

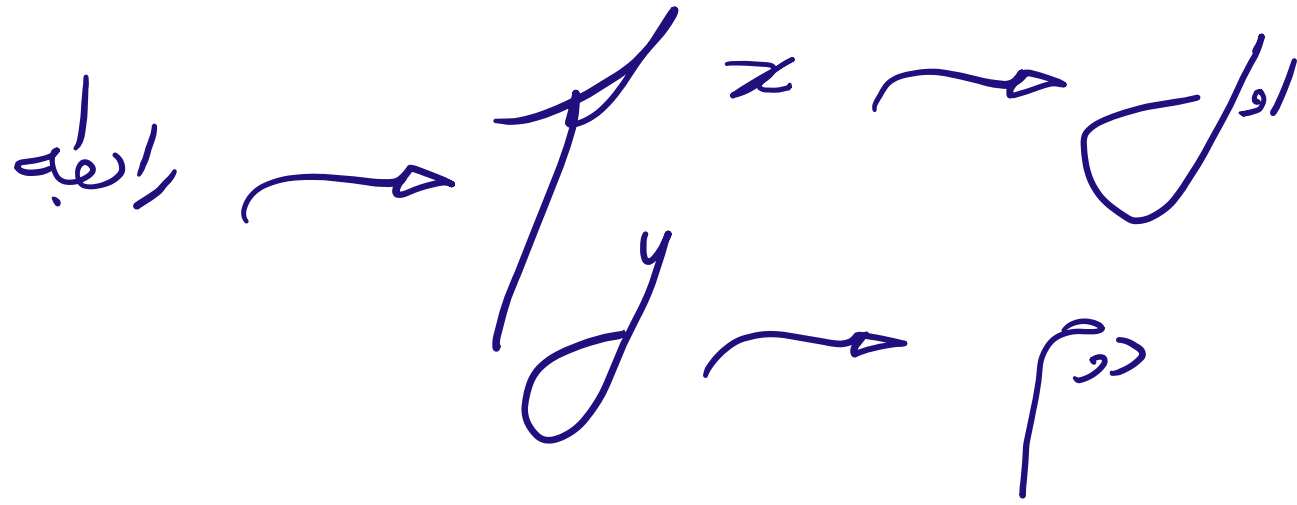
آموزش ریاضی

مفاهیم و مقدار تابع

علی هاشمی

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت خانه ریاضی علی هاشمی است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

Alihashemi-math.com



شرط: هر x فقط یک y

مثال آموزشی تابع بودن یا نبودن مجموعه زوج مرتب‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x) = \{(1, 2)(2, 3)(3, 4)(4, 5)\}$ ✓

ب) $g(x) = \{(1, 2)(1, 3)(2, 2)(3, 3)\}$ ✗

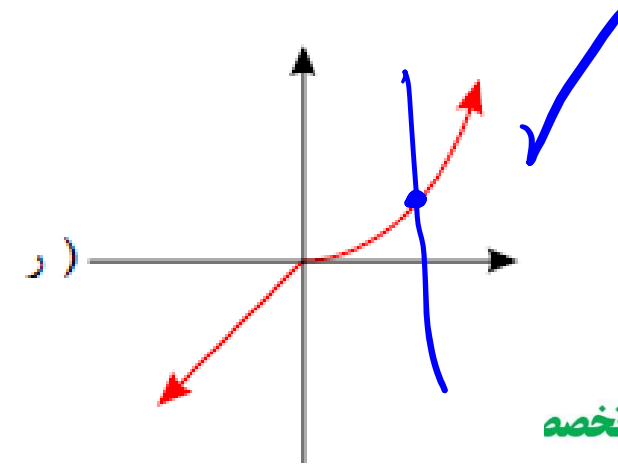
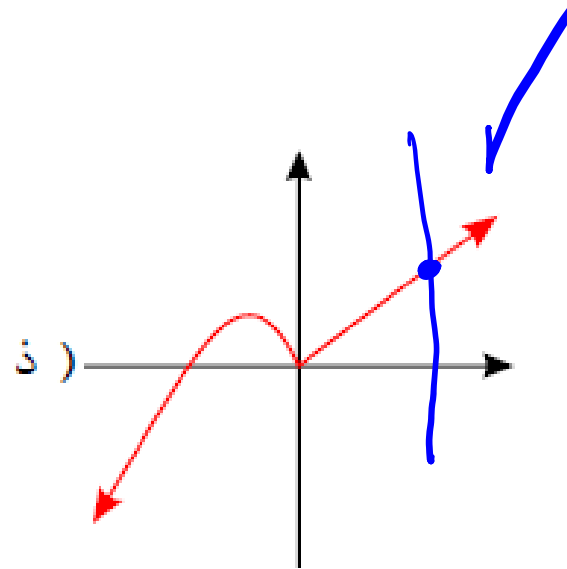
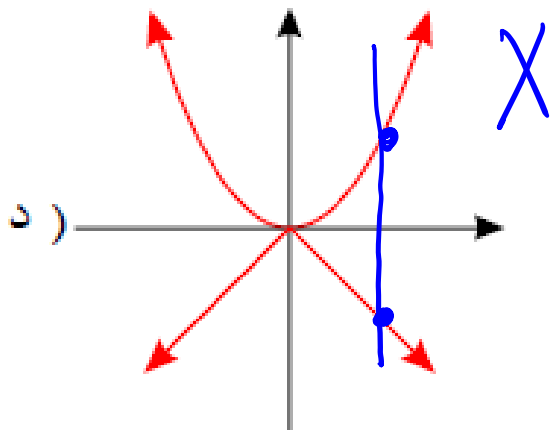
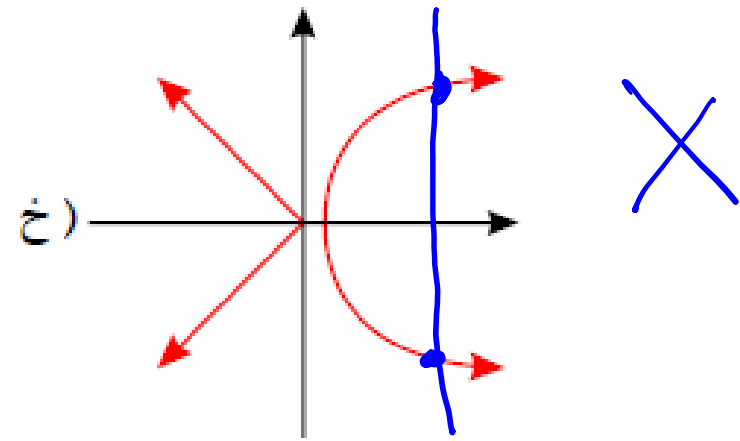
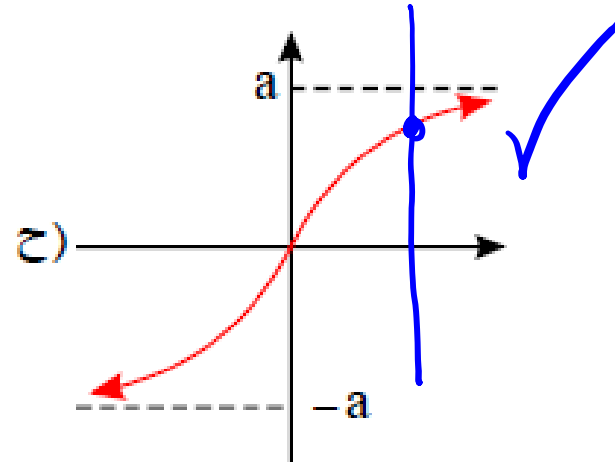
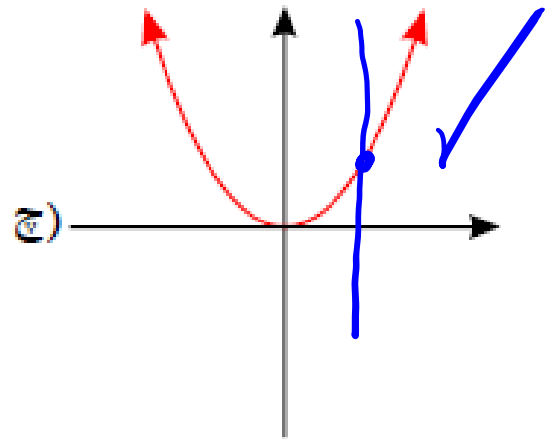
پ) $h(x) = \{(1, 1)(2, 2)(3, 3)(1, 1)(2, 2)\}$ ✓

ت) $z(x) = \{(1, 1)(2, 1)(3, 1)(4, 1)\}$ ✓

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALGEBRA.COM

مثال آموزشی کدام یک از نمودارهای زیر نمایانگر تابع است؟



علی جبر | سایت تخصصی

ALGEBRA.COM

$$f(x) = \frac{y^x + 1}{y^x - y}$$

$$\underline{f(x) = y}$$

$$f(\underline{y}) = \frac{y(y) + 1}{y(y) - y} = \frac{y}{y}$$

باتوجه به دو تابع قطعه‌ای

$$g(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x \leq 3 \\ x-1 & -3 < x \leq 0 \\ 3x^2 & x \leq -3 \text{ یا } x > 3 \end{cases} \quad \text{و} \quad f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 1 \\ x-1 & x = 1 \\ 3x-1 & x < 1 \end{cases}$$

$$g(3) - f(2) = 9 - 3 = 6$$

$$g(3) = 2 \times 3 = 6$$

$$f(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$$

اگر $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 + 4x + 7}$ باشد، $f(\sqrt{3} - 2)$ کدام است؟ ۱

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4 + 1}{x^2 + 4x + 4 + 3} = \frac{(x+2)^2 + 1}{(x+2)^2 + 3}$$

$$x = \sqrt{3} - 2 \rightarrow f(\sqrt{3} - 2) = \frac{(\sqrt{3})^2 + 1}{(\sqrt{3})^2 + 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALGEBRA.COM

اگر $f(x) = \frac{9^x + 1}{3^x}$ باشد، $f(x) - f(-x)$ برابر کدام است؟ (۲)

$$f(x) = \frac{9^x}{3^x} + \frac{1}{3^x} = 3^x + 3^{-x}$$

$$f(x) = 3^x + 3^{-x}$$

$$f(-x) = 3^{-x} + 3^{+x}$$

$$f(x) - f(-x)$$

$$= 3^x + 3^{-x} - 3^{-x} - 3^x = 0$$

$$f(x) - f(-x) = 0$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALGEBRA.COM

۳ در کدام یک از رابطه های زیر y تابعی از x است؟

$x^2 y = 0$ ~~Ⓐ~~

$|y-1| - 2x = 0$ ~~Ⓑ~~

$y - x^2 = 4$ Ⓒ

$x - y^2 = 4$ ~~Ⓓ~~

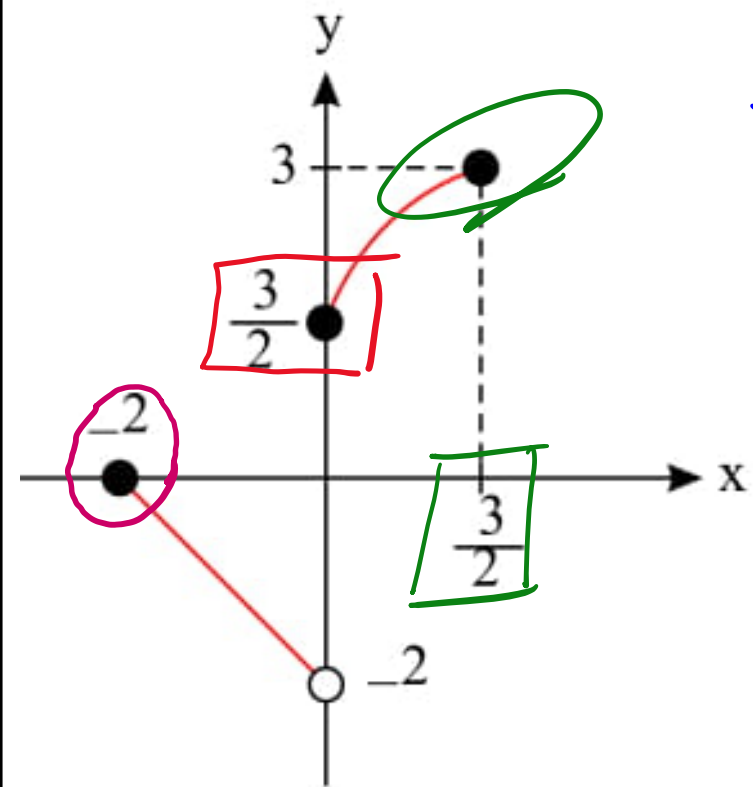
$x = 0 \rightarrow 0 - y^2 = 4 \rightarrow y^2 = -4 \rightarrow y = \pm 2i$

$x = 1 \rightarrow |y-1| - 2 = 0 \rightarrow |y-1| = 2$
 $y-1 = 2 \rightarrow y = 3$
 $y-1 = -2 \rightarrow y = -1$

$x^2 y = 0$

$x = 0 \rightarrow 0 \times y = 0$
 $y = 0$
 $y = 1$
 $y = 2$

با توجه به نمودار تابع f ، حاصل عبارت $f(f(-2)) + f(f(0))$ کدام است؟



$$f(f(\underline{-2})) = f(0) = \frac{3}{2}$$

$$f(f(\underline{0})) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 3$$

$$\text{جواب} = 3 + \frac{3}{2} = 4\frac{1}{2}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۵ اگر نمودار تابع $f(x) = a(b)^x - 1$ از دو نقطه‌ی $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ و $B(1, 11)$ بگذرد، $f(-1)$ کدام است؟

$$B \begin{cases} x=1 \\ y=11 \end{cases} \rightarrow ab^1 - 1 = 11 \rightarrow \underline{\underline{ab = 12}}$$

$$\rightarrow \frac{ab}{ab^{-1/2}} = \frac{12}{\frac{3}{2}}$$

$$b=x \rightarrow a=12$$

$$A \begin{cases} x=-1/2 \\ y=1/2 \end{cases} \rightarrow ab^{-1/2} - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow ab^{-1/2} = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow b^{3/2} = 1 = 2^3 \rightarrow b^{1/2} = 2 \rightarrow \sqrt{b} = 2 \rightarrow b = 4$$

$$f(-1) = 12 \times 4^{-1} - 1 = \frac{12}{4} - 1 = \frac{12-4}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

6 اگر رابطه $f = \{(2, a), (\underline{a}, \underline{a^2 - 2}), (\underline{a}, \underline{3a - 4}), (a^3 - 6, b)\}$ یک تابع باشد، حاصل $a^2 - b^2$ کدام می تواند باشد؟

$$a^2 - 2 = 3a - 4 \rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$a = 1 \rightarrow \{(1, 1)(1, -1)(1, -1)(-5, b)\}$$

$$b^2 \geq 0 \rightarrow -b^2 \leq 0 \rightarrow 1 - b^2 \leq 1 \rightarrow a^2 - b^2 \leq 1 \quad \checkmark$$

$$a = 2 \rightarrow \{(2, 2)(2, 2)(2, \underline{2})(2, \underline{b})\} \rightarrow b = 2 \quad \checkmark$$

$$a^2 - b^2 = 0 \quad \checkmark$$

در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = a \cdot b^x$; $b > 0$ داریم $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$ مقدار $f(\frac{3}{2})$ کدام است؟ ۷

$$ab^0 = \frac{3}{2} \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$ab^{-2} = \frac{3}{32} \rightarrow \frac{3}{2} b^{-2} = \frac{3}{32} \rightarrow b^{-2} = \frac{1}{16} = \frac{1}{b^2} \rightarrow b^2 = 16 \xrightarrow{b > 0} b = 4$$

$$f(x) = a \cdot b^x = \frac{3}{2} \times 4^x$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{4^3} = \frac{3}{2} \times 8 = 12$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALGEBRA.COM

$(a, b > 0)$? کدام $a + b$ دارد. دو عضو دارد. $f = \{(\underline{2b}, 1), (a + c, a - b), (\underline{0}, b), (\cancel{d}, \cancel{c}), (\underline{0}, \cancel{d - b})\}$ تابع ۸

$$x=0 \rightarrow b = d - b \rightarrow \underline{\underline{2b = d}} \rightarrow \boxed{c=1}$$

$$f = \{(\underline{\underline{2b}}, \underline{\underline{1}}), (\underline{\underline{a+1}}, \underline{\underline{a-b}}), (0, b)\}$$

$$1) \underline{\underline{2b = 0}} \rightarrow \{(\underline{0}, \underline{1}), (a+1, a), (\underline{0}, \underline{0})\} \quad \times$$

$$2) \begin{cases} 2b = a + 1 \\ 1 = a - b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 3 \end{cases} \rightarrow a + b = 5$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۹ در کدام یک از معادلات زیر، y تابعی از x است؟

$y = \begin{cases} x+2 & x \geq 0 \\ x-1 & x \leq 0 \end{cases}$ ❌

$|y| + x^2 + 1 = 2x$ ۳

$y^2 + x^2 = -1$ ❌

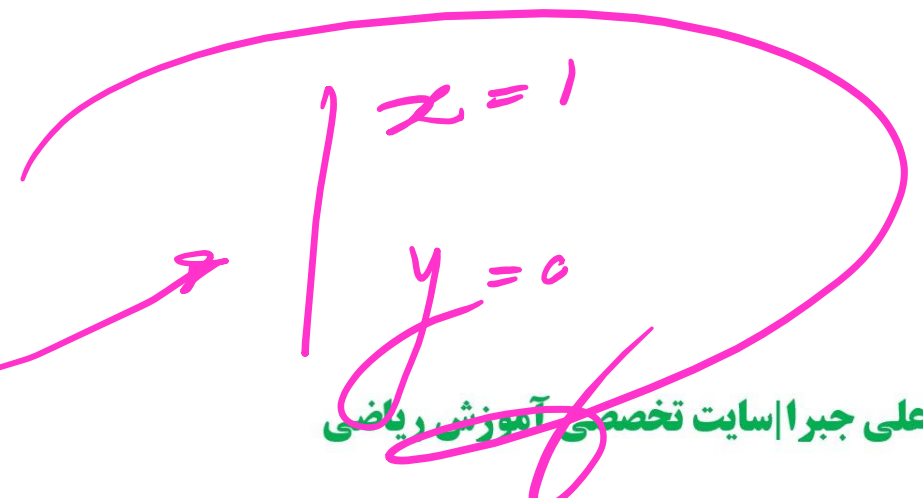
$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = 1$ ❌

۱) $x=0 \rightarrow \sqrt{y^2}=1 \rightarrow |y|=1 \rightarrow y = \pm 1 \quad x$

۲) $x=-2 \rightarrow y^2 - 1 = -1 \rightarrow y^2 = 0 \rightarrow y = 0 \quad x$

۳) $x=0 \rightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=-1 \end{cases} \quad x$

۴) $|y| + x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow |y| + (x-1)^2 = 0$



علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

$$|x|=1 \rightarrow x = \pm 1$$

به فرض این که ۱۰

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+3} & |x| \geq 1 \\ \frac{x^2-2ax+b}{x-3} & |x| \leq 1 \end{cases}$$

کدام $2a+b$ باشد. $g(x)$ تابع باشد. $2a+b$ کدام است؟

$$x=1 \rightarrow \frac{1-2a+b}{1-3} \rightarrow 1-2a+b=0 \rightarrow -2a+b=-1$$

$$x=-1 \rightarrow \frac{-2}{1+3} = \frac{-2}{4} \rightarrow \frac{1+2a+b}{-4} = \frac{-2}{4} \rightarrow 1+2a+b=2 \rightarrow 2a+b=1$$

$$\boxed{2a+b=1}$$
$$-2a+b=-1$$
$$\rightarrow b=0 \quad a=\frac{1}{2}$$

رابطه‌ی (۱۱) $\{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m ، یک تابع است؟

$$m^2 = m + 2 \rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$m = -1 \rightarrow \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\} \checkmark$$

$$m = 2 \rightarrow \{(3, 4), (\underline{\underline{2, 1}}), (-3, 2), (-2, 2), (3, 4), (\underline{\underline{2, 4}})\} \times$$

$$m = -1$$

۱۲) مقدار تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2bx & ; x \geq -1 \\ b^2 + 2x & ; x \leq -1 \end{cases}$ به ازای $x = -2$ کدام است؟

$$x = -1 \rightarrow \begin{cases} 1 - 2b \\ b^2 - 2 \end{cases} \rightarrow b^2 - 2 = 1 - 2b \rightarrow b^2 + 2b - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$f(-2) = b^2 + 2(-2) = b^2 - 4$$

$$\begin{cases} b = 1 \\ b = -3 \end{cases} \rightarrow f(-2) = 1 - 4 = -3 \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} b = 1 \\ b = -3 \end{cases} \rightarrow f(-2) = 9 - 4 = 5 \quad \checkmark$$

۱۳) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۶- قطع کرده و از

نقطه‌ی $(-۲, -۶)$ می‌گذرد. $f(-۱)$ کدام است؟

$$A \left| \begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \end{array} \right. \rightarrow a+b+c=0 \rightarrow a+1a-4=0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} a=2 \\ b=4 \end{array} \right.$$

$$B \left| \begin{array}{l} x=0 \\ y=-4 \end{array} \right. \rightarrow 0+0+c=-4 \rightarrow c=-4$$

$$C \left| \begin{array}{l} x=-2 \\ y=-4 \end{array} \right. \rightarrow 4a-2b+c=-4 \rightarrow 4a-2b=-4 \rightarrow b=2a$$

$$f(-1) = 2(1) + 4(-1) - 4 = -1$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

در مستطیلی با طول x و عرض y ، مجموع اضلاع برابر ۱۲ واحد است. تابعی که مساحت مستطیل را بر حسب عرض آن بیان می کند چگونه است؟

$$2x + 2y = 12 \rightarrow x + y = 6 \rightarrow x = 6 - y$$

$$S = xy = (6 - y)y = 6y - y^2$$

$$\rightarrow S(y) = 6y - y^2$$

۱۵ در تابع درجه سوم $f(x) = -x^3 + ax^2 + x + 2$ ، رابطه $f\left(\frac{3}{2}\right) - f(2) + f\left(-\frac{3}{2}\right) = 5$ برقرار است. مقدار $f(1) + f(2)$

$$\left(-\frac{27}{8} + \frac{9}{4}a + \frac{3}{2} + 1\right) - (-1 + 4a + 2 + 2) + \left(\frac{27}{8} + \frac{9}{4}a - \frac{3}{2} + 1\right) = 5$$

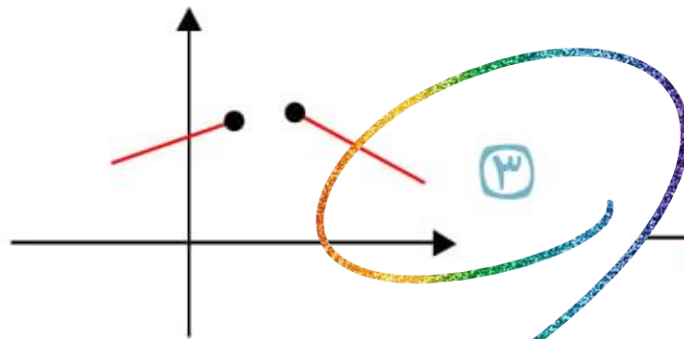
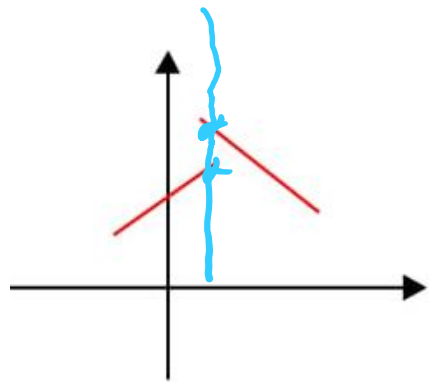
$$\rightarrow a = -4$$

$$f(1) + f(2) = (-1 - 4 + 1 + 2) + (-1 - 2 + 2 + 2) = -2$$

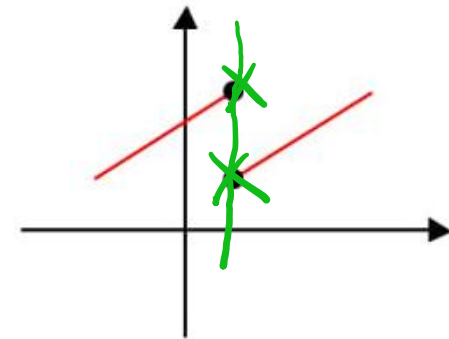
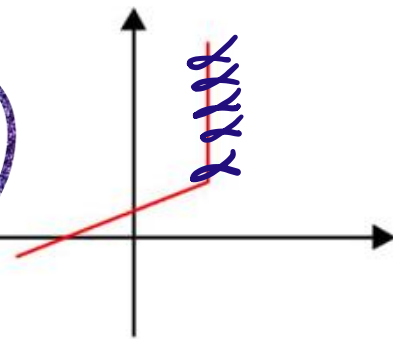
علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALGEBRA.COM

۱۶ کدام شکل نمودار یک تابع است؟



۳

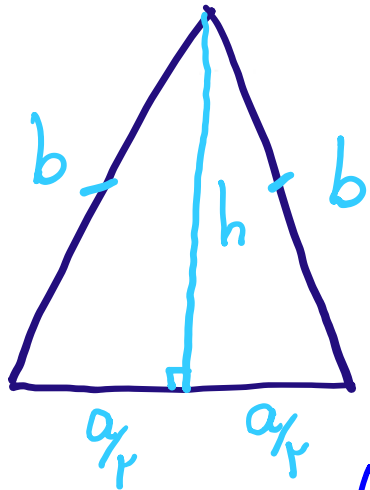


علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALGEBRA.COM

۱۷) با ۱۲۰ متر نرده یک ناحیه از زمین را به شکل یک مثلث متساوی الساقین با قاعده a محصور کرده ایم. ضابطه تابعی که مساحت مثلث را بر حسب

قاعده آن بیان می کند، کدام است؟



$$\textcircled{1} \quad h^r + \frac{a^r}{r} = b^r = \left(120 - \frac{a}{r}\right)^r$$

$$r b + a = 120 \rightsquigarrow r b = 120 - a \rightsquigarrow b = 120 - \frac{a}{r}$$

$$\textcircled{1} \rightarrow h^r = \left(120 - \frac{a}{r}\right)^r - \frac{a^r}{r}$$

$$S = \frac{1}{r} h \cdot a = \frac{1}{r} a \sqrt{\left(120 - \frac{a}{r}\right)^r - \frac{a^r}{r}} = \sqrt{900 a^r - 10 a^{\frac{r+1}{r}}}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

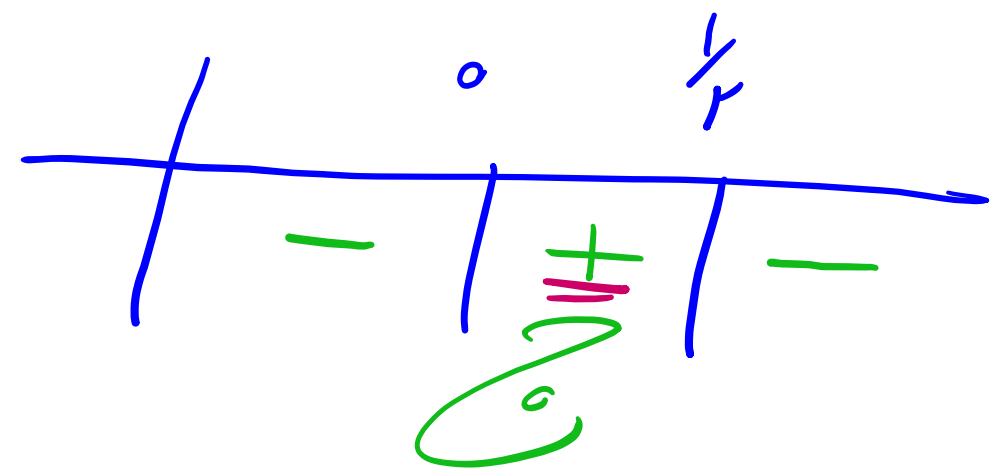
ALGEBRA.COM

رابطه $xy^2 + 2x = 1$ برای کدام مقادیر x نمی تواند معرف یک تابع باشد؟

$$xy^2 = 1 - 2x \rightarrow y^2 = \frac{1 - 2x}{x} \rightarrow \frac{1 - 2x}{x} > 0$$

$$1 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$x = 0$$



$$y = \pm \sqrt{\frac{1 - 2x}{x}}$$

$(0, \frac{1}{2})$

مقدار $f(-2)$ از رابطه $f(x + \frac{1}{x}) = x^3 + \frac{1}{x^3} - 2$ چقدر است؟

$$\checkmark a^r + b^r = (a+b)^r - r a b$$

$$\checkmark a^\mu + b^\mu = (a+b)^\mu - \mu a b (a+b) \checkmark$$

$$f(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})^\mu - \cancel{\mu} \cdot \cancel{\frac{1}{x}} (x + \frac{1}{x}) - 2$$

$$f(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})^\mu - \mu (x + \frac{1}{x}) - 2$$

$$f(-2) = (-2)^\mu - \mu (-2) - 2 = -1 + 4 - 2 = 1$$

۲۰ در تابع $f = \{(\underline{-1}, m^2 - 3m), (1 - 2m, m^2 + m), (-2m, m - 5)\}$ اگر $f(\underline{-1}) = \underline{4}$ باشد، حاصل $f(2) - f(-1)$

$$m^2 - 3m = 4 \rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 4 \end{cases}$$

$$m = -1 \rightarrow \{(-1, 4), (3, 0), (2, \underline{-4})\}$$

$$m = 4 \rightarrow \{(-1, 4), (-7, 0), (-1, \underline{-1})\}$$

$$f(2) - f(-1) = -9 - (-1) = -8$$