = -۶}$$

$$y' = \frac{-۲ - ۱}{(x-۱)^۲} \cdot f'\left(\frac{۲x+۱}{x-۱}\right) \xrightarrow{x=۴} y' = \frac{-۳}{۹} f'(۳)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-۱}{۳}(-۶) = ۲$$

۹) اگر $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+3h)-f(2)}{-h} = 2$، مقدار مشتق تابع $f(x^2+x)$ در $x=1$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow[h\to 0]{HoP} \frac{3f'(2+3h)-0}{-1} = -3f'(2) = 2 \rightarrow \boxed{f'(2) = -\frac{2}{3}}$$

$$y' = (2x+1).f'(x^2+x) \xrightarrow{x=1} y' = 3f'(2)$$

$$y' = 3\left(\frac{-2}{3}\right) = -2$$

۱۰ اگر $g(x)=x+\sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\dfrac{۴}{۳}$ باشد، $(fog)'(۱)$ کدام است؟

$\frac{0}{0} \xrightarrow[x\to 2]{HoP} \frac{f'(x)}{1} = f'(2)=\frac{4}{3}$ / $g'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y=f(g(x)) \longrightarrow y'=g'(x)\cdot f'(g(x)) \xrightarrow{x=1} y'=g'(1)\cdot f'(g(1))$

$\longrightarrow y'=\frac{3}{2}\times f'(2)=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}=2$

(۱۱) خط به معادلهٔ $y=۳x-۵$ در نقطهٔ $x=۲$ بر نمودار تابع $y=g(x)$ مماس است. اگر $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{۲x-۲}=\frac{۲}{۳}$ باشد، $(fog)'(۲)$

$g(۲)=۱ \longrightarrow \boxed{g'(۲)=۳}$

$\frac{0}{0} \xrightarrow[x\to ۱]{HoP} \frac{f'(x)}{۲} = \frac{f'(۱)}{۲}=\frac{۲}{۳} \longrightarrow \boxed{f'(۱)=\frac{۴}{۳}}$

$y=f(g(x)) \longrightarrow y'=g'(x).f'(g(x)) \xrightarrow{x=۲} y'=g'(۲).f'(g(۲))$

$y'=۳f'(۱)=۳\left(\frac{۴}{۳}\right)=۴$

سایت خانه ریاضی علی هاشمی

Alihashemi-math.com

۱۲ در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left(\sqrt{\dfrac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^{۳}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ ، کدام است؟

$\frac{۰}{۰} \xrightarrow[x\to ۲]{HoP} \frac{f'(x)}{۱} = f'(۲) = ?$

$y' = \frac{۳}{۲}y\left(\frac{۱}{x+۲}-\frac{۲}{۲x-۳}\right) \xrightarrow{x=۲} y' = \frac{۳}{۲}\times ۸\left(\frac{۱}{۴}-۲\right)$

$\to \boxed{y' = -۲۱}$ ✓

$y = f(۲) = \left(\sqrt{\frac{۴}{۱}}\right)^{۳} = ۲^{۳} = ۸$

۱۳ اگر $\lim\limits_{h\to ۰} \dfrac{f(x+h)-f(x-۲h)}{h} = \dfrac{x}{\sqrt{x^۲+۵}}$ ، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

$$\frac{۰}{۰} \xrightarrow{HoP} \lim_{h\to ۰} \frac{f'(x+h)+۲f'(x-۲h)}{۱} = ۳f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^۲+۵}}$$

$$\longrightarrow f'(x) = \frac{x}{۳\sqrt{x^۲+۵}} \longrightarrow f'(۲) = \frac{۲}{۳\times ۳} = \boxed{\frac{۲}{۹}}$$

۱۴ اگر $f(x)=\sqrt[۳]{۵x+۳}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$ کدام است؟

$$\frac{۰}{۰} \xrightarrow[x\to ۱]{HoP} \frac{f'(x)}{۱} = f'(۱) = ?$$

$$y' = \frac{۵}{۳\sqrt[۳]{(۵x+۳)^۲}} \xrightarrow{x=۱} f'(۱) = \frac{۵}{۳\times ۴} = \boxed{\frac{۵}{۱۲}} \checkmark$$

۱۵ اگر $f(x)=\dfrac{3x-3}{\sqrt{2x+1}}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{h\to 0}\frac{f'(4+h)}{1} = f'(4) = ?$$

$$y' = y\left(\frac{3}{3x-3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2x+1}\right)\right) \xrightarrow{x=4} y' = 3\left(\frac{3}{9}-\frac{1}{9}\right) = \boxed{\frac{2}{3}}\ \checkmark$$

$$y = f(4) = \frac{12-3}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

۱۶) اگر تابع f بر روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(h+۳)-۴}{h}=۵$، مشتق تابع $y=\dfrac{\sqrt{f(x)}}{x}$ در نقطهٔ $x=۳$ کدام است؟

$$\frac{f(۳)-۴}{۰}=۵ \rightarrow \begin{cases} f(۳)-۴=۰ \rightarrow \boxed{f(۳)=۴} \\ \frac{۰}{۰} \xrightarrow[h\to ۰]{HoP} \frac{f'(h+۳)}{۱}=\boxed{f'(۳)=۵} \end{cases}$$

$$y'=\frac{\frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}\cdot x-\sqrt{f(x)}}{x^۲} \xrightarrow{x=۳} y'=\frac{\frac{۵\times ۳}{۲\times ۲}-۲}{۹}=\frac{۷}{۳۶}$$

۱۷ تابع f مشتق‌پذیر است. اگر $\lim_{x\to ۲} \frac{f(x)+۲}{x-۲} = \frac{۱}{۲}$ باشد، معادله‌ی خط مماس بر تابع $y = xf(\sqrt{x})$ در نقطه‌ای به طول $x=۴$ واقع بر آن کدام است؟

$\frac{f(۲)+۲}{۰} = \frac{۱}{۲} \rightarrow \begin{cases} f(۲)+۲=۰ \rightarrow \boxed{f(۲)=-۲} \\ \frac{۰}{۰} \xrightarrow[x\to ۲]{HOP} \frac{f'(x)}{۱} = \boxed{f'(۲)=\frac{۱}{۲}} \end{cases}$

$y' = ۱ \times f(\sqrt{x}) + \frac{۱}{۲\sqrt{x}} f'(\sqrt{x}) \cdot x$

$\begin{cases} x_۰ = ۴ \\ y_۰ = ۴f(۲) = -۸ \\ m = f(۲) + f'(۲) = \frac{-۳}{۲} \end{cases}$

$y - y_۰ = m(x - x_۰)$

$y + ۸ = \frac{-۳}{۲}(x-۴)$

$۲y + ۱۶ = -۳x + ۱۲$

$\rightarrow \boxed{۳x + ۲y + ۴ = ۰}$ ✓

۱۸ در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\dfrac{۴x+۵}{x+۳}}$ ، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ ، کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{HoP} \lim_{h\to 0}\frac{f'(1+h)}{1} = f'(1) = ?$$

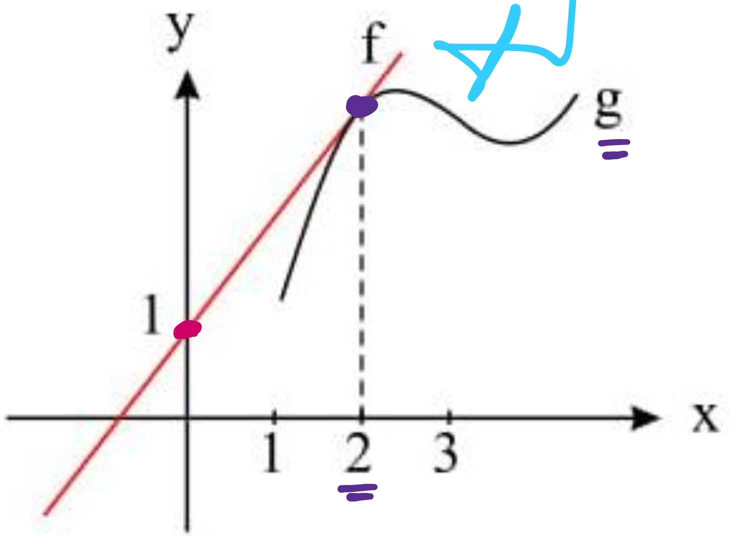
$$y' = \frac{1}{2}y\left(\frac{4}{4x+5}-\frac{1}{x+3}\right) \xrightarrow{x=1} y' = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow y' = \boxed{\frac{7}{48}}$$

$$y = f(1) = \sqrt{\frac{4+5}{1+3}} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

۱۹ در شکل زیر اگر داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(2x)-f(2)}{x-1} = 4$، آنگاه حاصل $f(1)+g'(2)$ چقدر است؟

$= 3+2 = \boxed{5}$



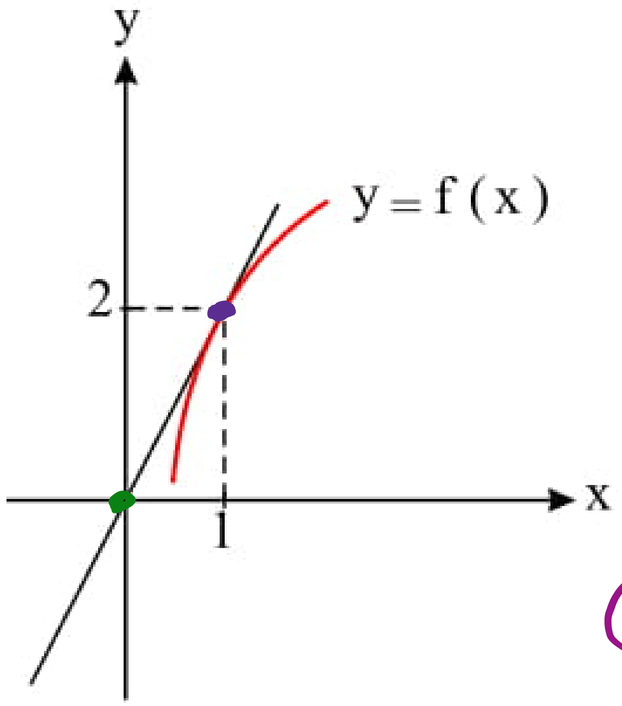
$\frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2f'(2x)}{1} = 2f'(2) = 4 \to \boxed{f'(2) = 2}$

$\to \boxed{f'(2) = g'(2) = 2}$

$y = ax+b \to \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2ax\cancel{+b}-2a\cancel{-b}}{x-1} = 4 \to 2a = 4 \to \boxed{a = 2}$

$\to y = 2x+b \xrightarrow[y=1]{x=0} \boxed{b = 1} \to \boxed{f(x) = 2x+1}$

۲۰ اگر خط مماس بر نمودار تابع f در $x = ۱$ به‌صورت زیر باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰} \dfrac{f(۱-h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟



$\frac{0}{0} \xrightarrow[h\to 0]{HoP} \frac{-f'(1-h)}{1} = -f'(1) = ?$

$A \Big|^{1}_{۲} \quad B \Big|^{0}_{0} \longrightarrow m_{AB} = \frac{۲}{1} = ۲$

$\xrightarrow{\text{مماس}} f'(1) = m_{AB} = ۲$

$\longrightarrow -f'(1) = -(۲) = -۲$