

آموزش ریاضی

رشد و زوال

Algebra.com

۱) شخصی سرمایه‌ی خود را با نرخ مشارکت ۱۵ درصد مرکب پیوسته $A = Pe^{it}$ ، سرمایه‌گذاری کرده است.

پس از چه مدت سرمایه‌ی اولیه‌ی این شخص ۲٫۵ برابر می‌شود؟ ($\ln 2.5 = 0.912$)

نرخ سود
سرمایه اولیه
زمان

$$A = A_0 e^{it}$$

$$2.5P = P e^{0.15t} \rightarrow e^{0.15t} = 2.5 \rightarrow 0.15t = \ln 2.5$$

$$0.15t = 0.912 \rightarrow t = \frac{0.912}{0.15} = 6.08 \rightarrow \underline{\underline{۶ سال و ۲۹ روز}}$$

۲ در یک نوع کشت، تعداد باکتری‌ها پس از گذشت t دقیقه برابر $f(t)$ است که $f(t) = 2000e^{0.012t}$ ، پس از چه مدت تعداد باکتری‌ها ۱۰۰۰۰ می‌شود؟ ($\ln 5 = 1.61$)

$$10000 = 2000 e^{0.012t} \rightarrow e^{0.012t} = \frac{10000}{2000} = 5$$

$$e^{0.012t} = 5 \rightarrow 0.012t = \ln 5 = 1.61 \rightarrow t = \frac{1.61}{0.012} = 140$$

$$t = 140 \text{ min}$$

۳ در شهری با جمعیت ۵۰۰۰۰ با نرخ رشد سالیانه جمعیت ۲٫۵ درصد با توجه به $f(t) = Ae^{it}$ ، پس از چند سال، جمعیت این شهر ۶۰۰۰۰ نفر می شود؟ ($\ln 1,2 = 0,18$)

$$60000 = 50000 e^{0,025t} \rightarrow e^{0,025t} = \frac{60000}{50000}$$

$$e^{0,025t} = 1,2 \rightarrow 0,025t = \ln 1,2 = 0,18 \rightarrow t = \frac{0,18}{0,025} = 7,2$$

$$t = 7,2$$

۴ در شروع یک نوع کشت ۱۴۰۰ باکتری موجود است. تعدادی باکتری ها پس از t دقیقه به صورت $f(t) = Ae^{0.04t}$ است، پس از چند دقیقه ۷۰۰۰ باکتری موجود است؟ ($\ln 5 = 1.61$)

$$V_{000} = 1400 e^{0.04t} \rightarrow e^{0.04t} = \frac{V_{000}}{1400} = 5$$

$$e^{0.04t} = 5 \rightarrow 0.04t = \ln 5 = 1.61 \rightarrow t = \frac{1.61}{0.04} = 40$$

$$t = 40$$

۵ مقدار جرم باقیمانده‌ی یک ماده‌ی رادیواکتیو بعد از t دقیقه از رابطه‌ی $f(t) = Ae^{kt}$ محاسبه می‌شود. مقدار

این ماده پس از ۹۰ دقیقه $\frac{1}{5}$ برابر می‌شود. مدت زمانی که طول می‌کشد تا مقدار ماده‌ی اولیه نصف شود، تقریباً چند

دقیقه است؟ ($\log 2 = 0,3$)

$$\frac{1}{5}A = Ae^{90k} \rightarrow e^{90k} = \frac{1}{5} \rightarrow 90k = \ln \frac{1}{5} \rightarrow k = \frac{\ln \frac{1}{5}}{90}$$

$$\frac{1}{2}A = Ae^{kt} \rightarrow e^{kt} = \frac{1}{2} \rightarrow kt = \ln \frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{k}$$

$$t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\frac{\ln \frac{1}{5}}{90}} = 90 \frac{\ln 2}{\ln 5} = 90 \frac{\log 2}{\log 5} = 90 \left(\frac{0,3}{1-0,3} \right)$$

$$t = 111,4$$

۶ دمای زمین، در t سال بعد بر حسب درجه‌ی سانتی گراد از رابطه‌ی $۳۲ + \frac{e^{۰,۰۲t}}{۱۰۰}$ به دست می‌آید. تقریباً چند

سال بعد دمای زمین به ۳۵ درجه‌ی سانتی گراد می‌رسد؟ ($\log e = ۰,۴۳$, $\ln ۳ = ۱,۰۵$)

$$۳۵ = ۳۲ + \frac{e^{۰,۰۲t}}{۱۰۰} \rightarrow e^{۰,۰۲t} = ۳۰۰ \rightarrow ۰,۰۲t = \ln ۳۰۰$$

$$۰,۰۲t = \ln ۳ + ۲ \ln ۱۰ = ۱,۰۵ + ۲ \left(\frac{1}{۰,۴۳} \right) = ۵,۷$$

$$t = \frac{۵,۷}{۰,۰۲} = ۲۸۵$$

$$\ln ۱۰ = \log_e ۱۰ = \frac{1}{\log_{10} e} = \frac{1}{\log e} = \frac{1}{۰,۴۳}$$

۷ میزان سرمایه گذاری شخصی در بانک پس از ۸ سال e برابر شده است. اگر این شخص در بانک، شش میلیون

تومان پول داشته باشد پس از چند سال پول او ۵۴ میلیون تومان خواهد شد؟ ($\ln 3 = 1,1$)

$$A = A_0 e^{\alpha t} \rightarrow e A_0 = A_0 e^{1\alpha} \rightarrow e = e^1 \rightarrow \alpha = \frac{1}{1}$$

$$24 = 9 e^{\frac{1}{1}t} \rightarrow e^{\frac{1}{1}t} = \frac{24}{9} = 9 \rightarrow \frac{1}{1}t = \ln 9$$

$$\frac{1}{1}t = 1 \ln 3 = 1(1,1) \rightarrow t = 1,1 \times 1 = 1,1$$

۸ تعداد واحد کار کامل شده در روز، توسط یک کارگر عادی بعد از t ماه اشتغال برابر

است. $f(t) = 82 - 56e^{-0.2t}$ بعد از چند ماه تجربه‌ی کاری، این کارگر می‌تواند روزانه ۷۵ واحد را کامل کند؟

($\ln 2 = 0.733$)

$$75 = 82 - 56e^{-0.2t} \rightarrow 56e^{-0.2t} = 7$$

$$e^{-0.2t} = \frac{1}{56} \rightarrow -0.2t = \ln \frac{1}{56} = -3 \ln 2 = -3(0.733)$$

$$\rightarrow t = \frac{3(0.733)}{0.2} \approx 10.9$$

۹ قیمت فروش ابزاری، t سال پس از خرید، $f(t)$ دلار است که $f(t) = 1200 + 6000e^{-0.23t}$ چند سال

پس از خرید، قیمت فروش این ابزار ۵۰ درصد قیمت اولیه است؟ ($\ln 0.4 = -0.92$)

$$f(0) = 1200 + 6000 = 7200 \quad \text{مَرَبَتِ اَوَّلِی}$$

$$\frac{1}{2} \times 7200 = 1200 + 6000 e^{-0.23t} \rightarrow 6000 e^{-0.23t} = 2400$$

$$e^{-0.23t} = 0.4 \rightarrow -0.23t = \ln 0.4 = -0.92$$

$$t = \frac{-0.92}{-0.23} = 4$$

۱۰) کارایی کارگر عادی در کارخانه‌ای با تابع $f(t) = 100 - 50e^{kt}$ داده می‌شود که کارگر بعد از t ماه اشتغال

می‌تواند روزانه $f(t)$ واحد را کامل کند. اگر بعد از ۸ ماه تجربه‌ی کاری، کارگر روزانه ۹۰ واحد را کامل کند، k کدام

است؟ ($\ln 5 = 1,6$)

$$90 = 100 - 50e^{1k} \rightarrow 50e^{1k} = 10$$

$$\rightarrow e^{1k} = \frac{1}{5} \rightarrow 1k = \ln \frac{1}{5} = -\ln 5 = -1,6$$

$$\rightarrow k = \frac{-1,6}{1} = -0,2$$

ALIGEBRA.COM



Freemath



Alihashemi_math