

آموزش ریاضی

اعمال جبری روی تابع

علی هاشمی

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت خانه ریاضی علی هاشمی است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

Alihashemi-math.com

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \rightarrow D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \rightarrow D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow D_{f/g} = (D_f \cap D_g) - \{g=0\}$$



اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$ و $g(x) = \sqrt{x-2}$ دو تابع باشند، آن گاه مطلوبست محاسبه $(4f - 3g)(6)$

$$4f(6) - 3g(6) = 4 \left(\frac{6+1}{6-4} \right) - 3 \left(\sqrt{6-2} \right) = ?$$



اگر $f = \{(1, -4), (2, 7), (3, 5), (4, 9)\}$ و $g = \{(-1, 3), (0, 2), (2, 4), (3, 1)\}$ باشند، آنگاه توابع $f+g$

$$f \oplus g = \{(2, 11), (3, 4)\}$$



$$\frac{1}{f+g} = ?$$

۱) $\frac{1}{f} = ?$

۲) $\frac{1}{g} = ?$

۳) $\frac{1}{f} \cap \frac{1}{g} = ?$

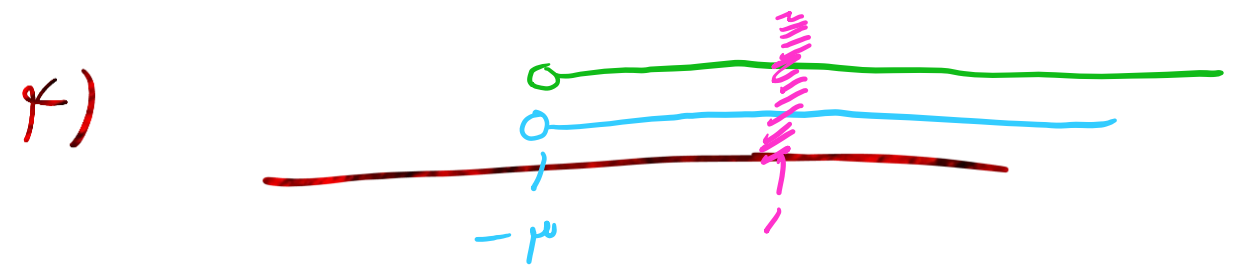


اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$ و $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}}$ باشد، دامنه‌ی تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ را بدست آورید.

۱) $x+3 > 0 \rightarrow x > -3$ ✓

۲) $x+3 > 0 \rightarrow x > -3$ ✓

۳) $x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$ ✓



$$D_{f/g} = (-3 + \infty) - \{1\}$$

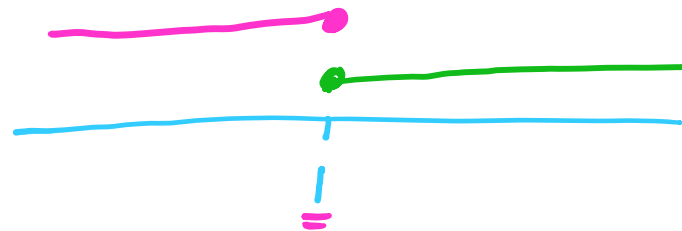
۱ اگر $f(x) = \sqrt[3]{n - 3x}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x - 3m}$ تابع $f + g$ به صورت $\{(1, a)\}$ باشد، آن گاه مقدار $am + n$ کدام است؟

$$n - 3x \geq 0 \rightarrow -3x \geq -n \rightarrow x \leq \frac{n}{3}$$

$$x - 3m \geq 0 \rightarrow x \geq 3m$$

$$\frac{n}{3} = 1 \rightarrow n = 3$$

$$3m = 1 \rightarrow m = \frac{1}{3}$$



$$f(1) + g(1) = a \rightarrow \sqrt[3]{1 - 3} + \sqrt[3]{1 - 3 \times \frac{1}{3}} = 0 \rightarrow a = 0$$

$$am + n = 0 + 3 = 3$$



۲ اگر $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g = \{(-3, \underline{5}), (-1, \underline{4}), (0, \underline{7})\}$ آن گاه بیشترین مقدار تابع $(g-f) \cdot 2g$ کدام است؟

$$g-f = \{(-3, \underline{5} - \sqrt{-1}), (-1, \underline{4} - 0), (0, \underline{7} - 1)\}$$

$$(g-f) \cdot 2g = \{(-1, \frac{4 \times 1}{2}), (0, \frac{7 \times 1}{2})\}$$

max \rightarrow ۱۴



۳ اگر $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x+4}}$ و $g(x) = \frac{x^2-25}{\sqrt{x+4}}$ باشند، دامنه تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

۱) $x+4 > 0 \rightarrow x > -4$ ✓

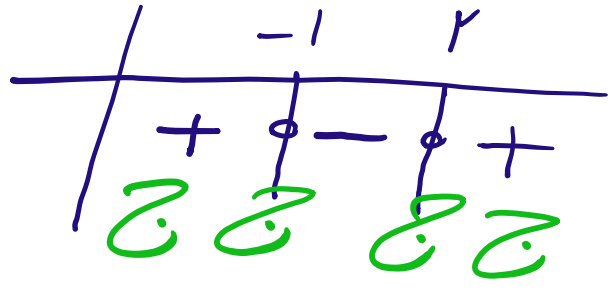
۲) $x+4 > 0 \rightarrow x > -4$ ✓

۳) $x^2 - 25 \neq 0 \rightarrow x \neq 25 \rightarrow x \neq \pm 5$ ✓

۴) $D_{f/g} = (-4, +\infty) - \{5, -5\}$

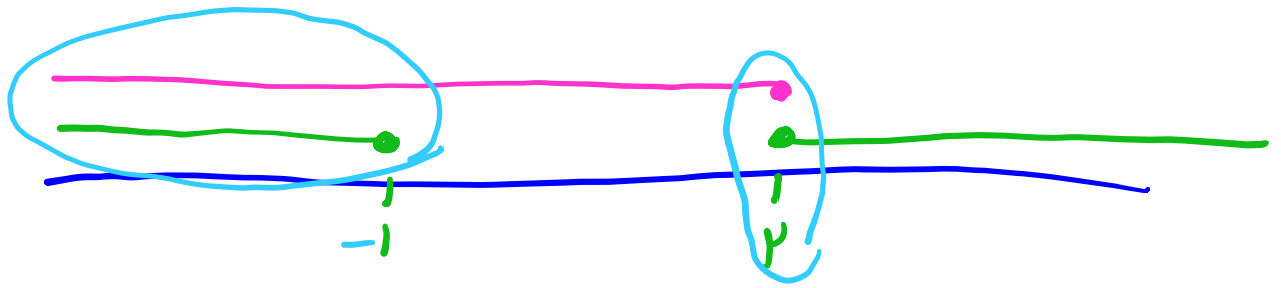
دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} - \sqrt{2 - x}$ کدام است؟ ۴

$$x^2 - x - 2 \geq 0 \rightarrow \underline{x^2} - \underline{x} - \underline{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$



$$\rightarrow D_f = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$$

$$2 - x \geq 0 \rightarrow -x \geq -2 \rightarrow x \leq 2$$



$$D_f = (-\infty, -1] \cup \{2\}$$

۵ اگر $f(x) = \underline{x + \sqrt{x}}$ و $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ باشد، آن گاه برد تابع $(g - f)(x)$ کدام است؟

$$g(x) - f(x) = 1 + \sqrt{x} - x - \sqrt{x} = \underline{\underline{1 - x}} \quad \checkmark$$

$$x \geq 0$$

$$x = 0$$
$$f = \underline{\underline{1}}$$

$$\mathbb{R}$$
$$g - f$$

$$= (-\infty, 1]$$



۶ اگر $f(x) = \sqrt{x+3}$ و $g(x) = \sqrt{a-x+2b}$ ، $D_{f-g} = [-3, 10]$ و $(f+g)(6) = 6$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

$$x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3$$

$$a-x \leq 0 \rightarrow x \leq a$$

$$D_f \cap D_g$$

$$[-3, a]$$

$$a=10$$

$$(f+g)(6) = 6 \rightarrow 3+2+2b = 6 \rightarrow 2b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$a+b = 10 + \frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$$



۷ اگر داشته باشیم:

$$\frac{f}{g} = \left\{ (4, -5), \left(2, -\frac{3}{5} \right) \right\} \text{ و } g = \left\{ (4, 1-n), (-2, 1), (2, 5), (-3, n+2) \right\}, f = \left\{ (1, 3), (4, m), (2, -n^2+1), (-3, 1) \right\}$$

آن گاه حاصل $n - m$ کدام است؟

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(4, \frac{m}{1-n} \right), \left(2, \frac{-n^2+1}{5} \right), \left(-3, n+2 \right) \right\}$$

$$n+2=0 \rightarrow n=-2 \quad \checkmark$$

$$\frac{m}{1-(-2)} = -5 \rightarrow m = -15 \quad \checkmark$$

$$\rightarrow n-m = -2+15 = 13$$

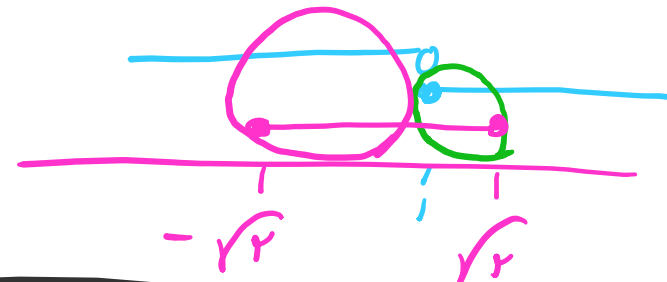


سایت خانه ریاضی علی هاشمی

Alihashemi-math.com

اگر $f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 1 \\ 1 & , x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \sqrt{2-x^2}$ ، آنگاه تعداد صفرهای تابع $f+g$ کدام است؟ (۸)

$$2-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 2 \rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$



$$f+g = \begin{cases} \sqrt{2-x^2} + 1 & -\sqrt{2} \leq x < 1 \\ \sqrt{2-x^2} + x & 1 \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

بدین شکل

$$\sqrt{2-x^2} + 1 = 0 \rightarrow \sqrt{2-x^2} = -1 \quad \times$$

$$\sqrt{2-x^2} + x = 0 \rightarrow \sqrt{2-x^2} = -x \rightarrow 2-x^2 = x^2 \rightarrow 2x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 1$$

$$\rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \begin{cases} x=1 \quad \times \\ x=-1 \quad \times \end{cases}$$

اگر $f = \{(-1, -2), (0, 4), (1, 9), (4, 0)\}$ و $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ باشد تابع $\frac{2f+g}{g}$ کدام است؟ ۹

$$\frac{2f+g}{g} = \left\{ \left(0, \frac{2+0}{0} \right), \left(1, \frac{2+2}{2} \right), \left(4, \frac{0+1}{1} \right) \right\}$$

$$\rightarrow \left\{ (1, 1), (4, 1) \right\}$$



هرگاه $f(x) = \sqrt{\underbrace{[x] + [-x]}_0}$ و $g = \{(\frac{1}{2}, 1), (0, \underline{-1}), (3, \frac{-1}{2}), (-1, 2), (\sqrt{2}, 3)\}$ باشد، بیشترین مقدار تابع $h = 3g - 2f$ کدام خواهد بود؟

$$3g - 2f = \left((0, -3 - 0) \left(3, \frac{-3}{2} - 0 \right) (-1, 2 - 0) \right)$$

$$\rightarrow \left((0, -3) \left(3, -\frac{3}{2} \right) (-1, 2) \right)$$

نکته

$$[x] + [-x] = \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \rightarrow \underline{0} & \checkmark \\ x \notin \mathbb{Z} \rightarrow \underline{-1} & \times \end{cases}$$

۱۱ اگر f و g دو تابع خطی باشند به طوری که $\begin{cases} (f+g)(x) = 2x+1 \\ (g-f)(x) = x-2 \end{cases}$ حاصل $f(1) + g(3)$ کدام است؟

$$+ \begin{cases} f(x) + \underline{g(x)} = 2x+1 \\ g(x) - f(x) = x-2 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = \underline{\underline{\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}}$$

$$2g(x) = 3x-1 \rightarrow g(x) = \underline{\underline{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}}$$

$$f(1) + g(3) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} \times 3 - \frac{1}{2}\right) = 9$$



۱۲ اگر $f(x) = x + 1$ و $g(x) = (4 - 2a)x^2 - 6$ و $(f - g)(-1) = -3$ باشد آن گاه a کدام است؟

$$(f - g)(-1) = -3 \rightarrow \underline{f(-1)} - g(-1) = -3$$

$$\cancel{(-1+1)} \ominus (4 - \overset{-2a-2}{2a} - 6) = -3$$

$$\rightarrow 2a + 2 = -3 \rightarrow 2a = -5 \rightarrow a = -\frac{5}{2}$$



۱۳ اگر $f = \{(2, 1), (-1, 2), (4, 2)\}$ و $g = \{(2, -2), (4, 3), (-1, 0)\}$ باشند. حاصل $\frac{3f+g}{g}$ کدام است؟

$$\frac{3f+g}{g} = \left\{ \left(2, \frac{3-2}{-2} \right), \left(4, \frac{9+3}{3} \right), \left(-1, \frac{9+0}{0} \right) \right\}$$

$$\rightarrow \left\{ \left(2, \frac{1}{-2} \right), \left(4, 3 \right) \right\}$$



۱۴ اگر $f(x) = \begin{cases} -x & x < 1 \\ x^2 + 1 & x \geq 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x + 1 & x > 2 \\ x + 1 & x \leq 2 \end{cases}$ حاصل $\frac{f}{g} - g$ در $x = f(1)$ چقدر است؟

$$f(1) = 1 + 1 = 2 \rightarrow x = 2 \quad \checkmark$$

$$\left(\frac{f}{g} - g\right)(2) = \frac{1}{g} f(2) - g(2) = ?$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5 \quad \checkmark \qquad g(2) = 2 + 1 = 3 \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{g} f(2) - g(2) = \frac{5}{3} - 3 = -\frac{4}{3}$$



۱۵) اگر $f(x) = \sqrt{2x-1}$ و $g(x) = \sqrt{3-4x}$ باشند، برد تابع $h(x) = (f^2 + g^2)(x)$ شامل چند عضو است؟

$$2x-1 \geq 0 \rightarrow 2x \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$3-4x \geq 0 \rightarrow 4x \leq 3 \rightarrow x \leq \frac{3}{4} \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{2} \cap \frac{3}{4} = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]$$

$$f = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]$$

$$g = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]$$

$$(f+g^2)(x) = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]$$

۱۶) مجموع مؤلفه‌های دوم $\frac{-2f}{g^2}$ با فرض $g = \{(1, \underline{-2})(-2, \underline{2})(0, -1)(\underline{2}, \underline{0})\}$ و $f = \{(1, \underline{2})(-1, 0)(-2, \underline{-4})(\underline{2}, \underline{2})\}$

$$\frac{-2f}{g^2} = \left\{ \left(1, \frac{-2}{-1} \right) \left(-1, \frac{1}{2} \right) \left(2, \frac{-4}{0} \right) \right\}$$

مجموعه $-1 + 2 = +1$

۱۷ اگر $f = \{(2, 7), (3, 1), (1, 4), (0, 2)\}$ و $g = \{(3, 4), (0, 3), (4, 2), (1, 2)\}$ برد تابع $f + g$ کدام است؟

$$f + g = \{(3, 5), (1, 4), (0, 5)\}$$



۱۸ اگر $f = \{(0, -1), (1, 0), (4, 1), (2, 5)\}$ باشد، آن گاه تابع $\frac{f}{f-1}$ از چند زوج مرتب تشکیل شده است؟

$$\frac{f}{f-1} = f \left\{ \left(0, \frac{-1}{-1-1}\right), \left(1, \frac{0}{0-1}\right), \left(4, \frac{1}{1-1}\right), \left(2, \frac{5}{5-1}\right) \right\}$$

$$\rightarrow \left\{ \left(0, \frac{1}{2}\right), (1, 0), \left(2, \frac{5}{4}\right) \right\}$$



اگر $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 4)\}$ و $f - g = \{(1, -4), (3, 1)\}$ ، آن گاه تابع $h(x) = \frac{1}{g(x) - 1}$ شامل کدام عضو است؟ (۱۹)

$$x=1 \rightarrow 4 - g(1) = -4 \rightarrow g(1) = 1$$

$$x=3 \rightarrow 4 - g(3) = 1 \rightarrow g(3) = 3$$

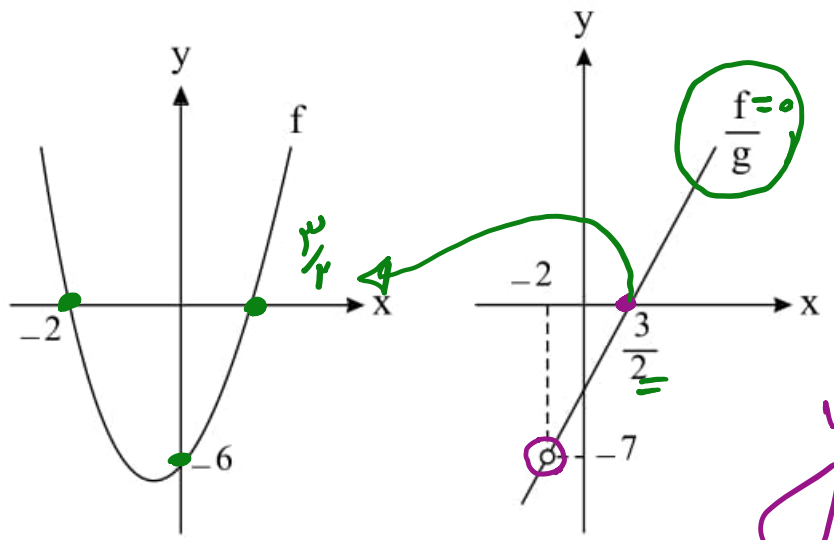
$$h = \left\{ \left(3, -\frac{1}{5} \right) \right\}$$

$$(1, 1) \rightarrow h(1) = \frac{1}{g(1) - 1} = \frac{1}{1 - 1} \times$$

$$(3, 3) \rightarrow h(3) = \frac{1}{g(3) - 1} = \frac{1}{3 - 1} = -\frac{1}{5}$$



نمودار سهمی f و تابع خطی $\frac{f}{g}$ ، به شکل زیر هستند. $g(\frac{3}{2})$ کدام است؟



$A \begin{vmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} -2 \\ -7 \end{vmatrix} \rightarrow m_{AB} = \frac{0 - (-7)}{\frac{3}{2} - (-2)} = \frac{7}{\frac{7}{2}} = 2$

$y - 0 = 2(x - \frac{3}{2}) \rightarrow y = 2x - 3 \rightarrow \frac{f}{g} = 2x - 3$

$f(x) = a(x+2)(x-\frac{3}{2})$

$\xrightarrow{\substack{x=0 \\ y=-6}} a=2 \rightarrow f(x) = (x+2)(2x-3)$

$\frac{f}{g} = \frac{(x+2)(2x-3)}{g} = 2x-3 \rightarrow g = x+2$

$\rightarrow g(\frac{3}{2}) = 1/2 + 2 = 5/2$

خانه ریاضی علی هاشمی

Alihashemi-math.com



Freemath



Alihashemi_math