

# آموزش ریاضی

## معادله درجه دو

علی هاشمی

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت خانه ریاضی علی هاشمی است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

[Alihashemi-math.com](http://Alihashemi-math.com)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$  →  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$   
 $\Delta = 0$  →  $x = \frac{-b}{2a}$  (تک جواب)  
 $\Delta < 0$  →  $x$  (بدون جواب)

$\Delta = 0$   
 تک جواب

ضرب و جمع

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x-1)(x-6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=6 \end{cases}$$

ضرب و جمع

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x-1)(x-6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=6 \end{cases}$$


$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$1) c = 0 \rightarrow x^2 - \epsilon x = 0 \rightarrow x(x - \epsilon) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \epsilon \end{cases}$$

$$2) b = 0 \rightarrow x^2 - \omega = 0 \rightarrow x^2 = \omega \rightarrow x = \pm \omega$$

$$3) a + b + c = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$3) x^2 - \omega x + \mu = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{\mu}{\omega} \end{cases}$$

$$4) b = a + c \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{-c}{a} \end{cases}$$

$$4) x^2 + \omega x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{-1}{\omega} \end{cases}$$



$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{S} = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{P} = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ \alpha + \beta = (\alpha + \beta) - 2\alpha\beta (\alpha + \beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu & \nu \\ x^2 + x - \omega = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{S} = \frac{-1}{\mu} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{P} = \frac{-\omega}{\mu} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}}$$



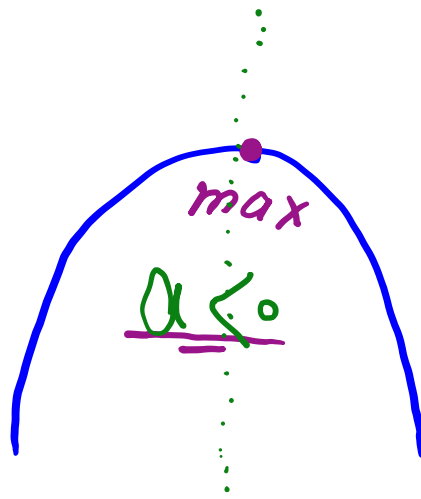
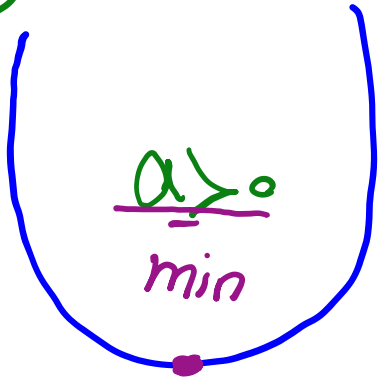
$$P > 0 \quad / \quad \Delta > 0 \quad \leftarrow \quad \text{۲ ریشه مثبت} \quad (۱)$$

$$P > 0 \quad / \quad \Delta < 0 \quad \leftarrow \quad \text{۲ ریشه منفی} \quad (۲)$$

$$P < 0 \quad / \quad \Delta > 0 \quad \leftarrow \quad \text{۱ ریشه مثبت و ۱ ریشه منفی} \quad (۳)$$



$$y = ax^2 + bx + c$$



رأس سهمی

$$x = \frac{-b}{2a}$$
$$y = \frac{-\Delta}{4a}$$

محور تقارن

$$x = \frac{-b}{2a}$$



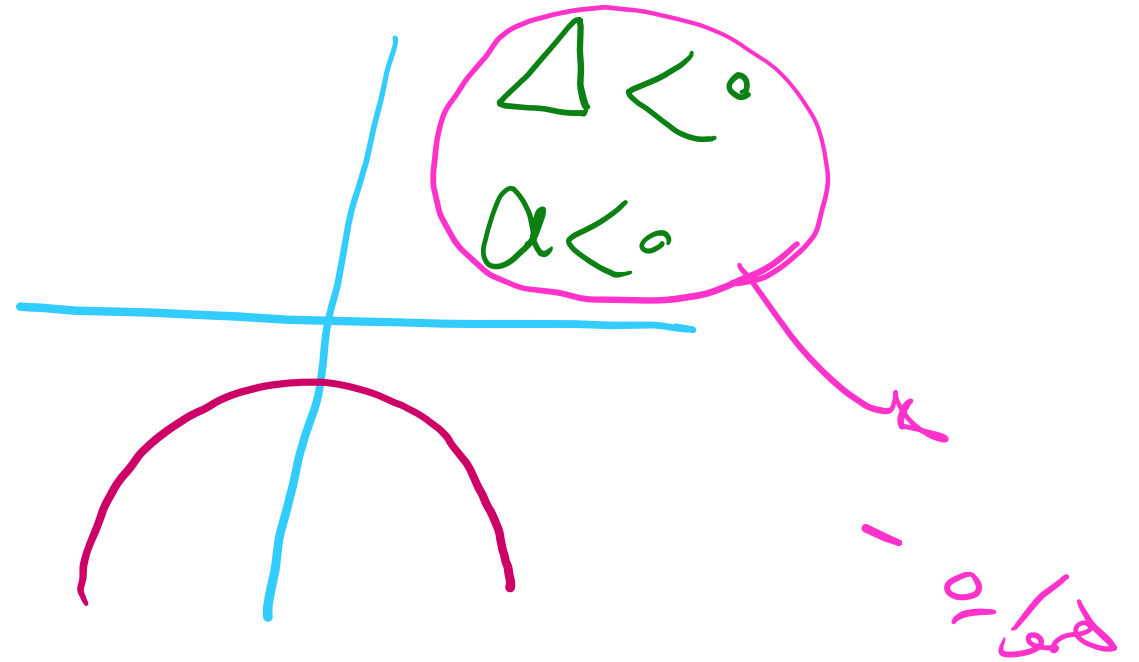
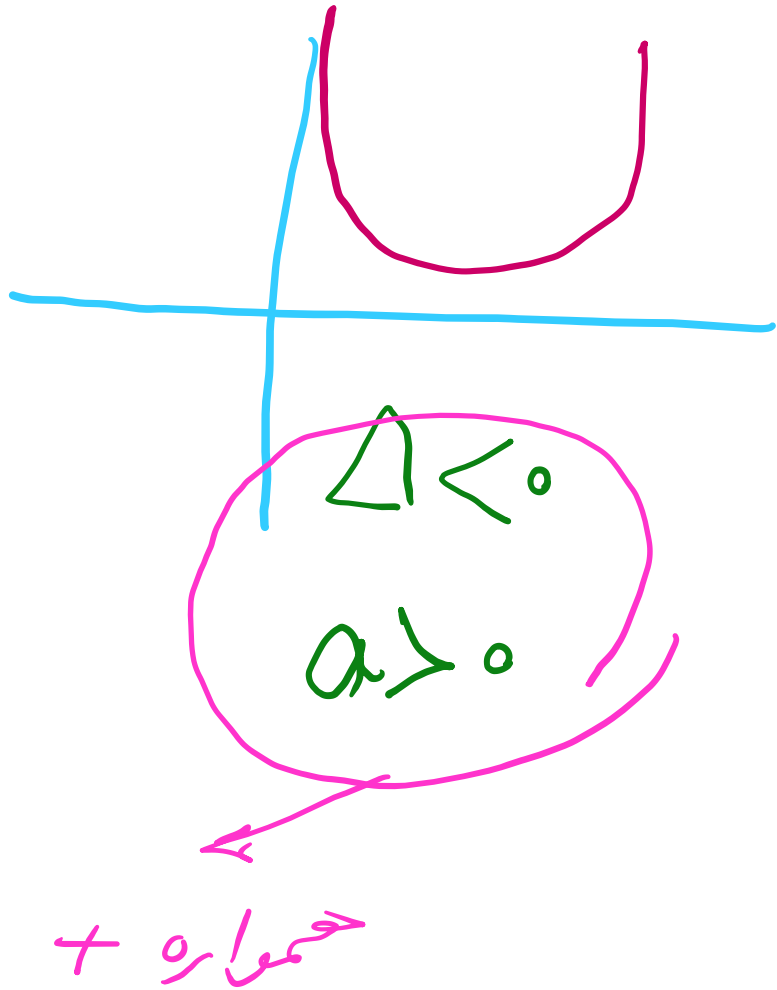
کمترین مقدار و بیشترین مقدار  $f$

$$y = \underline{a}x^2 + bx + c$$

$\underline{a} > 0$  →  $y_{\min} = \frac{-\Delta}{4a}$

$\underline{a} < 0$  →  $y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a}$







1 به ازای کدام مقادیر  $a$ ، معادله  $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$  دارای سه ریشهی حقیقی متمایز مثبت است؟

$$x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 \quad | \quad \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix} \begin{matrix} \text{III} \\ \text{IV} \end{matrix} = 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 \\ \hline ax^2 + (4-a)x - 4 \\ \hline ax^2 - ax \\ \hline 4x - 4 \\ \hline 4x - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{x} &= x^2 \\ \frac{ax^2}{x} &= ax \\ \frac{4x}{x} &= 4 \end{aligned}$$

$$\Delta > 0 \rightarrow a^2 - 14 > 0 \rightarrow a^2 > 14 \rightarrow \begin{cases} a > \sqrt{14} \\ a < -\sqrt{14} \end{cases}$$

$$S > 0 \rightarrow -a > 0 \rightarrow a < 0$$

$$P > 0 \rightarrow 4 > 0$$

$$x^3 - 4x^2 + 9x - 4 = 0 \quad \begin{matrix} x=1 \\ x=3 \end{matrix}$$

$$(x-1)(x^2 - 5x + 4) = 0$$

$$x=1$$

$$x=1 \rightarrow (x-1)=0 \quad (-\infty, -\sqrt{14}) \cup (-\sqrt{14}, 0)$$

اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی  $x(ax^2 - x - 5) = 2$  برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟

$x=2$

$2(2a - 2 - 5) = 2 \rightarrow 2a - 7 = 1 \rightarrow 2a = 8 \rightarrow a = 4$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 - 5x - 2 \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \\ 3x^2 - 5x - 2 \\ \underline{3x^2 + 12x + 6} \\ -17x - 8 \end{array}$$

$(x-2)(2x^2 + 12x + 6) = 0$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x - 2 \\ \underline{3x^2 - 9x} \\ 4x - 2 \end{array}$$

$\frac{3x^3}{x} = 3x^2$

$$\begin{array}{r} x - 2 \\ \underline{x - 2} \\ 0 \end{array}$$

$\frac{3x^2}{x} = 3x$

$\frac{x}{x} = 1$

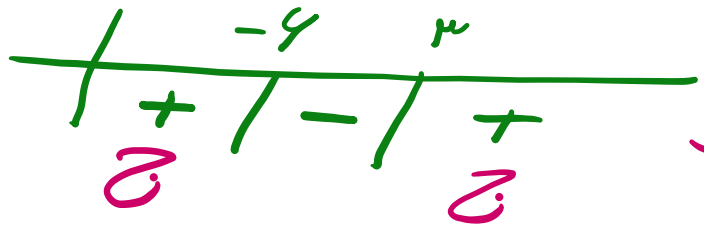
$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{16}{2}$



به ازای کدام مقادیر  $m$ ، معادله‌ی درجه‌ی دوم  $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی است؟

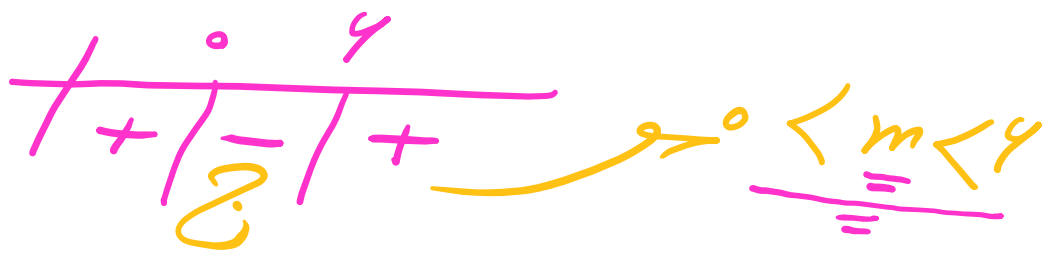
۱)  $\Delta > 0 \rightarrow (m-6)(-3) > 0 \rightarrow m + 18 > 0 \rightarrow (m+4)(m-3) = 0$

$m = -4$   
 $m = 3$



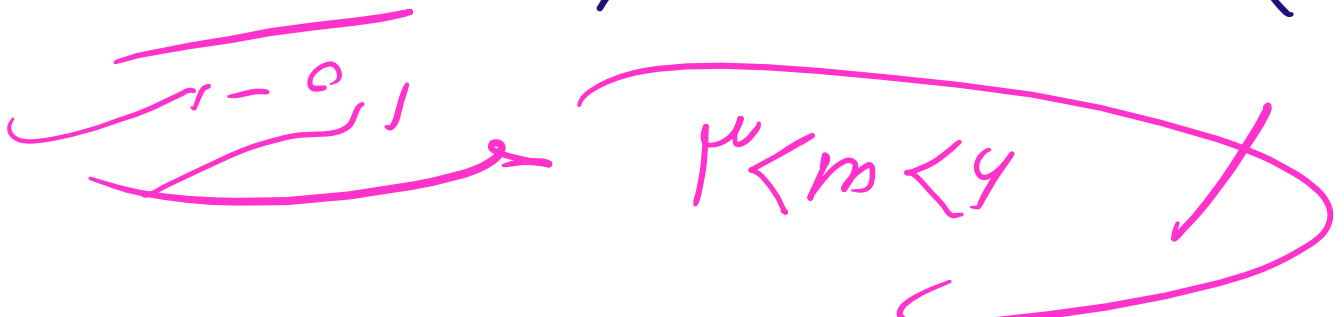
~~$m < -4$~~   
 $m > 3$

۲)  $\Delta < 0 \rightarrow \frac{1m}{m-6} < 0 \rightarrow m = 0$   
 $m = 6$



$0 < m < 6$

۳)  $P > 0 \rightarrow \frac{-3}{m-6} > 0 \rightarrow m-6 < 0 \rightarrow m < 6$



مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی  $(x^2 + x)^2 - \underline{18}(x^2 + x) + \underline{72} = 0$  کدام است؟ ۴

$$(x^2 + x - 12)(x^2 + x - 4) = 0$$

$$x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{-1}{1} = -1$$

$$x^2 + x - 4 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{-1}{1} = -1$$

$$x_1 + x_2 = -1 - 1 = -2$$



۵) اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه‌ی دوم  $y = \underline{(a-1)}x^2 + x + 3$  نسبت به خط  $x = 2$  متقارن باشد، این منحنی محور  $x$  ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

$$x=2 \rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(a-1)} = 2 \rightarrow a = \frac{3}{4} \checkmark$$

$$a = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{-1}{4}x^2 + x + 3 = 0 \quad x(-1) \rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \checkmark \\ x = -3 \end{cases}$$



۶ اگر بیشترین مقدار تابع  $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$  برابر صفر باشد، مقدار  $k$  کدام است؟

$$\frac{-\Delta}{4a} = 0 \rightarrow \Delta = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(k+3)(k) = 0 \rightarrow 4 - k^2 - 3k = 0$$

$$x(-) \rightarrow k^2 + 3k - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 1 \rightarrow a > 0 \quad \times \\ \underline{\underline{k = -4}} \quad \checkmark \end{cases}$$

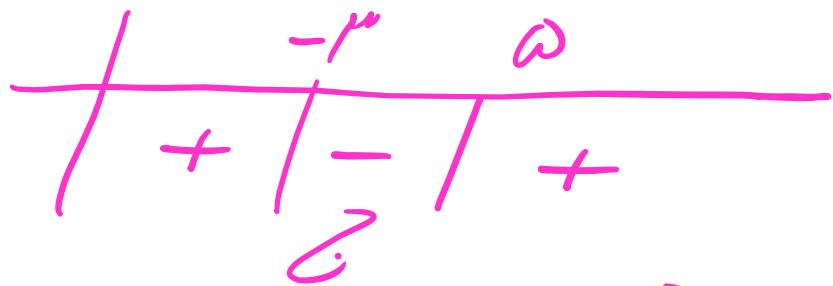


7 به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، معادله‌ی درجه‌ی دوم  $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}m + 2 = 0$  فاقد ریشه‌ی حقیقی است؟

$$\Delta < 0 \rightarrow (m+1)^2 - 4 \left( \frac{1}{2}m + 2 \right) < 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - 2m - 14 < 0 \rightarrow m^2 - 13 < 0$$

$$m^2 - 13 = 0 \rightarrow (m - \omega)(m + \mu) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = \omega \\ m = -\mu \end{cases}$$



$$-\mu < m < \omega$$



8 به ازای کدام مقدار  $m$ ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله  $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$  برابر 6 می‌باشد؟

$$\alpha + \beta = 4 \rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4 \rightarrow \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) - 4 = 0$$

$$xm^2 \rightarrow m^2 + 4m + 9 - 10m - 4m^2 = 0 \rightarrow -3m^2 - 6m + 9 = 0$$

$$m=1 \rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 20 < 0 \quad \times$$

$$m = \frac{-9}{5} \rightarrow \frac{-9}{5}x^2 - \left(\frac{-9}{5} + 3\right)x + 5 = 0 \quad \Delta > 0 \quad \checkmark$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta > 0 \rightarrow ac < 0$$



به ازای کدام مقدار  $m$ ، نمودار تابع  $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ ، بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات، مماس است؟

$$\Delta = 0$$

$$y = x$$

$$2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x \rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0$$

$$m = -5$$

$$\Delta = 0 \rightarrow m^2 - 4(2)(m+6) = 0 \rightarrow m^2 - 8m - 48 = 0$$

$$(m - 12)(m + 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 12 \rightarrow 2x^2 + 12x + 18 = 0 \quad \times \\ m = -6 \rightarrow 2x^2 - 6x + 6 = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow x^2 + 9x + 9 = 0 &\rightarrow (x+3)^2 = 0 \rightarrow x = -3 \\ \rightarrow x^2 - 3x + 3 = 0 &\rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$



۱۰ به ازای کدام مقدار  $m$ ، مجموع جذر هر دو ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم  $\frac{1}{2}x^2 - (m+1)x + \frac{1}{2} = 0$  برابر ۲ می‌باشد؟  
 $\alpha, \beta$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2 \rightarrow \underline{\alpha + \beta} + 2\sqrt{\underline{\alpha\beta}} = 2$$

$$\frac{m+1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 2 \rightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$x2 \rightarrow m+2 = 2 \rightarrow m = 0$$



11) اگر هریک از ریشه‌های معادله‌ی  $3x^2 + ax + b = 0$  دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی  $\frac{4x^2 - 7x + 3}{x} = 0$  باشد،  $a$  کدام است؟

$$A = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{A}$$

$$\rightarrow 4\left(\frac{1}{A^2}\right) - 7\left(\frac{1}{A}\right) + 3 = 0 \quad \times A^2 \rightarrow \underline{4 - 7A + 3A^2 = 0}$$

$$\text{معادله} \quad \underline{3x^2 - 7x + 4 = 0} \rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 4 \end{cases}$$



۱۲) به ازای کدام مقادیر  $a$  معادله‌ی درجه‌ی دوم  $۲x^2 + ax + a - \frac{۳}{۲} = ۰$  دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟

$$\Delta > ۰ \rightarrow a^2 - 4\left(۲\right)\left(a - \frac{۳}{۲}\right) > ۰$$

$$a^2 - 1۱a + ۱۲ > ۰ \rightarrow (a - ۹)(a - ۲) = ۰$$

$$\begin{array}{l} \nearrow a = ۹ \\ \searrow a = ۲ \end{array}$$

	۲	۹	
	+	-	+
	⊆	⊆	

$$\begin{array}{l} \nearrow a > ۹ \\ \searrow a < ۲ \end{array}$$



ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $\underline{2x^2 - 3x - 1 = 0}$ ، یک واحد کمتر است؟ (۱۳)

$$A = \frac{1}{x} - 1 \rightarrow A+1 = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{A+1} = x$$

$$2\left(\frac{1}{A+1}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{A+1}\right) - 1 = 0 \quad \times (A+1)^2 \rightarrow 2 - 3(A+1) - (A+1)^2 = 0$$

$$2 - 3A - 3 - A^2 - 2A - 1 = 0 \rightarrow -A^2 - 5A - 2 = 0$$

$$\rightarrow A^2 + 5A + 2 = 0$$



ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $x^2 + ax + b = 0$  یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی  $3x^2 + 7x + 1 = 0$  بیشتر است.  $b$  کدام است؟ (۱۴)

$$A = x + 1 \rightarrow x = A - 1$$

$$3(A-1)^2 + 7(A-1) + 1 = 0 \rightarrow 3A^2 - 4A + 3 + 7A - 7 + 1 = 0$$

$$3A^2 + A - 3 = 0 \quad \div 3 \rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = 0$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$b = -1$$



۱۵) در معادله‌ی درجه‌ی دوم  $2x^2 + ax + 9 = 0$  یک ریشه دو برابر ریشه‌ی دیگر است. مجموع دو ریشه‌ی مثبت کدام است؟

$$\beta = 2\alpha \rightarrow \beta = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \quad \checkmark$$

$$\alpha + \beta = \frac{-a}{2} = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2} \rightarrow \underline{\underline{\underline{a = -9}}}$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{9}{2} \rightarrow \alpha \cdot 2\alpha = \frac{9}{2} \rightarrow \alpha^2 = \frac{9}{4} \rightarrow \alpha = \frac{3}{2} \quad \checkmark$$



۱۶) به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، سهمی به معادله  $y = (1 - m)x^2 + 2(m - 3)x - 1$ ، همواره پایین محور  $x$  ها است؟

$$\Delta < 0 \rightarrow 4(m-3)^2 - 4(1-m)(-1) < 0 \rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0$$

$$(m-2)(m-5) < 0 \quad \left| \begin{array}{l} m=2 \\ m=5 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} 2 \quad 5 \\ | + | - | + \\ \text{ج} \end{array} \rightarrow \underline{\underline{2 < m < 5}}$$

$$a < 0 \rightarrow 1 - m < 0 \rightarrow \underline{\underline{1 < m}}$$

۱-۲-۵  $\rightarrow$   $\underline{\underline{2 < m < 5}}$





۱۷) منحنی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  محور طولها را در ۳ و ۱ و محور عرضها را در ۶ قطع کرده است. کمترین مقدار  $y$  کدام است؟

$$\begin{array}{l} A \mid 1 \\ \hline 0 \end{array} \rightarrow a + b + 4 = 0$$
$$\begin{array}{l} B \mid 3 \\ \hline 0 \end{array} \rightarrow 9a + 3b + 4 = 0$$
$$\begin{array}{l} a + b = -4 \\ 3a + b = -2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} C \mid 4 \\ \hline 4 \end{array} \rightarrow 0 + 0 + c = 4 \rightarrow c = 4$$

$$y_{\min} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(4 - 2(2)(4))}{4(2)} = -2$$



۱۸) به ازای کدام مقدار  $m$ ، رابطه‌ی  $\overline{P} + \overline{S} = 4$  بین ریشه‌های حقیقی معادله‌ی  $mx^2 + (2m-1)x = 5$  برقرار است؟

$$mx^2 + (2m-1)x - 5 = 0$$

$$\frac{-5}{m} + \frac{2m-1}{m} = 4 \rightarrow -5 - 2m + 1 = 4m$$

$$4m = -4 \rightarrow m = -1 \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 5 = 0$$

$$x(-3) \rightarrow 2x^2 + 7x + 10 = 0 \rightarrow \Delta < 0$$



۱۹ محیط مستطیلی ۱۸۰ واحد است. به ازای کدام طول مستطیل مساحت آن بیشترین مقدار است؟

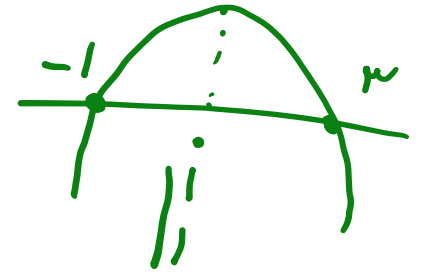
$$2x + 2y = 180 \rightarrow x + y = 90 \rightarrow y = 90 - x$$
$$S = xy = x(90 - x) = 90x - x^2$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-90}{2(-1)} = \underline{\underline{45}}$$



۲۰) اگر رأس یک سهمی روی نیمساز ربع اول باشد و محور  $x$ ها را در دو نقطه، به طولهای  $-۱$  و  $۳$  قطع کند، آن گاه این سهمی محور  $y$ ها را در نقطه ای با کدام عرض قطع می کند؟

$$f = a(x - \alpha)(x - \beta) \quad \text{و} \quad f = a(x + 1)(x - 3)$$



$$\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix} \rightarrow 1 = a(2)(-2) \rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$f = \frac{-1}{4}(x+1)(x-3) \xrightarrow{x=0} f = \frac{-1}{4}(1)(-3) = \frac{3}{4}$$



خانه ریاضی علی هاشمی

Alihashemi-math.com



Freemath



Alihashemi\_math