

آموزش ریاضی

تابع نمایی

علی هاشمی

$$y = \underline{a}^x \rightarrow a > 0, a \neq 1$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^{+m}}$$

$$a^m \div a^n = a^{n-m}$$

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^x = b^x \rightarrow a = b$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

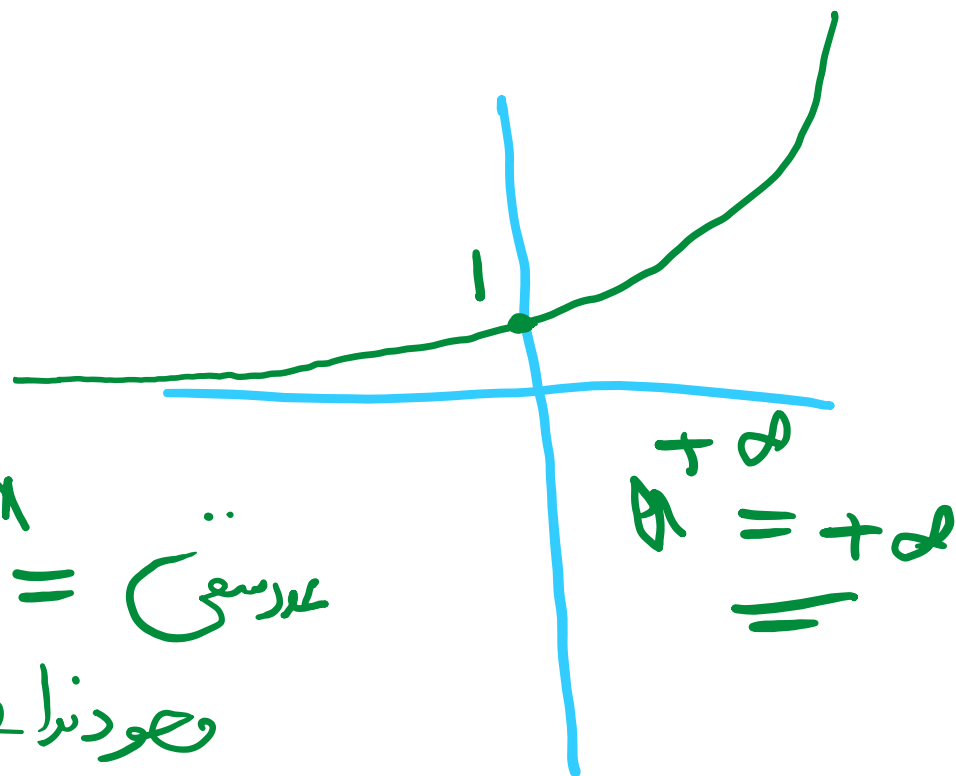
$$a^x = a^y \rightarrow a = b$$



نمودار تابع نمایی

$$y = a^x$$

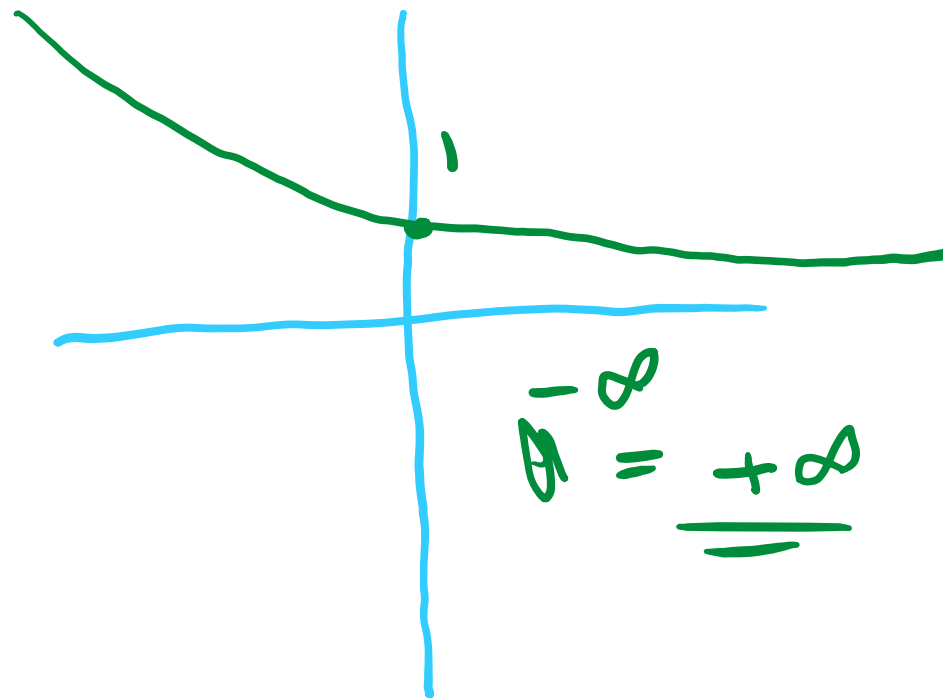
الف) $a > 1$



$a =$ عددی
بزرگتر از ۱

\Rightarrow نمودار

ب) $0 < a < 1$



جواب معادله

کدام است؟ $\frac{\sqrt[3]{27}}{27} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{27}} \right)^x = \sqrt[3]{27} \left(\frac{\sqrt[3]{27}}{27} \right)^{3-x}$

$$\frac{1}{27} \cdot \left(\frac{1}{27} \right)^x = 27 \cdot \left(\frac{1}{27} \right)^{3-x}$$

$$27^{-1} \cdot 27^{-x} = 27^1 \cdot 27^{-(3-x)}$$

$$27^{-1-x} = 27^{1-3+x}$$

$$-1-x = 1-3+x$$

$$29x = 57 \Rightarrow x = \frac{57}{29}$$

$$-15 - 2x = -27x^3 + 27x$$



از معادله $e^x - 4 + \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = 0$ مقدار x کدام است؟ (۲)

$$e^x - 4 + e^{-x+1} = 0 \rightarrow e^x - 4 + e^{-x} \cdot e^1 = 0$$

$$\underbrace{A = e^x}_{\rightarrow} A - 4 + \frac{1}{A} \cdot 4 = 0 \xrightarrow{\times A} A^2 - 4A + 4 = 0$$

$$\rightarrow (A - 2)^2 = 0 \rightarrow A = 2 \rightarrow e^x = 2$$

$$\rightarrow 2^{yx} = 2^1 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$



۳ اگر a عددی حقیقی و نمودار توابع $f(x) = (4a - 2)^x$ و $g(x) = \left(1 - \frac{a}{2}\right)^x$ نسبت به محور y ها قرینه هم باشند، مجموع مقادیر ممکن

برای a کدام است؟

$$y = a^x \cdot y = a^{-x} \rightarrow a^x \cdot a^{-x} = \frac{1}{1}$$

$$\rightarrow \left(1 - \frac{a}{2}\right) \cdot (4a - 2) = 1$$

$$4a - 2 - 2a^2 + a = 1 \rightarrow -2a^2 + 5a - 3 = 0$$

$$\rightarrow 2a^2 - 5a + 3 = 0 \rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} \quad S = \frac{-b}{a} = \frac{5}{2}$$



شکل مقابل نمودار کدام تابع است؟

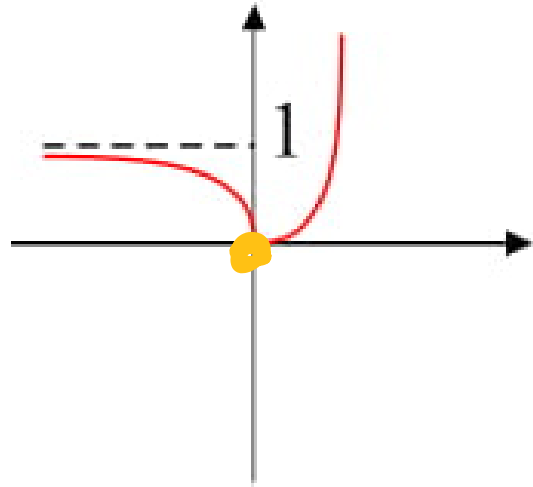
۴

$y = 2^{-|x|}$ ۲

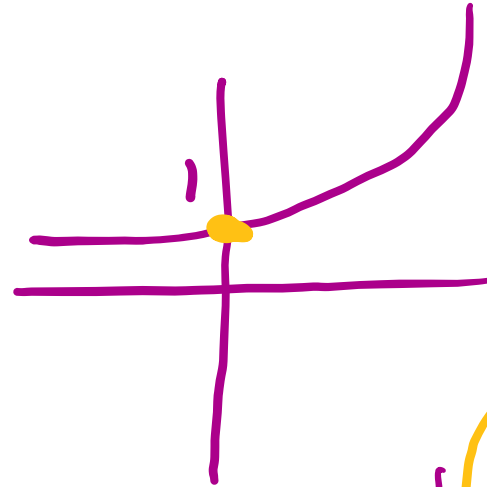
$y = |2^x - 1|$ ۳

$y = -2^{-x}$ ۱

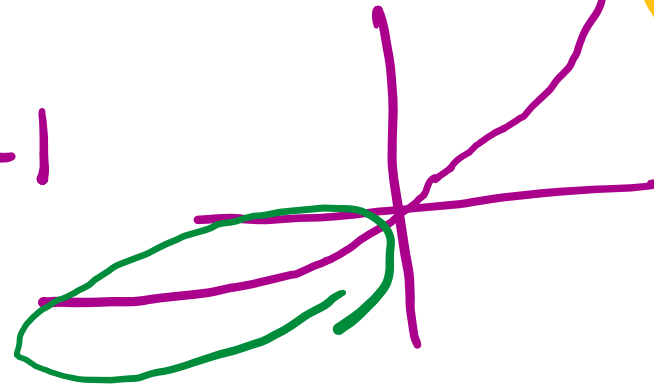
$y = 2^{x+1} - 1$ ۳



$y = a^x$



$y = a^x - 1$



$y = |a^x - 1|$



مقدار x از معادله ی ۵

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{3x} = 32^{x+1}$$

$$\left(2^{-3}\right)^{3x} = \left(2^5\right)^{x+1}$$

$$\rightarrow 2^{-9x} = 2^{5x+5}$$

$$\rightarrow -9x = 5x + 5 \rightarrow -14x = 5 \rightarrow x = \frac{-5}{14}$$

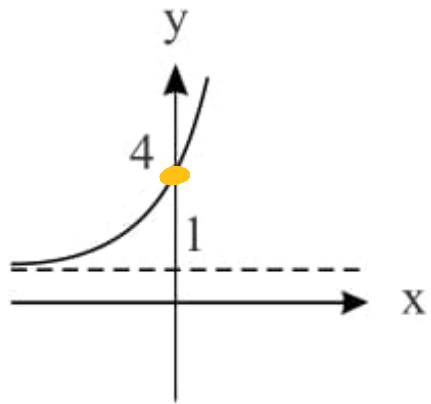


نمودار توابع $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{ax-1}$ و $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ در نقطه‌ای به عرض $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ متقاطع‌اند. در این صورت a کدام است؟ ۶

$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \rightarrow 2^{ax-1} = \frac{1}{2}$
 $2^{ax-1} = 2^{-1} \rightarrow ax-1 = -1$
 $ax = 0 \rightarrow x = \frac{0}{a} = 0$

$y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 $x = \frac{1}{10}$
 $y = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{10}}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$
 $\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
 $\sqrt{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\sqrt{10} \cdot \sqrt{2} = 1$
 $\sqrt{20} = 1$
 $20 = 1^2$
 $20 = 1$ (Contradiction)





نمودار تابع با ضابطه $f(x) = a(\sqrt{2})^{bx} + 1$ به صورت زیر است. کدام گزینه درست است؟ ۷

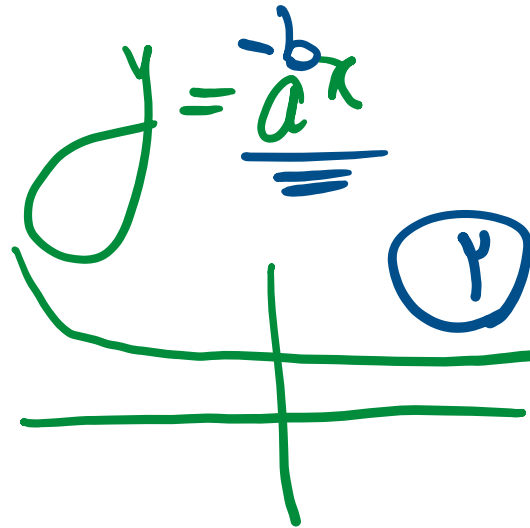
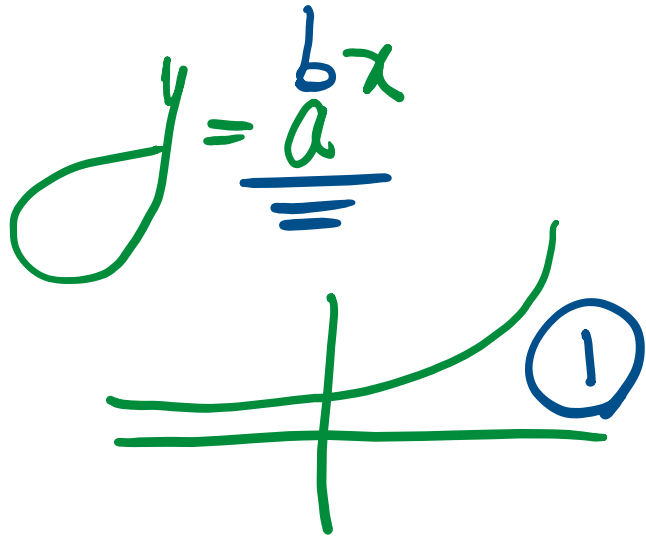
$b < 0, a = 3$ ۲

~~$b > 0, a = \frac{1}{3}$~~ ۴

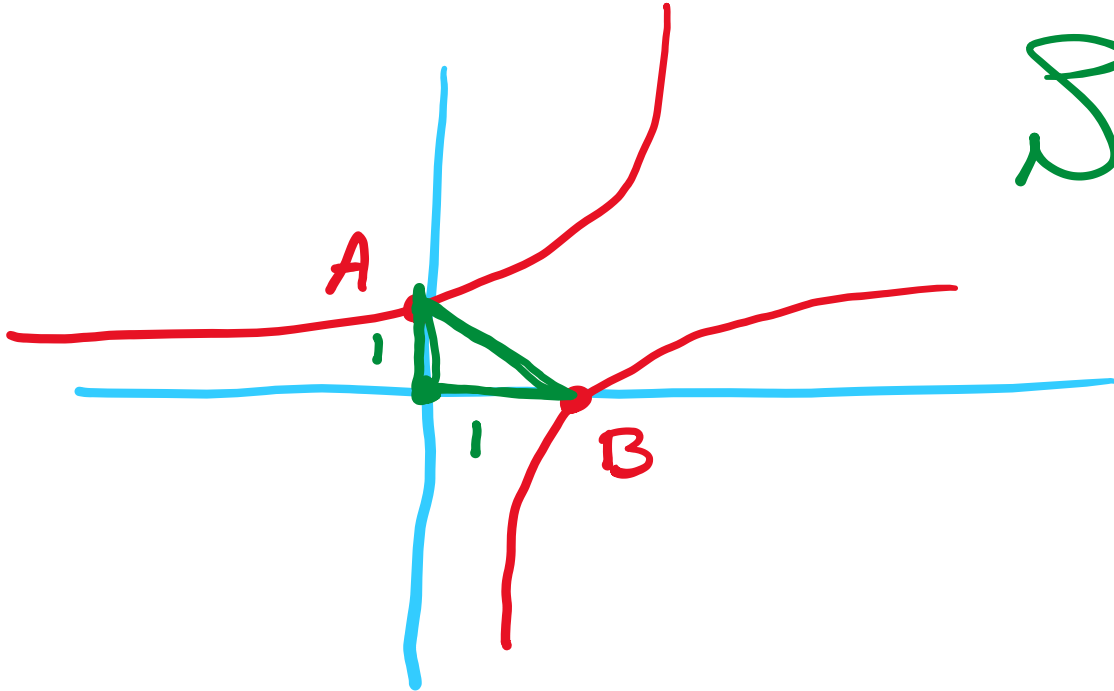
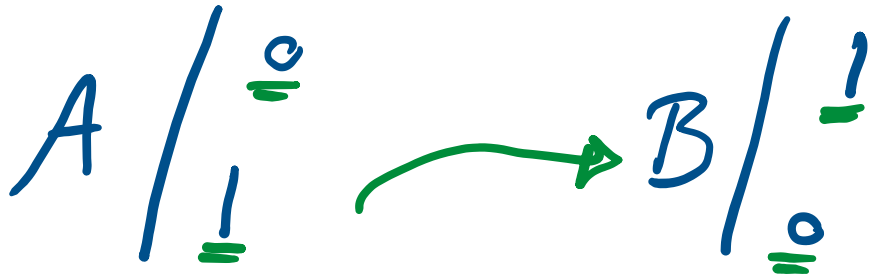
~~$b < 0, a = -3$~~ ۱

$b > 0, a = 3$ ۳

$x = 0$
 $y = 4 \rightarrow 4 = a + 1 \rightarrow a = 3$



۸) تابع نمایی $y = 3^x$ محور y ها را در نقطه A قطع می کند معکوس این تابع محور x ها را در نقطه B قطع می کند. مساحت مثلث ABO کدام است؟



$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$



9

در معادله $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{16}$ مجموع دو ریشه کدام است؟

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1-\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\rightarrow x-1-\frac{1}{x} = 2 \xrightarrow{\times x} x^2 - x - 1 = 2x$$

$$\rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\text{مجموع ریشه ها} = \frac{-b}{a} = \frac{+3}{1} = 3$$



تابع $f(x) = \left(\frac{2a-3}{a+2} \right)^{x+3}$ نمایی است، مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟ (۱۰)

$$\begin{aligned} \oplus \frac{2a-3}{a+2} > 0 &\rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

	-2	$\frac{3}{2}$	
/	+	-	+
ج	ج	ج	ج

$$\frac{2a-3}{a+2} \neq 1 \rightarrow 2a-3 \neq a+2 \rightarrow a \neq 5$$

$$(-\infty, -2) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty \right) - \{5\}$$



اگر $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}$ باشد، آن گاه حدود x کدام است؟

$$a^f > a^g$$

$$\begin{cases} a > 1 \rightarrow f > g \\ 0 < a < 1 \rightarrow f < g \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 1 \rightarrow f > g \\ 0 < a < 1 \rightarrow f < g \end{cases}$$

$$5-x > 2x+1 \rightarrow 4 > 3x \approx 3x < 4$$

$$\div 3 \rightarrow x < \frac{4}{3}$$



۱۲) نمودار تابع $y = 5^{\frac{3x+6}{2}} - 20(5\sqrt{5})^{x+\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}$ محور طولها را با کدام طول قطع می کند؟

$$\underline{5}^{\frac{3}{2}x} \cdot 5^3 - 20 \left(\underline{5}^{\frac{3}{2}x} \cdot 5^1 \right) - \frac{1}{5} = 0$$

$$A = 5^{\frac{3}{2}x}$$

$$\rightarrow 125A - 100A - \frac{1}{5} = 0 \rightarrow 25A = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow A = \frac{1}{25 \times 5} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}$$

$$\rightarrow 5^{\frac{3}{2}x} = 5^{-3} \rightarrow \frac{3}{2}x = -3 \rightarrow x = -2$$



با توجه به معادلات زیر، حاصل $x + y$ کدام است؟

$$\begin{cases} 4^{2x+2} = 16^{2x+3} \\ 25^{3x+2y} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} \end{cases}$$

$$x+y = -2+4 = 2$$

$$2^{4x+4} = 2^{4x+12}$$

$$\rightarrow 4x+4 = 4x+12 \rightarrow 4 = 12$$

$$\rightarrow 4 = 12 \rightarrow 4 - 4 = 12 - 4 \rightarrow 0 = 8$$

$$\rightarrow 0 = 8$$

$$5^{4x+4y} = 5^{-2x}$$

$$\rightarrow 4x+4y = -2x$$

$$x = -2$$

$$\rightarrow -12 + 4y = 4$$

$$\rightarrow 4y = 16$$

$$\rightarrow y = 4$$



۱۴ اگر داشته باشیم: $5^{n-1} - 5^{n-2} = 500$ ، در این صورت 3^n کدام است؟

$$5 \cdot 5^{n-2} - 5^{n-2} = 500 \quad \overbrace{5^{n-2}} = A \rightarrow 5A - A = 500$$

$$\rightarrow 4A = 500 \rightarrow A = \frac{500}{4} = 125$$

$$\rightarrow 5^{n-2} = 5^3 \rightarrow n-2=3 \rightarrow n=5 \quad \checkmark$$

$$3^n = 3^5 = 243$$



فاصله نقطه برخورد توابع $f(x) = (2/5)^{2+\sqrt{27}x}$ و $g(x) = (5)^{-\sqrt{3}x}$ از محور طولها، کدام است؟

$$(5^{-1})^{2+\sqrt{3}x} = 5^{-\sqrt{3}x} \quad \rightarrow \quad 5^{-2-\sqrt{3}x} = 5^{-\sqrt{3}x}$$

$$\rightarrow -2-\sqrt{3}x = -\sqrt{3}x \quad \rightarrow \quad -2 = 2\sqrt{3}x$$

$$\rightarrow x = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$g\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = 5^{-\sqrt{3} \cdot \frac{-1}{\sqrt{3}}} = 5^1 = 5$$



اگر x جواب معادله‌ی نمایی $2^{-x} = 0.5^{x+1} - 3(0.25)^{x-1}$ باشد، در این صورت $\log_x \sqrt{27}$ کدام است؟

$$3 \left(2^{-2} \right)^{x-1} - 2^{-x} = (2^{-1})^{x+1} \rightarrow 3 \cdot 2^{-2x} \cdot 2^2 - 2^{-x} = 2^{-x} \cdot 2^{-1}$$

$$A = 2^{-x} \rightarrow 12A^2 - A = \frac{1}{2}A \rightarrow 12A^2 = \frac{3}{2}A \rightarrow 12A = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow A = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$$

$$\rightarrow 2^{-x} = 2^{-3} \rightarrow x = 3$$

$$\log_3 \sqrt{27} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$



نمودار تابع $f(x) = a + 3^{(x-b)}$ از نقطه $(4, 29)$ می‌گذرد. اگر $f(3) = 11$ باشد، آن گاه $a + b$ کدام است؟

$$\begin{array}{l} | 4 \\ | 29 \end{array} \rightarrow a + 3^{4-b} = 29 \rightarrow 3^{4-b} = 29 - a$$

$$\begin{array}{l} | 3 \\ | 11 \end{array} \rightarrow a + 3^{3-b} = 11 \rightarrow 3^{3-b} = \underline{11 - a}$$

$$\rightarrow \frac{3^{4-b}}{3^{3-b}} = \frac{29 - a}{11 - a} \rightarrow 3 = \frac{29 - a}{11 - a} \rightarrow 3(11 - a) - 3^3 = 29 - a$$

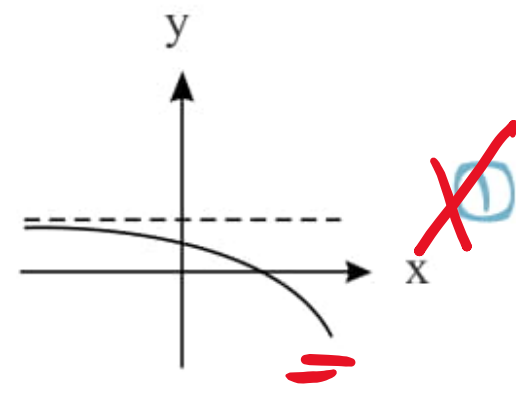
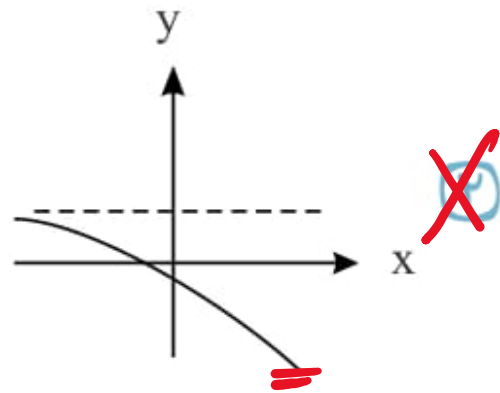
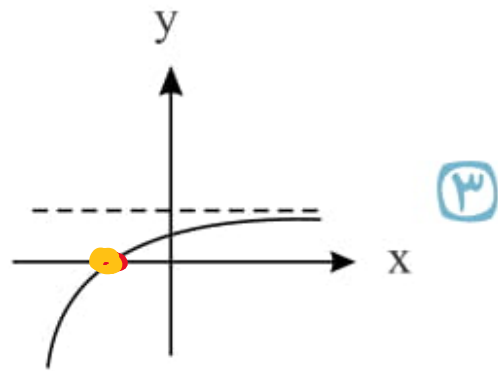
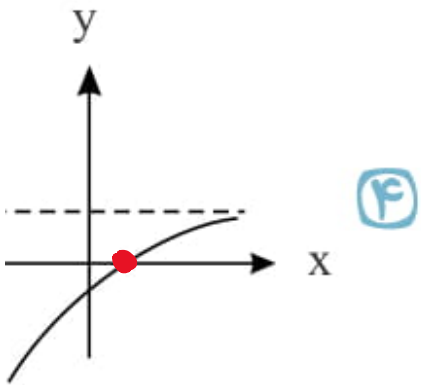
$$\rightarrow 33 - 3a = 29 - a \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2 \quad \checkmark$$

$$3^{3-b} = 3^2 \rightarrow 3 - b = 2 \rightarrow b = 1 \quad \checkmark$$

$$a + b = 3 \quad \checkmark$$



۱۸ نمودار تابع $f(x) = -6\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 1$ شبیه کدامیک از نمودارهای زیر است؟



$$f = -4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \frac{1}{3} + 1 = -2 \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$$

$x \rightarrow$ نقطه

$$-2(3^{-x}) + 1 = 0 \rightarrow 2(3^{-x}) = 1$$

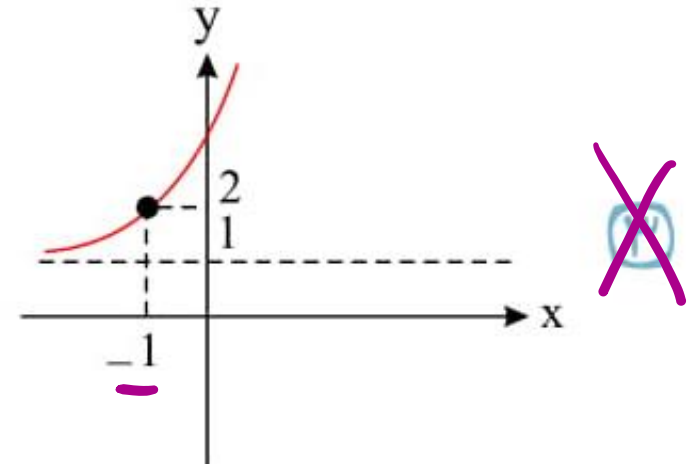
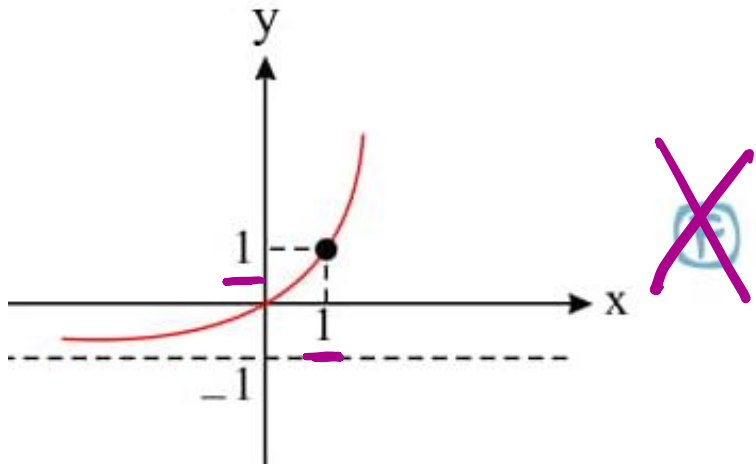
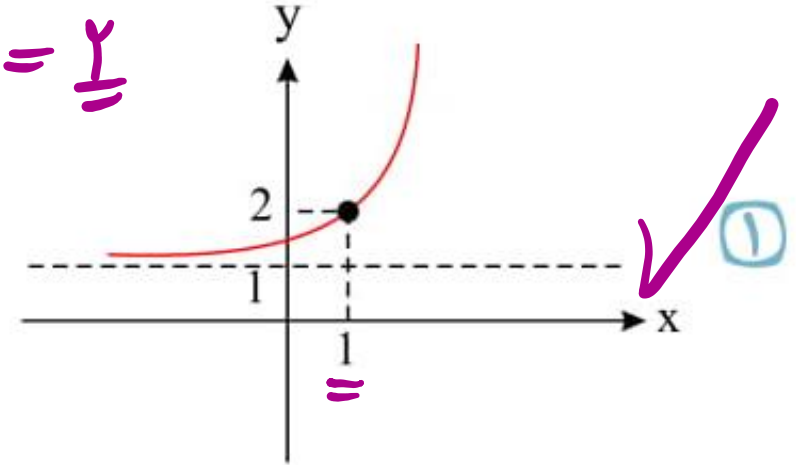
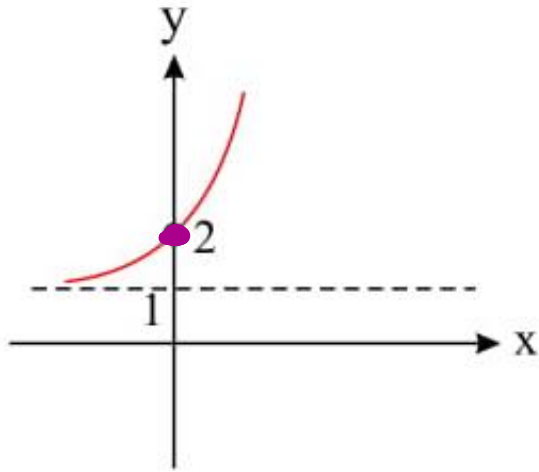
$$y > 0$$

$3^{-x} = \frac{1}{2} \rightarrow x = -1$
 $3^{-x} = 1 \rightarrow x = 0$
 $3^{-x} = 3 \rightarrow x = -1$



۱۹ نمودار تابع $y = 2^{(x-1)} + 1$ کدام است؟

$2^0 + 1 = 2$



اگر $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x-2} = 8^{x-1}$ باشد، حاصل 3^{9x-4} کدام است؟ ۲۰

$$(2^{-2})^{3x-2} = (2^3)^{x-1}$$

$$2^{-4x+4} = 2^{3x-3}$$

$$\rightarrow -4x+4 = 3x-3 \rightarrow 9x=7 \rightarrow x = \frac{7}{9}$$

$$3^{9x-4} = 3^{7-4} = 3^3 = 27$$



خانه ریاضی علی هاشمی

Alihashemi-math.com



Freemath



Alihashemi_math