

# آموزش ریاضی

## آهنگ تغییر

### علی هاشمی

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت خانه ریاضی علی هاشمی است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

[Alihashemi-math.com](http://Alihashemi-math.com)

$$y = f(x)$$

این

$$1) \begin{cases} \text{میانگین} \\ x=a \\ x=b \end{cases} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$2) \begin{cases} \text{نقطه‌ای} \\ \text{رابطه} \\ x=a \end{cases} = f'(a)$$



در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع از  $x_1 = 4$  تا  $x_2 = 7$ ، برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در  $x = a$  است. مقدار مثبت  $a$  کدام است؟

$$\text{معدل} = \frac{f(7) - f(4)}{7 - 4} = \frac{\frac{49}{1} - \frac{16}{5}}{3} = \frac{117}{15} = \frac{39}{5}$$

$$y' = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} \xrightarrow{x=a} \frac{2a^2 + 2a - a^2}{(a+1)^2} = \frac{a^2 + 2a}{(a+1)^2}$$

$$\frac{(a+1)^2 - 1}{(a+1)^2} = 1 - \frac{1}{(a+1)^2} = \frac{39}{5} \rightarrow \frac{1}{(a+1)^2} = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow (a+1)^2 = 5 \rightarrow \begin{cases} a+1 = \sqrt{5} \rightarrow a = \sqrt{5} - 1 \checkmark \checkmark \\ a+1 = -\sqrt{5} \rightarrow a = -\sqrt{5} - 1 \times \end{cases}$$



۲) اگر آهنگ لحظه‌ای تغییر  $f$  در واحد تغییر  $x$  در  $x = 2$  برابر  $-\frac{3}{2}$  باشد، آن‌گاه حد عبارت  $\frac{f(2) - f(2+h)}{h}$  وقتی  $h \rightarrow 0$

برابر کدام است؟

$$f'(2) = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HoP}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - f'(2+h)}{1} = -f'(2) = -\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$



۳ در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر  $x$  در نقطه‌ی  $x = 1$  با نمو متغیر  $0,21$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

$$\begin{array}{l} \uparrow x=1 \\ \downarrow x=1,21 \end{array} \quad \text{مَوَظَع} = \frac{\sqrt{1,21} - \sqrt{1}}{1,21 - 1} = \frac{0,1}{0,21} = \frac{10}{21}$$

لحظه‌ای  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$   $\xrightarrow{x=1}$   $f'(1) = \frac{1}{2}$

جواب:  $\frac{1}{2} - \frac{10}{21} = \frac{1}{42}$



۴ آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = (6x + 2)^{\frac{2}{3}}$  در بازه‌ی  $[1, \frac{25}{6}]$  چقدر از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در شروع این بازه کمتر است؟

$$f\left(\frac{25}{6}\right) = (27)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = 9$$

$$f(1) = (1)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{1^2} = 1$$

$$\text{متوسط} = \frac{9 - 1}{\frac{25}{6} - 1} = \frac{8}{\frac{19}{6}} = \frac{48}{19}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} (6x + 2)^{-\frac{1}{3}} \cdot (6) \quad x=1 \rightarrow$$

$$\text{کف‌ها} : \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

$$\text{جواب} : 2 - \frac{48}{19} = \frac{1}{19}$$



۵ آهنگ متوسط تغییر تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$  نسبت به متغیر  $x$  روی بازه  $[0, 3]$ ، از آهنگ لحظه ای تابع در  $x = \sqrt{2}$  چقدر کمتر است؟

$$\text{متوسط} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{5 - 4}{3} = \frac{1}{3}$$

لحظه ای  $f'(x) = \frac{f'(x)}{f'(x)}$   $x = \sqrt{2}$   $\leftarrow$  لحظه ای  $= \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$

$$\text{جواب: } \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$



۶ در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{36}{x^2}$ ، آهنگ متوسط تابع از  $x_1 = 2$  تا  $x_2 = 3$  چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در  $x = \sqrt[3]{12}$  بیشتر است؟

متوسط:  $\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = 4 - 9 = -5$  ✓

$f(x) = 36x^{-2}$  و  $f'(x) = -72x^{-3} = \frac{-72}{x^3}$   $x = \sqrt[3]{12}$   $\frac{f'(x)}{f'(x)} = -9$

→  $-5 - (-9) = +4$  ✓





۷ آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \sqrt{x^2 + 144}$  نسبت به متغیر  $x$  روی بازه‌ای از  $x_1 = 5$  تا  $x_2 = 9$  کدام است؟

$$\text{متوسط} = \frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} = \frac{\sqrt{225} - \sqrt{149}}{4} = \frac{15 - 12}{4} = \frac{1}{4}$$



۸ آهنگ آنی تغییر مساحت یک دایره نسبت به شعاع  $r$  در  $r_0 = 10$  کدام است؟

۲۰π (۴)

۲۵π (۳)

۱۵π (۲)

۱۰π (۱)

$$S = \pi r^2 \rightarrow S' = 2\pi r$$

$r = 10$   $S(10) = 100\pi$



۹ در تابع با ضابطه  $f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از  $x_1 = 4$  تا  $x_2 = 12$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در  $x = 4$ ، چقدر بیشتر است؟

$$\text{متوسط} = \frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{1} = \frac{-\frac{1}{15}}{1} \checkmark$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2} (2x+1)^{-\frac{3}{2}} (2) \quad x=4 \rightarrow \text{لحظه‌ای} \quad f'(4) = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \times 2 = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \checkmark$$

$$\text{حوا} \quad \frac{-1}{15} - \left( \frac{-1}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{11}{30} \checkmark$$

$$9^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[2]{9^3}} = \frac{1}{18} \checkmark$$



۱۰ در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از  $x_1 = 4$  تا  $x_2 = 6,25$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در  $x = 4$ ، چقدر کمتر است؟

متوسط: 
$$\frac{f(6,25) - f(4)}{6,25 - 4} = \frac{2,5 - 2}{2,25} = \frac{0,5}{2,25} = \frac{2}{9}$$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$   $x=4$

لحظه‌ای  $f'(4) = \frac{1}{4}$

جواب: 
$$\frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}$$



۱۱) در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$  ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر  $x$  ، در  $x = 1$  با نمو  $0,44$  ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

$$f(x=1) \rightarrow \text{متوسط} = \frac{\frac{1,44-1}{\sqrt{1,44}} - 0}{1,44-1} = \frac{0,44}{1,2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \checkmark$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)}{(\sqrt{x})^2} \xrightarrow{x=1} \text{لحظه‌ای} = 1 \checkmark$$

$$\text{جواب: } 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$



۱۲) نقطه  $M(x, y)$  روی نمودار تابع  $y = \sqrt{7x + 4}$  در حال حرکت است. اگر  $d$  فاصله نقطه  $M$  از مبدأ مختصات باشد، آهنگ لحظه‌ای تغییر  $d$  نسبت به  $x$  در نقطه  $x = 5$  کدام است؟

$$L = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 7x + 4}$$

$$L' = \frac{2x + 7}{2\sqrt{x^2 + 7x + 4}} \quad x=5$$

$$\text{کدام} = \frac{17}{14}$$



۱۳) رباتی طبق معادله  $d(t) = t^3 - 11t^2 + 18t$  ( $0 \leq t \leq 3$ ) حرکت می کند. سرعت متوسط این ربات، بین زمان هایی که ربات مقادیر ماکسیمم و مینیمم را برای مکان خود اختیار می کند، کدام است؟

$$d' = 0 \rightarrow 3t^2 - 22t = 0 \rightarrow 3t(t - \frac{22}{3}) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \checkmark \\ t = \frac{22}{3} \checkmark \\ t = -\frac{22}{3} \times \end{cases}$$

$$d(0) = 18$$

$$d(2) = -18$$

$$d(3) = 27$$

$$\max \Big|_{27}$$

$$\min \Big|_{-18}$$

$$\rightarrow \text{اخذ متوسط} = \frac{27 - (-18)}{3 - 2} = 45$$



۱۴) یک ظرف آب مشتمل بر ۴۰ لیتر آب است در لحظه  $t = 0$  یک سوراخ در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم آب باقی مانده در ظرف،

پس از  $t$  ثانیه از رابطه  $V = 40 \left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$  به دست آید، در چه زمانی آهنگ آبی تغییر  $V$  برابر آهنگ متوسط تغییر آن از  $t = 0$  تا

$t = 100$  (ثانیه) است؟

$$\text{متوسط} = \frac{V(100) - V(0)}{100 - 0} = \frac{0 - 40}{100} = \frac{-40}{100}$$

$$V' = 40 \times 2 \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)' \left(-\frac{1}{100}\right)$$

$$40 \times 2 \times \left(1 - \frac{t}{100}\right) \left(-\frac{1}{100}\right) = \frac{-40}{100} \rightarrow 2 \left(1 - \frac{t}{100}\right) = 1$$

$$1 - \frac{t}{100} = \frac{1}{2} \rightarrow 100 - t = 50 \rightarrow t = 50$$





۱۵) یک توده‌ی باکتری پس از  $t$  ساعت دارای جرم  $m(t) = ۲t^۳ + \sqrt{t}$  گرم است. آهنگ رشد جرم توده‌ی باکتری در لحظه‌ی  $t = ۴$  کدام است؟

۲۴,۰۶ (۴)

۱۹۲,۵ (۳)

۴۸,۱۲۵ (۲)

۹۶,۲۵ (۱)

$$m'(t) = ۶t^۲ + \frac{1}{2\sqrt{t}} \xrightarrow{t=۴} m'(t) = ۹۶ + ۰,۱۲۵$$

→  $\frac{1}{2\sqrt{t}}$  = ۰,۱۲۵



۱۶) نقطه‌ی  $M(x, y)$  بر روی منحنی به معادله‌ی  $y = \sqrt{x+1}$  در حرکت است.  $T$  فاصله‌ی نقطه‌ی  $M$  تا مبدا مختصات است. آهنگ

لحظه‌ای تغییر  $T$  در نقطه‌ای به طول  $x = 7$  کدام است؟

$$T = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$\rightarrow T' = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} \quad x=7 \rightarrow$$

$$\text{کدام} = \frac{15}{14}$$



۱۷) آهنگ متوسط تغییر مساحت یک دایره نسبت به شعاع وقتی شعاع از  $r = 1$  به  $r = 3$  تغییر می‌کند، چقدر از آهنگ لحظه‌ای تغییر

مساحت در  $r = 1.5$  بیشتر است؟

$$S = \pi r^2$$

$$\text{متوسط} = \frac{S(3) - S(1)}{3 - 1} = \frac{9\pi - \pi}{2} = 4\pi \quad \checkmark$$

لحظه‌ای  $S' = 2\pi r \xrightarrow{r=1.5} S'(1.5) = 3\pi \quad \checkmark$

$$4\pi - 3\pi = \pi \quad \checkmark$$



معادله حرکت متحرکی به صورت  $f(t) = t^3 - 2t^2 + 3t + 1$  بر حسب متر است. اگر سرعت لحظه‌ای آن در لحظه  $t = a$  برابر

سرعت متوسط در بازه  $[0, a]$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

$$f'(t) = 3t^2 - 4t + 3 \quad t=a \rightarrow f'(a) = 3a^2 - 4a + 3$$

$$\text{متوسط} \quad \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{a^3 - 2a^2 + 3a + 1 - 1}{a} = a^2 - 2a + 3$$

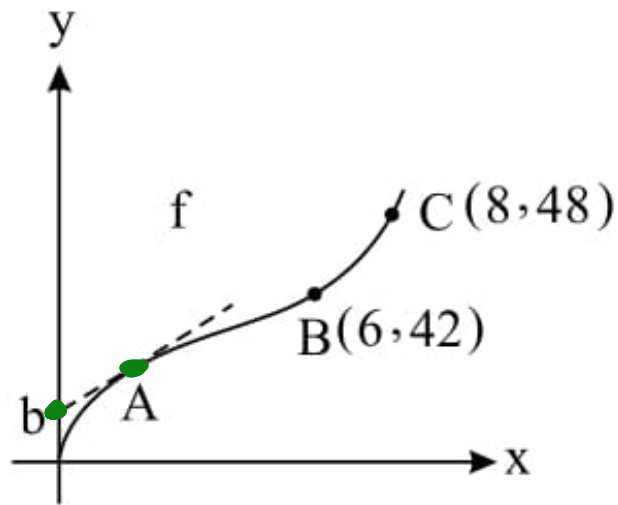
$$3a^2 - 4a + 3 = a^2 - 2a + 3 \rightarrow 2a^2 - 2a = 0$$

$$a = 1$$

$$a = 0 \quad \times$$
  
$$a = 1$$



۱۹ در شکل زیر قسمتی از نمودار تابع  $f$  رسم شده است. اگر آهنگ متوسط تغییر تابع بین نقاط  $B$  تا  $C$ ،  $\frac{b}{a}$  برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر



تابع در نقطه  $A$  باشد، حاصل  $\frac{b}{a}$  کدام است؟

$$\text{میانگین } BC = \frac{f(8) - f(6)}{8 - 6} = \frac{48 - 42}{2} = 3$$

$$\text{لحظه‌ای } f'(a) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{l} 10 \\ 1b \\ 1a \\ 12a \end{array} \rightarrow \frac{2a - b}{a - 0} = \frac{1}{2} \rightarrow 2a - 2b = a \rightarrow 2a = 2b \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$$

$$\text{میانگین } = 3 \rightarrow \text{لحظه‌ای } = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2}$$



۲۰ در تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه  $[0, 4]$  از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در  $x = \frac{3}{2}$  چقدر کمتر است؟

$$\text{میانگین} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{\left(1 + \frac{1}{5}\right) - (1+1)}{4} = 0/3$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2} \quad \xrightarrow{x = \frac{3}{2}} \quad \text{لحظه‌ای} = 0/34$$

$$\text{جواب: } 0/34 - 0/3 = 0/04$$





سایت خانه ریاضی علی هاشمی  
[Alihashemi-math.com](http://Alihashemi-math.com)

خانه ریاضی علی هاشمی

Alihashemi-math.com



Freemath



Alihashemi\_math