

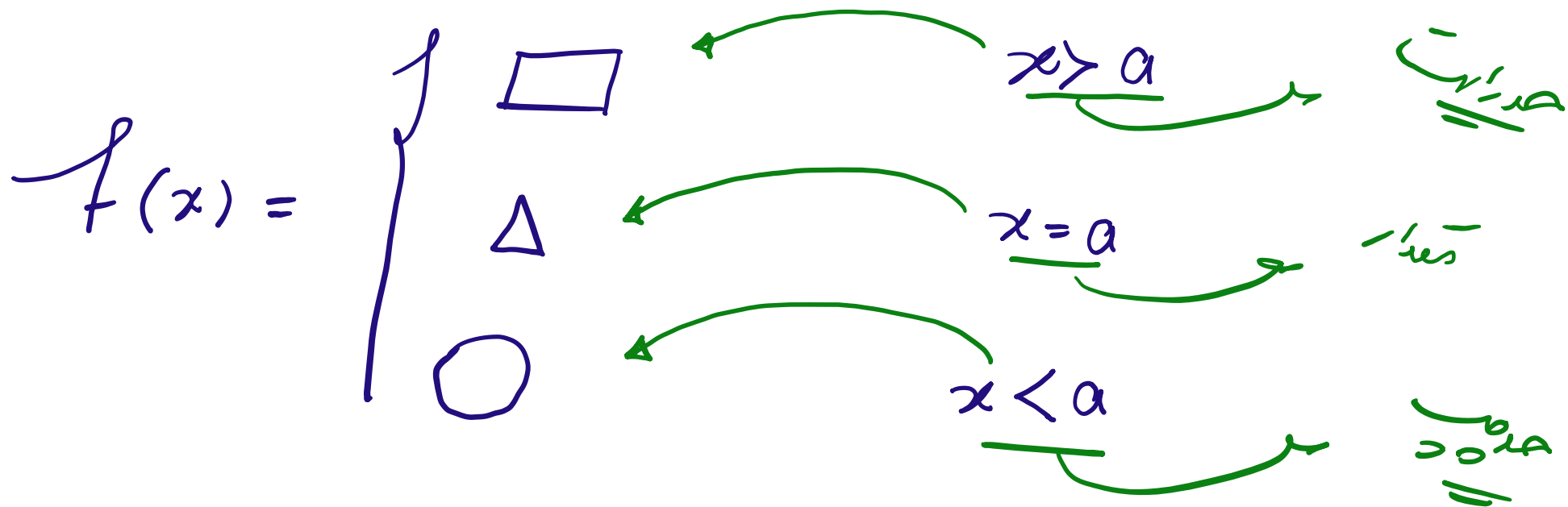
آموزش ریاضی

پیوستگی

علی هاشمی

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت خانه ریاضی علی هاشمی است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

Alihashemi-math.com



پیوستگی \iff حد از چپ $=$ مقدار $=$ حد از راست

1 تابع با ضابطه‌ی $\begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & ; |x| > 1 \\ 2x & ; |x| \leq 1 \end{cases}$ ، از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های 1 و -1 چگونه است؟

حد برای $x > 1$ → $|x| > 1$
 حد برای $x < -1$ → $|x| > 1$

حد برای $x \leq 1$ → $-1 \leq x \leq 1$
 حد برای $x \geq -1$ → $-1 \leq x \leq 1$

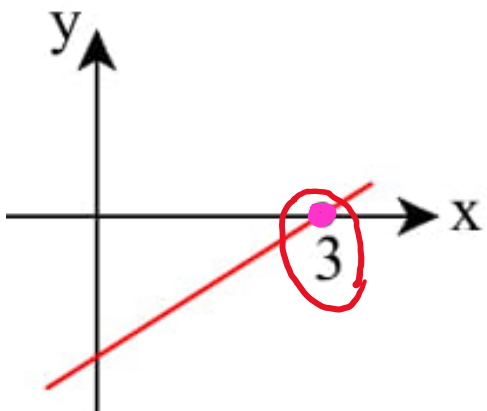
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{0}{0} \xrightarrow{H.o.P} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x}{1} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -2 = f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1-1}{1+1} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 = f(1)$$

پیوسته
 $x = -1$

پیوسته
 $x = 1$



نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x + b}{x - a} & x \neq a \\ -5 & x = a \end{cases}$ به صورت زیر است. $a + b$ کدام است؟

$$f(a) = -5$$

$$f(3) = 0 \rightarrow \frac{9 - 3 + b}{3 - a} = 0 \rightarrow b = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - x - 9}{x - a} = f(a) \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{(a - 3)(a + 3)}{a - a} = \frac{0}{0} = -5$$

$$a - 3 = 0 \rightarrow a = 3 \rightarrow f(3) = 0$$

$$a + 3 = 0 \rightarrow a = -3$$

$$a + b = -3 - 9 = -12$$

$f(x) = \begin{cases} [-x] & ; x < -2 \\ |x - \frac{1}{a}| & ; x \geq -2 \end{cases}$ در $x = -2$ پیوسته باشد، آنگاه مقدار $f(a)$ کدام است؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است. اگر $\textcircled{3}$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} [-x] = [-(-2)] = [2] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = |-2 - \frac{1}{a}| = |2 + \frac{1}{a}|$$

$$|2 + \frac{1}{a}| = 2 \rightarrow \begin{cases} 2 + \frac{1}{a} = 2 \rightarrow \frac{1}{a} = 0 \quad \times \\ 2 + \frac{1}{a} = -2 \rightarrow \frac{1}{a} = -4 \rightarrow a = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left| -\frac{1}{4} + 2 \right| = \frac{7}{4}$$

آپ ← درس

آیا تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \dots$ در $x = 1$ پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{1 + 3x^2 - x^3}}{(x-1)^3} & ; x \neq 1 \\ \frac{\sqrt[3]{a}}{3} & ; x = 1 \end{cases}$$

تابع با ضابطه‌ی ۴

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{1 + 3x^2 - x^3}}{(x-1)^3} \times \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{1 + 3x^2 - x^3}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{1 + 3x^2 - x^3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\underbrace{\sqrt[3]{x} - 1}_{(x-1)^3} - \underbrace{3x^2 + x^3}_{(x-1)^3}}{(x-1)^3 (\sqrt[3]{x} + \sqrt{1 + 3x^2 - x^3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{1 + 3x^2 - x^3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{3} a \rightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x[x] & ; x < 3 \\ x^2 + ax & ; x \geq 3 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 3$ پیوسته است. a کدام است؟ ۵

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 + ax = 9 + 3a$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x[x] = 3[3^-] = 3 \times 2 = 6$$

$$f(3) = 9 + 3a$$

$$9 + 3a = 6 \rightarrow 3a = -3 \rightarrow a = -1$$



۶ اگر تابع $f(x)$ در $x = 3$ پیوسته باشد، خط $x = 5$ نمودار تابع f را با چه عرضی قطع می کند؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 + x + 6}{x - 3} & x < 3 \\ -2x + b & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = -4 + b \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x^2 + x + 6}{x - 3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2x + 1}{1} = -5 \quad \checkmark$$

$$\rightarrow -4 + b = -5 \rightarrow b = 1$$

$$f(5) = -2(5) + 1 = -10 + 1 = -9$$



با کدام مجموعه مقادیر a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+a} & ; x \geq -1 \\ x^2 + ax & ; x < -1 \end{cases}$ در $x = -1$ پیوسته است؟ ۷

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = \frac{1}{-1+a}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = (-1)^2 + a(-1) = 1 - a$$

$$\frac{1}{-1+a} = 1 - a \rightarrow (1-a)(-1+a) = 1 \rightarrow -(a-1)(a-1) = 1$$

$$\rightarrow (a-1)^2 = -1 \rightarrow X$$



پيوسته است؟ $x = \pi$ در $f(x) = \begin{cases} \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}, & \pi < x < 2\pi \\ \frac{\pi}{x} + \frac{\alpha}{\pi}, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

به ازای کدام مقدار α ، تابع

۸

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{1 - \cos x} = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = f(\pi) = \frac{\pi}{\pi} + \frac{\alpha}{\pi} = 1 + \frac{\alpha}{\pi}$$

$$1 + \frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\alpha}{\pi} = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2}$$



به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x[-x] & x < -2 \\ -2 & x = -2 \\ \frac{x^2 - 4}{ax + 2a} & x > -2 \end{cases}$ پیوسته است؟ ([] نماد جزء صحیح است.) ۹

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} x[-x] = -2[-(-2)] = -2 \times 2 = \underline{\underline{-4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 4}{ax + 2a} \xrightarrow{\text{HOP}} \frac{2x}{a} = \frac{-4}{a}$$

$$f(-2) = \underline{\underline{-2}}$$

پیوسته از بالا: $\frac{-4}{a} = -2 \rightarrow a = 2$

پیوسته از پایین: $\frac{-4}{a} = -4 \rightarrow a = 1$

۱۰ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x^2-4} & x < 2 \\ k + [x] & x \geq 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته باشد، k کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = k + 2$$

$$k + 2 = \frac{-1}{4} \rightarrow k = -\frac{9}{4}$$



۱۱) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{3 - x} & , x \neq 3 \\ m & , x = 3 \end{cases}$ در نقطه $x = 3$ پیوستگی چپ داشته باشد، m کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{3-x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{3-x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{3-x} = 1$$

$\rightarrow m = 1$



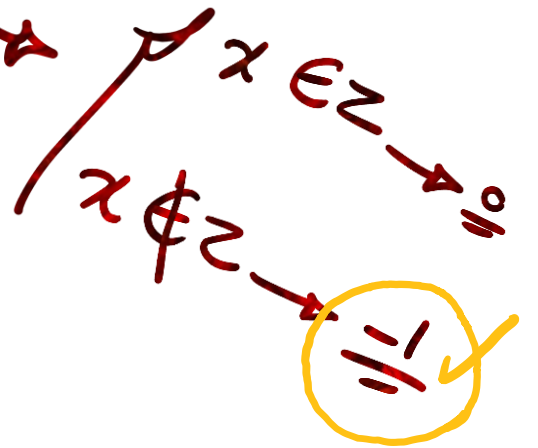
۱۲ تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{2|x|}{x} & , x > 1 \\ 2 & , x = 1 \\ -2([\![x]\!] + [\![-x]\!]) & , x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ چگونه است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- ۱ فقط از راست پیوسته است. ۲ فقط از چپ پیوسته است. ۳ از چپ و راست ناپیوسته است. ۴ پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2|x|}{x} = \frac{2}{1} = 2$$

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2([\![x]\!] + [\![-x]\!]) = 2$$



۱۴ ✓

تابع ۱۳ $f(x) = \begin{cases} \frac{[x] + m}{|x|} & , x < 2 \\ kx & , x = 2 \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2} & , x > 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته است. مقدار $k \times m$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] + m}{|x|} = \frac{1 + m}{2}$$

$$f(2) = 2k$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

$$2k = \epsilon \rightarrow k = 2$$

$$\frac{1+m}{2} = \epsilon \rightarrow m = 7$$

در تابع $f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin^2 x - \cos x \sin x}$ مقدار $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ را چه مقداری تعریف کنیم تا تابع در $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته باشد؟ (۱۴)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{\cos x} - \cancel{\sin x}^{-1}}{\sin x (\cancel{\sin x} - \cancel{\cos x})} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

۱۵) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} & ; x \neq 2 \\ a & ; x = 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، در نقطه‌ی $x = 2$ پیوسته است؟

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2x}}}{-1} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

$$\rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

۱۶ اگر $f(x) = \begin{cases} x+a & ; x < 1 \\ 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x+1 & ; x < 1 \\ \frac{a}{x+1} & ; x \geq 1 \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a ، تابع $f+g$ در $x=1$ پیوسته است؟

$$f+g = \begin{cases} x+1+a & ; x < 1 \\ \frac{a}{x+1} + 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

← $x < 1$ (مقدار)
← $x \geq 1$ (مقدار)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1+a) = 1+a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \frac{a}{1+1} + 1$$

$$1+a = \frac{a}{1} + 1$$

$$1+a = a+1$$

$$a = -a$$

$$f(1) = \underline{\underline{2}}$$

در $x = 1$ چه وضعی دارد؟

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x > 1 \\ 2 & x = 1 \\ \frac{\sqrt{x} - 1}{x^3 - 1} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

تابع $x = 1$ (۱۷)

(۴) ناپیوسته است.

(۳) پیوسته است.

(۲) از راست پیوسته است.

(۱) از چپ پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \xrightarrow{H=0/0} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1} = \underline{\underline{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^3 - 1} \xrightarrow{H=0/0} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{3x^2} = \frac{1}{4}$$

در تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\cot x - 1}{\sin x - \cos x} & , x \neq \frac{\pi}{4} \\ k & , x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ به ازای کدام مقدار k تابع در $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته است؟ (۱۸)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cot x - 1}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - 1}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{\cos x} - \cancel{\sin x} - 1}{\sin x - (\cancel{\sin x} - \cancel{\cos x})} = \underline{-\sqrt{2}}$$

$$k = -\sqrt{2}$$



پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} 3x + \frac{2x}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a برقرار است؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + \frac{2x}{x} = 0 + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x + \frac{-2x}{x} = 0 - 2 = -2$$

در $x=0$ ناپیوستگی



۲۰ به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & x \geq -2 \\ 3x-1 & x < -2 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = -2$ پیوسته است؟

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = (-2+a)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -7$$

$$\frac{(-2+a)^2 = -7}{\text{~~~~~}} \quad \times$$



خانه ریاضی علی هاشمی

Alihashemi-math.com



Freemath



Alihashemi_math