

# آموزش ریاضی

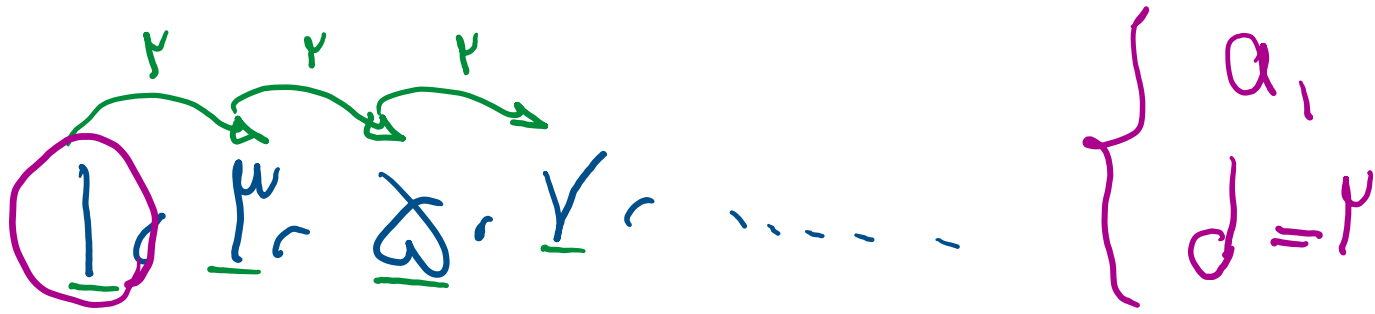
## دنباله حسابی

### علی هاشمی

 Alihashemi\_math

 Freemath

# دنباله حسابی



$n$  جمله :  $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_2 = a_1 + r d$$

$$a_{100} = a_1 + 99 d$$



## حسابی - عددی

۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ...

$$+۳ +۳ +۳$$

الف) نوع دنباله را مشخص کنید.

ب) جمله عمومی دنباله را بدست آورید.

پ) جمله دوازدهم دنباله را بدست آورید.

ت) جمله چندم این دنباله برابر با ۲۰ است؟

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1) \times 3 = 2 + 3n - 3 \rightarrow a_n = 3n - 1$$

$$a_n = 3n - 1 \rightarrow a_{12} = 3(12) - 1 = 35$$

$$\frac{a_n = 20}{n = ?} \rightarrow 3n - 1 = 20 \rightarrow 3n = 21 \rightarrow n = 7$$



جمله یازدهم و هفدهم یک دنباله حسابی به ترتیب برابر ۲۵ و ۳۷ است.  $a_1$  و  $d$  و جمله عمومی را بدست آورید.

$$\begin{cases} a_{17} = 37 \\ a_{11} = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 + 16d = 37 \\ a_1 + 10d = 25 \end{cases} \xrightarrow{d=2} \begin{cases} a_1 + 16 = 37 \\ a_1 + 10 = 25 \end{cases}$$

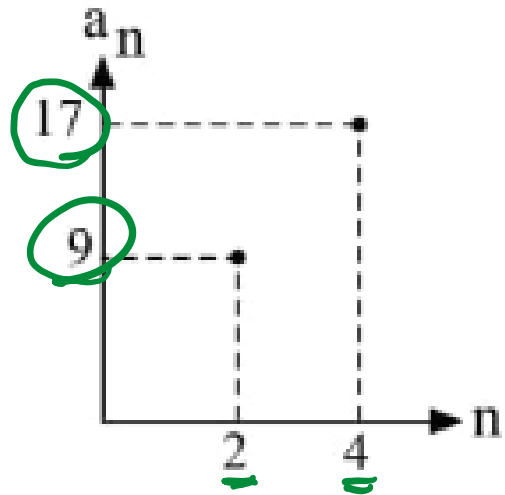
$6d = 12 \rightarrow d = 2$        $a_1 = 5$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 5 + (n-1) \times 2 = 5 + 2n - 2 \rightarrow a_n = 2n + 3$$



نمودار شکل زیر، برخی از جملات یک دنباله حسابی را نشان می دهد. جمله چندم این دنباله برابر ۶۵ می باشد؟



$$\begin{cases} a_3 = 17 \\ a_2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 17 \\ a_1 + d = 9 \end{cases}$$

$$d = 8 \rightarrow d = 8 \checkmark$$

$$a_1 + 8 = 9 \rightarrow a_1 = 1 \checkmark$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_n = 1 + (n-1) \times 8$$

$$a_n = 65 \rightarrow 65 = 1 + (n-1) \times 8 \rightarrow 64 = (n-1) \times 8$$

$$n-1 = \frac{64}{8} = 8 \rightarrow n = 9 \checkmark$$



جمله اول یک دنباله حسابی نصف جمله سوم است. جمله پنزدهم این دنباله چند برابر قدر نسبت آن است؟

$$\underline{a_1} = \frac{1}{\underline{r}} \underline{a} \rightarrow r a_1 = \underline{a} = a_1 + r d \rightarrow a_1 = r d$$

$$\frac{a_{15}}{d} = \frac{a_1 + 14d}{d} = \frac{rd + 14d}{d} = 14$$



مجموع ۵ جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی حسابی صعودی مساوی ۶۰ و مجموع دو جمله‌ی بزرگ‌تر سه برابر مجموع سه جمله‌ی کوچک‌تر است.

$$\underline{a_1} + \underbrace{a_2}_{a_1+d} + \underbrace{a_3}_{a_1+2d} + \underbrace{a_4}_{a_1+3d} + \underbrace{a_5}_{a_1+4d} = \underline{60}$$

$$\underbrace{a_4}_{a_1+3d} + \underbrace{a_5}_{a_1+4d} = 3 \left( \underbrace{a_1}_{a_1+d} + \underbrace{a_2}_{a_1+2d} + \underbrace{a_3}_{a_1+3d} \right)$$

$$\begin{cases} 5a_1 + 10d = 60 \\ -va_1 - rd = 0 \end{cases}$$

$$-va_1 - rd = 0$$

---


$$\begin{cases} a_1 = -r \\ d = v \end{cases}$$



در دنباله حسابی مجموع سه جمله اول آن ۳۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۶۰ می باشد. جمله هشتم آن، کدام است؟

$$a_1 + \underbrace{a_2}_{a_1+d} + \underbrace{a_3}_{a_1+2d} = 33$$

$$\begin{cases} 3a_1 + 3d = 33 \\ 3a_1 + 12d = 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 3 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{a_8}_{a_1+7d} + \underbrace{a_9}_{a_1+8d} + \underbrace{a_{10}}_{a_1+9d} = 60$$

$$a_8 = a_1 + 7d = 1 + 7 \times 3 = 22 \quad \checkmark$$





# واسطه حسابی - درج عدد

a, b, c

حسابی

→  $b = \frac{a+c}{2}$



بین ۳۲ و ۶۸ سه واسطه حسابی قرار دهید.

$$\frac{۳۲}{a_1} , \frac{۴۱}{a_۲} , \frac{۵۰}{a_۳} , \frac{۵۹}{a_۴} , \frac{۶۸}{a_۵}$$

$$\begin{cases} a_۵ = ۶۸ \\ a_1 = ۳۲ \end{cases} \rightarrow a_1 + ۴d = ۶۸ \rightarrow ۴d = ۳۶ \rightarrow d = 9$$



بین ۱۲ و ۵۲ چهار عدد طوری قرار دهید که اعداد حاصل تشکیل یک دنباله ی حسابی بدهند.

$$\frac{12}{a_1}, \quad \frac{20}{a_2}, \quad \frac{28}{a_3}, \quad \frac{36}{a_4}, \quad \frac{44}{a_5}, \quad \frac{52}{a_6}$$

$$a_6 = a_1 + 5d \rightarrow 12 + 5d = 52 \rightarrow d = \frac{40}{5} = 8$$



بین اعداد ۱۳۹۶ و ۱۳۰۰، پنج عدد قرار داده‌ایم تا ۷ عدد تشکیل دنباله حسابی دهند. در این صورت بزرگ‌ترین عدد از بین ۵ عدد ۱۳۰۰

$$\frac{1300}{a_1}, \frac{\checkmark}{a_2}, \frac{\checkmark}{a_3}, \frac{\checkmark}{a_4}, \frac{\checkmark}{a_5}, \frac{1380}{a_6}, \frac{1396}{a_7}$$

$$a_7 = a_1 + 6d \rightarrow 1300 + 6d = 1396 \rightarrow 6d = 96 \rightarrow d = \frac{96}{6} = \underline{16}$$



اگر  $x, y, z, \dots$  پنج جمله اول یک دنباله حسابی باشند، حاصل  $\frac{xy}{z}$  کدام است؟

$5$   $13$   
 $a_5$   $a_8$

$$\begin{cases} a_5 = 13 \\ a_8 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 + 4d = 13 \\ a_1 + 7d = 5 \end{cases} \xrightarrow{d=2} a_1 + 14 = 5 \rightarrow a_1 = -9$$

$$2d = 14 \rightarrow d = 7 \rightarrow a_1 = -9$$

-9, 1, 8, 15, 22

$$\frac{xy}{z} = \frac{2(-9)(1)}{8} = -\frac{9}{4}$$



# مجموع n جمله اول

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$



در یک دنباله‌ی حسابی مجموع یازده جمله‌ی اول صفر است. چندمین جمله‌ی دنباله برابر صفر است؟

$$\sum_{n=1}^{11} = 0$$

$$\sum_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

$$\sum_{n=11} = \frac{11}{2} (2a_1 + 10d) = 11 (a_1 + 2d) = 0$$

$$a_7 = 0$$



در یک دنباله‌ی حسابی جملات سوم و پانزدهم به ترتیب ۱۳ و ۳۷ می‌باشند. مجموع ۱۰ جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

$$\begin{cases} \sum a_n = 37 \\ a_n = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum a_n + 14d = 37 \\ a_n + 14d = 13 \end{cases} \xrightarrow{d=2} a_n + 28 = 13$$
$$14d = 24 \Rightarrow d = 2 \quad a_1 = 9$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (2 \times 9 + 9 \times 2)$$

$$\frac{10}{2} (2 \times 18) = 180$$





مجموع ۱۰ جمله‌ی اول در دنباله‌ی حسابی ۱, ۵, ۹, ۱۳, ... کدام است؟

$$a_1 = 1 \quad d = 4$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + \underline{\underline{(n-1)d}})$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} \left( \underbrace{2 \times 1}_{2} + \underbrace{9 \times 4}_{36} \right) = 40$$



مجموع جملات دنباله  $۳, ۸, ۱۳, ۱۸, \dots, ۲۰۳$  کددام است؟

$$a_1 = ۳$$

$$a_n = ۲۰۳$$

$$S_n = \frac{n}{۲} (a_1 + a_n) = \frac{۲۱}{۲} \left( \frac{۳ + ۲۰۳}{۲} \right) = ۱۰۵ \times ۱۰۳$$

~~$$a_n = a_1 + (n-1)d$$~~

$$۲۰۳ = ۳ + (n-1) \times ۵ \longrightarrow ۲۰۰ = (n-1) \times ۵$$

$$\longrightarrow n-1 = ۴۰ \longrightarrow \underline{n = ۴۱}$$



مجموع ۳۰ عدد طبیعی فرد متوالی، با کوچکترین عدد ۵۱، کدام است؟

$51$ ,  $53$ ,  $d=2$ ,  $n=30$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{30} = \frac{30}{2} (2 \times \underline{51} + 29 \times 2) = 2 \Sigma_{50}$$





مجموع اعداد طبیعی فرد و متوالی شروع از ۲۳ و ختم به ۶۱، کدام است؟

$$\textcircled{23} \quad \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \quad \textcircled{61}$$

$$S_n = \frac{10}{2} (23 + 61) = 110$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$61 = 23 + (n-1) \times 2 \rightarrow n = 10$$



مجموع چند جمله از دنباله‌ی عددی  $۲, ۶, ۱۰, \dots$  برابر جمله‌ی  $۱۳$  ام است؟

$$a_1 = \underline{۲} \quad d = ۴$$

$$a_{۱۳} = a_1 + ۱۲d = ۲ + ۱۲ \times ۴ = \underline{۵۰}$$

$$S_n = \frac{n}{۲} (۲a_1 + (n-1)d) \rightarrow ۵۰ = \frac{n}{\textcircled{۲}} (\underline{۲} + \underline{۴}(n-1))$$

$$\rightarrow ۵۰ = \underline{n} (\underline{۲} + \underline{۴}(n-1)) \rightarrow \underline{۲n} = ۵۰$$

$$\rightarrow \underline{n} = ۲۵ \quad \rightarrow \textcircled{n = ۲۵}$$



اگر مجموع  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  برابر  $5050$  شود، مقدار  $n$  را بیابید.

$$\frac{n(n+1)}{2} = 5050 \rightarrow n(n+1) = 10100$$

$$\rightarrow \underline{n}(\underline{n+1}) = \underline{100} \times \underline{101}$$

$$n = 100$$



در دنباله‌ی اعداد  $1, 4, 7, 10, \dots$  مجموع اعدادی که از جمله‌ی هفتم شروع و به جمله‌ی هجدهم ختم می‌شود را محاسبه کنید.

$$\boxed{a_7 + a_8 + \dots + a_{18}} = \underline{\underline{S_{18}}} - \underline{\underline{S_6}} = ?$$

$$S_{18} = \frac{18}{r} (r + 17 \times r)$$

$$S_6 = \frac{6}{r} (r + 5 \times r)$$

$$429$$





اگر در یک دنباله‌ی حسابی مجموع  $n$  جمله‌ی اول از رابطه‌ی  $s_n = n^2 + n$  به دست آید، جمله‌ی عمومی

$$\underline{n=1} \longrightarrow S_1 = a_1 = 2$$

$$\underline{n=2} \longrightarrow S_2 = a_1 + a_2 = 6 \longrightarrow a_2 = 4$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 6 \end{cases} \longrightarrow d = 2$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 2 + (n-1) \times 2$$

$$a_n = 2n$$



اگر مجموع  $n$  جمله‌ی اول از دنباله‌ی عددی به صورت  $S_n = \frac{n^2 - 3n}{3}$  باشد، جمله‌ی دهم را به دست آورید.

$$n=1 \rightarrow S_1 = a_1 = \frac{1-3}{3} = \frac{-2}{3} \rightarrow a_1 = \frac{-2}{3}$$

$$n=2 \rightarrow S_2 = a_1 + a_2 = \frac{-2}{3} \rightarrow a_2 = 0$$

$$d = a_2 - a_1 \rightarrow d = \frac{2}{3}$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = \frac{-2}{3} + 9\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}$$



در یک دنباله‌ی عددی به جمله‌ی اول ۴ واحد و به قدر نسبت ۲ واحد اضافه می‌کنیم. به جمع ۱۰ جمله‌ی اول چه قدر اضافه خواهد

$$S_n = \frac{n}{r} (ra_1 + \underline{(n-1)d})$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} \left( \frac{4}{2} + \frac{9}{2}(d + 2) \right)$$

$$\frac{10}{2} \times 29 = \underline{\underline{145}}$$



اگر به اختلاف مشترک یک دنباله‌ی حسابی ۲ واحد افزوده شود، به مجموع ۵ جمله‌ی اول آن چند واحد اضافه خواهد شد؟

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)(d+2))$$

$$\frac{n}{2} \times A^k = 2n$$



در یک دنباله‌ی عددی  $a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 20$  مقدار  $S_{13}$  را به دست آورید.

$$a_1 + 3d + a_1 + 5d + a_1 + 7d + a_1 + 9d = 20$$

$$\rightarrow 4a_1 + 12d = 20 \rightarrow \underline{a_1 + 3d = 5}$$

$$S_{13} = \frac{13}{2} (2a_1 + 12d) = 13 (a_1 + 3d) = 13 \cdot 5 = 65$$



حاصل  $۲^۲ - ۱^۲ + ۴^۲ - ۳^۲ + ۶^۲ - ۵^۲ + \dots + ۱۰۰^۲ - ۹۹^۲$  را به دست آورید

$$\frac{(۲-۱)(۲+۱)}{۲} + \frac{(۴-۳)(۴+۳)}{۲} + \frac{(۶-۵)(۶+۵)}{۲} + \dots + \frac{(۱۰۰-۹۹)(۱۰۰+۹۹)}{۲}$$

$۲, ۴, ۶, ۸, \dots, ۱۰۰ \rightarrow \begin{cases} a_1 = ۲ \\ d = ۲ \end{cases}$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) = \frac{۱۰۰}{2} (۲ + ۹۹ \times ۲) = ۱۰۰۰$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$۱۰۰ = ۲ + (n-1) \times ۲ \rightarrow \underline{\underline{n = ۵۰}}$$



در یک دنباله حسابی، مجموع ۵ جمله ی اول آن،  $\frac{1}{3}$  مجموع پنج جمله ی بعدی است. جمله ی دوم چند برابر جمله ی اول است؟

$$S_5 = \frac{1}{3} (S_{10} - S_5)$$

$$\rightarrow 3S_5 = S_{10} - S_5 \rightarrow 4S_5 = S_{10}$$

$$4 \times \frac{5}{2} (2a_1 + 5d) = \frac{10}{2} (2a_1 + 9d) \rightarrow d = 2a_1$$

$$\frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} = \frac{a_1 + 2a_1}{a_1} = 3$$



در یک دنباله‌ی عددی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم

$$S_{20} = 3S_{12} \rightarrow \frac{20}{2} (2a_1 + 19d) = 3 \times \frac{12}{2} (2a_1 + 11d)$$

$$a_{10} = 4 \rightarrow a_1 + 9d = 4$$

$$\begin{cases} 2a_1 = -2 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = -1 + 3 \times 2 = 5$$





علی در ابتدای ماه ۱۰۰۰ تومان در جعبه‌ی پس‌انداز خود می‌گذارد و هر روز ۵۰۰ تومان بیشتر از روز قبل در جعبه قرار می‌دهد. در پایان این ماه، علی چند تومان پس‌انداز کرده است؟ (ماه را ۳۰ روزه فرض کنید).

$$a_1 = 1000$$

$$d = 500$$

$$n = 30$$

$$S_n = \frac{n}{r} (ra_1 + (n-1)d)$$

$$= \frac{30}{r} (r \times 1000 + 29 \times 500)$$

$$= 247500$$



شخصی در ماه اول  $A$  تومان پس انداز کرده و در هر ماه به اندازه‌ی  $\left(\frac{1}{20}A\right)$  بیشتر از ماه قبل پس انداز می‌کند تا مقدار پس انداز یک ماه آن

به دو برابر پس انداز ماه اول برسد. اگر در این زمان، مجموع پس انداز وی ۶۳۰۰۰ تومان باشد، اولین پس انداز وی چه قدر بوده است؟

$$a_1 = A \quad d = \frac{1}{20}A \quad a_n = 2A$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \rightarrow \quad 2A = A + (n-1) \times \frac{1}{20}A \quad \rightarrow \quad n = 21$$

$$S_n = 42000 \quad \rightarrow \quad A = ?$$

$$42000 = \frac{21}{2} \left( 2A + \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} A \right) \quad \rightarrow \quad A = 2000$$



یک شرکت تولیدی تا پایان سال اول ۸۰۰ واحد کالا تولید می‌کند و در نظر دارد که پس از گذشت هر سال، به‌طور مرتب ۹۰ واحد کالا به تولید سال قبل خود اضافه کند. پس از گذشت ۴ سال، جمعاً چند واحد کالا می‌تواند تولید کند؟

$$a_1 = 1000 \quad d = 90 \quad n = 4$$

$$S_4 = \frac{4}{1} (1 \times 1000 + 3 \times 90) = 1270$$



# خانه ریاضی علی هاشمی

[Alihashemi-math.com](http://Alihashemi-math.com)

