

# آموزش ریاضی

## معادله درجه دوم

علی هاشمی

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت خانه ریاضی علی هاشمی است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

[Alihashemi-math.com](http://Alihashemi-math.com)

معادله درجه دوم - روش دلتا

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0 \xrightarrow{\text{دو جواب}} x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0 \xrightarrow{\text{یک جواب منفرد}} x = \frac{-b}{2a}$$

$\Delta < 0 \rightarrow$  هیچ جوابی ندارد

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(3)(2) = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{6} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{6} = 1 \\ x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$



معادله درجه دوم - روش تجزیه

$\underline{\underline{x^2 - 5x + 6 = 0}}$  <sup>ضرب: جمع</sup>  $\rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0$   $\rightarrow$

$x - 2 = 0$	$\rightarrow x = 2$
$x - 3 = 0$	$\rightarrow x = 3$

$\underline{\underline{x^2 + 5x + 6 = 0}}$  <sup>ضرب: جمع</sup>  $\rightarrow (x + 4)(x + 1) = 0$   $\rightarrow$

$x + 4 = 0$	$\rightarrow x = -4$
$x + 1 = 0$	$\rightarrow x = -1$

$\underline{\underline{x^2 + 4x + 4 = 0}}$  <sup>ضرب: جمع</sup>  $\rightarrow (x + 2)(x + 2) = 0$   $\rightarrow x + 2 = 0$   $\rightarrow x = -2$  ✓

$\underline{\underline{x^2 - x - 4 = 0}}$  <sup>ضرب: جمع</sup>  $\rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$   $\rightarrow$

$x - 3 = 0$	$\rightarrow x = 3$
$x + 1 = 0$	$\rightarrow x = -1$



## معادله درجه دوم - روش پیشرفته تجزیه

$$\underline{3}x^2 - 5x + 1 = 0 \xrightarrow{x^3} \underline{9}x^2 - 5(\underline{3}x) + \underline{1} = 0 \rightarrow (3x - 1)(3x - 3) = 0$$

↑ ↑  
صفر صفر

$$\begin{cases} 3x - 1 = 0 & \rightarrow x = \frac{1}{3} \\ 3x - 3 = 0 & \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\underline{5}x^2 - 4x + 1 = 0 \xrightarrow{x^5} \underline{15}x^2 - 4(\underline{5}x) + \underline{1} = 0 \rightarrow (5x - 5)(5x - 1) = 0$$

ص. ص. ص. ص. ص. ص.

$$\begin{cases} 5x - 5 = 0 & \rightarrow x = 1 \\ 5x - 1 = 0 & \rightarrow x = \frac{1}{5} \end{cases}$$



$$ax^2 + bx + c = 0$$

✓ 1)  $c = 0$

$$x^2 + \omega x = 0 \rightarrow x(x + \omega) = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \underline{\underline{0}} \\ x + \omega = 0 \rightarrow x = -\omega \end{array} \right.$$

$$x^2 - f x = 0 \rightarrow x(x - f) = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \underline{\underline{0}} \\ x - f = 0 \rightarrow x = f \end{array} \right.$$

✓ 2)  $b = 0$

$$x^2 - f = 0 \rightarrow x^2 = f \rightarrow x = \pm \sqrt{f}$$

$$10x^2 - 9 = 0 \rightarrow 10x^2 = 9 \rightarrow x^2 = \frac{9}{10} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{9}{10}}$$

$$x^2 + f = 0 \rightarrow x^2 = -f \rightarrow X$$

$$x^2 + 10 = 0 \rightarrow x^2 = -10 \rightarrow X$$



$$ax^r + bx + c = 0$$

معادله درجه دوم - حالت خاص

$$1) a + b + c = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} \end{array} \right.$$

$$x^r + x - r = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -r \end{array} \right.$$

$$r) b = a + c \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{-c}{a} \end{array} \right.$$

$$\mu x^r + \omega x + r = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{-r}{\mu} \end{array} \right.$$

$$\mu x^r - \omega x + r = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{r}{\mu} \end{array} \right.$$

$$r x^r - \mu x - 1 = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{1}{\mu} \end{array} \right.$$

$$\omega x^r + r x - 1 = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{1}{\omega} \end{array} \right.$$

$$r x^r + x - r = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{r}{r} \end{array} \right.$$



$$(x+3)^2 - \omega(x+3) + \varepsilon = 0 \quad A = x+3$$

$$A^2 - \omega A + \varepsilon = 0 \rightarrow \begin{cases} A=1 \rightarrow x+3=1 \rightarrow x=-2 \\ A=2 \rightarrow x+3=2 \rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$$(2x-3)^2 + 4(2x-3) + 4 = 0 \quad A = 2x-3$$

$$A^2 + 4A + 4 = 0 \rightarrow (A+2)^2 = 0 \rightarrow A = -2$$

$$2x-3 = -2 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\underline{x^2 + bx + c = 0} \rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$$

معادله درجه دوم - روش مربع کامل

$$x^2 + 4x = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 4 - 4 = 0 \rightarrow (x+2)^2 = 4 \rightarrow x+2 = \pm 2$$

$$\begin{cases} x+2=2 \rightarrow x=0 \\ x+2=-2 \rightarrow x=-4 \end{cases}$$

$$x^2 - 9x = 1 \rightarrow x^2 - 9x + 9 - 9 = 1 \rightarrow (x-3)^2 = 10 \rightarrow x-3 = \pm \sqrt{10}$$

$$\begin{cases} x-3 = \sqrt{10} \rightarrow x = \sqrt{10} + 3 \\ x-3 = -\sqrt{10} \rightarrow x = -\sqrt{10} + 3 \end{cases}$$



سایت خانه ریاضی علی هاشمی

[Alihashemi-math.com](http://Alihashemi-math.com)



## معادله درجه دوم - جمع و ضرب ریشه ها

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

$$\underline{1}x^2 - \underline{\omega}x + \underline{\Sigma} = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \omega \end{cases}$$

$$\alpha + \beta = +\omega$$

$$\alpha \cdot \beta = \Sigma$$

$$\underline{\mu}x^2 + \nu x - \underline{\Sigma} = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{\nu}{\mu} \\ \alpha \cdot \beta = \frac{-\Sigma}{\mu} \end{cases}$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{-\Sigma}{\mu}$$

$$\underline{\underline{a \cdot c < 0}}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = +$$



معادلات زیر را با روش ریشه گیری حل کنید.

$$\text{الف) } 3x^2 = 27 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

$$\text{ب) } 4x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{پ) } t^2 + 10 = 0 \rightarrow t^2 = -10 \rightarrow t = \pm \sqrt{-10} \quad \times$$



معادلات زیر را با روش ریشه گیری حل کنید.

$$\text{ت) } (a-2)^2 = 0 \rightarrow a-2=0 \rightarrow a=2 \checkmark$$

$$\text{ث) } (x+3)^2 = 16 \rightarrow x+3 = \pm 4$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x+3=4 \rightarrow x=1 \checkmark \\ x+3=-4 \rightarrow x=-7 \checkmark \end{array} \right.$$

$$\text{ج) } (x-3)^2 = 5 \rightarrow x-3 = \pm\sqrt{5}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x-3=\sqrt{5} \rightarrow x=\sqrt{5}+3 \checkmark \\ x-3=-\sqrt{5} \rightarrow x=-\sqrt{5}+3 \checkmark \end{array} \right.$$



معادله ی  $(x^2 - 1)^2 = 6$  را حل کنید و تعداد جواب های آن را تعیین کنید.

$$x^2 - 1 = \pm \sqrt{6}$$

$$1) \quad x^2 - 1 = \sqrt{6} \quad \rightarrow \quad x^2 = \sqrt{6} + 1 \quad \rightarrow \quad x = \pm \sqrt{\sqrt{6} + 1} \quad \cdot \quad \text{جواب}$$

$$2) \quad x^2 - 1 = -\sqrt{6} \quad \rightarrow \quad x^2 = \ominus \sqrt{6} + 1 \quad \rightarrow \quad x = \text{X}$$



معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$$\text{الف) } x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-10}{2}\right)^2 = 25$$

$$x^2 - 10x + 25 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-5)^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-5)^2 = 1$$

$$x - 5 = 1 \quad \rightarrow \quad x = 6$$

$$x - 5 = -1 \quad \rightarrow \quad x = 4$$



معادلات زیر را به روش کلی حل کنید.

$$\text{الف) } 3x^2 - 5x + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 7 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4(3)(7) = 25 - \underline{12 \times 7} < 0$$

مطالعه کنید



سایت خانه ریاضی علی هاشمی

[Alihashemi-math.com](http://Alihashemi-math.com)

مجموع مربعات سه عدد مثبت متوالی زوج، ۲۰۰ است؛ حاصل جمع آن سه عدد کدام است؟  $\sqrt{x} / \sqrt{x+2} / \sqrt{x+4}$

$$(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{x+2})^2 + (\sqrt{x+4})^2 = 200 \rightarrow x^2 + 4x^2 + 1x + 4 + x^2 + 4x + 4 = 200$$

$$\rightarrow 12x^2 + 4x - 192 = 0 \rightarrow x^2 + x - 16 = 0$$

$$(x + 5)(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 & \times \\ x = 3 & \checkmark \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{x+2} = 2 \\ \sqrt{x+4} = 2 \end{cases}$$

جواب

۲۴



اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر سه سال است؛ اگر سه سال دیگر، حاصل ضرب سن آنها برابر با ۲۷۰ باشد، نسبت سن کنونی آن ها به یکدیگر چقدر است؟

$$\underline{x} \rightarrow \underline{x+3}$$

$$x(x+3) = \underline{270} \rightarrow x^2 + 3x - 270 = 0 \rightarrow (x+18)(x-15) = 0$$

$$x+18=0 \rightarrow x=-18$$

$$x-15=0 \rightarrow x=\underline{15}$$

$$\text{کوچک} = 15 - 3 = \underline{12}$$

$$\text{بزرگ} = 12 + 3 = \underline{15}$$

$$\text{نسبت} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$





$$x^{\gamma} - \gamma x^{\gamma} + \gamma = 0$$

$$A = x^{\gamma}$$

$$A^{\gamma} - \gamma A + \gamma = 0$$

$$A=1 \rightarrow x^{\gamma}=1$$

$$x = \pm 1$$

$$A=\gamma \rightarrow x^{\gamma}=\gamma$$

$$x = \pm \sqrt{\gamma}$$



$$\left(\frac{x^r}{\mu} - \nu\right)^2 - \gamma\left(\frac{x^r}{\mu} - \nu\right) + \epsilon = 0$$

$$A = \frac{x^r}{\mu} - \nu$$

$$A^2 - \gamma A + \epsilon = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} A=1 \\ A=4 \end{array} \right.$$

$$1) \frac{x^r}{\mu} - \nu = 1 \rightarrow \frac{x^r}{\mu} = \mu \rightarrow x^r = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

$$2) \frac{x^r}{\mu} - \nu = 4 \rightarrow \frac{x^r}{\mu} = 1 \rightarrow x^r = 25 \rightarrow x = \pm \sqrt{25}$$



$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{\gamma} - \gamma \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 \quad A = x + \frac{1}{x}$$

$$A^{\gamma} - \gamma A = 0 \rightarrow A(A - \gamma) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} A = 0 \\ A = \gamma \end{array} \right.$$

$$1) \quad x + \frac{1}{x} = 0 \xrightarrow{\times x} x^{\gamma} + 1 = 0 \rightarrow x^{\gamma} = -1 \rightarrow X$$

$$2) \quad x + \frac{1}{x} = \gamma \xrightarrow{\times x} x^{\gamma} + 1 = \gamma x \rightarrow x^{\gamma} - \gamma x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^{\gamma} = 0$$

$$x = 1$$



به ازای کدام مقادیر  $a$ ، معادله‌ی درجه‌ی دوم  $\underline{3}x^2 + \underline{a}x - \underline{3} = 0$  دو جواب حقیقی و متمایز دارد؟

$$\Delta > 0 \rightarrow a^2 - 4(3)(-3) > 0 \rightarrow \underline{a^2} + \underline{36} > \underline{0}$$

$\rightarrow a \in \mathbb{R}$



معادله‌ی درجه‌ی دوم  $x(2x - 5) = a$  به ازای یک مقدار  $a$  ریشه‌ی مضاعف دارد. مقدار ریشه‌ی مضاعف کدام است؟

$$2x^2 - 5x - a = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow 25 - 4(2)(-a) = 0 \rightarrow 25 + 8a = 0 \rightarrow a = -\frac{25}{8}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{4}$$

$$y = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$x = 1 \checkmark$$

$$y = 0 \checkmark$$



یکی از جواب‌های معادله‌ی  $\underline{3x^2} - 5x + c = 0$  برابر ۲ است. جواب دیگر معادله کدام است؟

$$\xrightarrow{x=2} 12 - 10 + c = 0 \rightarrow c = -2$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \rightarrow 2 \times \beta = \frac{-2}{3} \rightarrow \beta = -\frac{1}{3}$$



معادله  $x^3 + x^2 - 18x - 18 = 0$  چند ریشه دارد؟

$$x^2(\underline{x+1}) - 18(\underline{x+1}) = 0$$

$$\hookrightarrow (x+1)(x^2-18) = 0$$

$$1) x+1=0 \rightarrow x=-1 \quad \checkmark$$

$$2) x^2-18=0 \rightarrow x^2=18 \rightarrow x=\pm\sqrt{18}$$



مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $-3x^2 + 4x + 5 = 0$  کدام است؟

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{5}{-3}$$





مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی  $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$  کدام است؟

$$A = x^2 + x \rightarrow A^2 - 18A + 72 = 0 \rightarrow (A - 4)(A - 12) = 0$$

$$1) A = 4 \rightarrow x^2 + x = 4 \rightarrow x^2 + x - 4 = 0 \rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} = -1 \quad \checkmark$$

$$2) A = 12 \rightarrow x^2 + x = 12 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} = -1 \quad \checkmark$$

$$\text{مجموع} = -1 - 1 = -2$$

خانه ریاضی علی هاشمی

Alihashemi-math.com



Freemath



Alihashemi\_math