

آموزش ریاضی دوازدهم انسانی

دنباله هندسی

(فصل سوم - درس اول)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

$$\underbrace{1}_1, \underbrace{r}_2, \underbrace{r^2}_3, \underbrace{r^3}_4, \underbrace{r^4}_5, \dots \rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = r \end{cases}$$

جدد عمومی $a_n = a_1 q^{n-1}$

مجموعه جملات $\sum_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$

$$a_{101} = a_1 \cdot q^{100} = 1 \times r^{100} = r^{100}$$

$$\sum_{10} = \frac{1(r^{10} - 1)}{r - 1} = 1024 - 1 = 1023$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \rightarrow q = \frac{1}{2} \text{ نزولی}$$

$$0 < q < 1$$

نزولی

$$q > 1$$

معدوم

$$q < 0$$

متناوب

$$\sum_{\infty} \text{حدا مضروب} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

1

حاصل عبارت $t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1$ به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ کدام است؟

$$| a_1 = 1$$

$$| q = t \rightarrow \sum_{k=0}^{11} t^k = \frac{1(t^{12} - 1)}{t - 1}$$

$$| a_1 = 1$$

$$| q = t^{10} \rightarrow \sum_{k=0}^{10} t^{10k} = \frac{1(t^{110} - 1)}{t^{10} - 1}$$

$$\frac{\frac{t^{12} - 1}{t - 1}}{\frac{t^{110} - 1}{t^{10} - 1}} = \frac{t^{12} - 1}{t - 1} = \frac{(t - 1)(t^{11} + t^{10} + \dots + t + 1)}{t - 1} = t^{11} + t^{10} + \dots + t + 1$$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{12} + \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{11} + \dots + \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) + 1 = \frac{1 + 5 - 2\sqrt{5} - 2 + 2\sqrt{5} + 4}{4} = \frac{1}{4} = 2$$

در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع سه جمله‌ی اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله‌ی اول آن ۱۵۳ می‌باشد. جمله‌ی اول چند برابر جمله‌ی پنجم است؟

$$S_4 = 153 \rightarrow \frac{a_1 (q^4 - 1)}{q - 1} = 153$$

$$S_6 = 136 \rightarrow \frac{a_1 (q^6 - 1)}{q - 1} = 136$$

$$\frac{S_4}{S_6} = \frac{153}{136} = \frac{q^4 - 1}{q^6 - 1}$$

$$\rightarrow \frac{(q^4 - 1)(q + 1)}{q^6 - 1} = q^3 + 1 = \frac{153}{136} \rightarrow q^3 = \frac{1}{8} \rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_1}{a_5} = \frac{a_1}{a_1 q^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$$

در یک دنباله هندسی مجموع ۸ جمله اول $\frac{5}{4}$ مجموع ۴ جمله اول آن است، جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟ ۳

$$\sum_{n=1}^8 = \frac{5}{4} \sum_{n=1}^4 \rightarrow \frac{a_1 (q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{5}{4} \cdot \frac{a_1 (q^4 - 1)}{q - 1}$$

$$\rightarrow \frac{(q^8 - 1)(q^4 + 1)}{(q^4 - 1)(q^4 + 1)} = \frac{5}{4} \rightarrow q^8 = \frac{1}{4} \rightarrow q^2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 \cdot q^6}{a_1} = q^6 = (q^2)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

حاصل $(1 + x + x^2 + \dots + x^9)(1 - x + x^2 - \dots + x^9)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

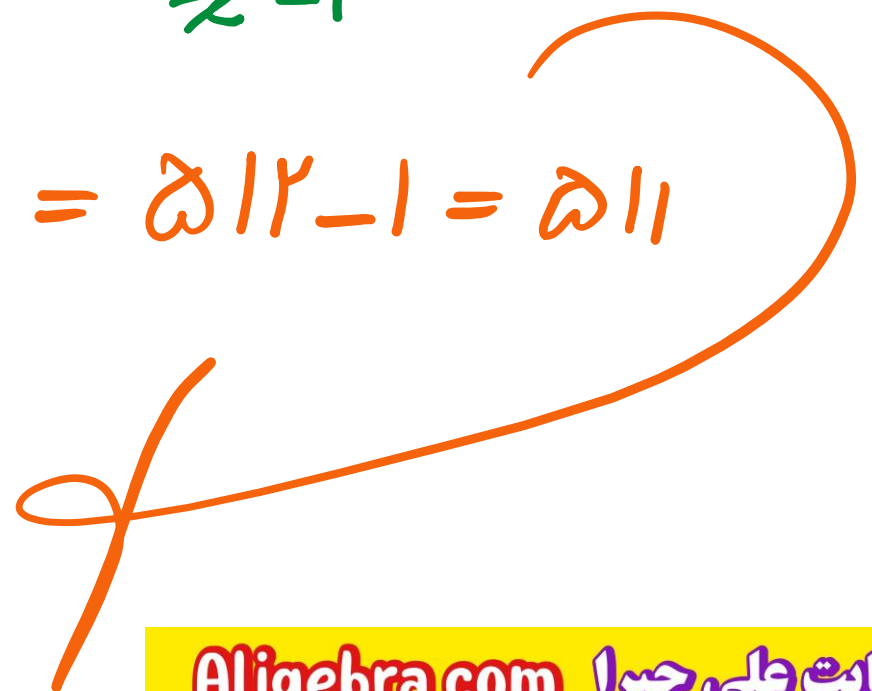
$x^2 = 2$

$a_1 = 1, q = x, S_9$

$a_1 = 1, q = -x, S_9$

$$\left(\frac{1(x^9 - 1)}{x - 1} \right) \left(\frac{1(+x^9 + 1)}{+x + 1} \right) = \frac{x^{18} - 1}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{(x^2)^9 - 1}{x^2 - 1} = \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 2^9 - 1 = 512 - 1 = 511$$



در یک دنباله هندسی صعودی به صورت $\dots, b, \underline{9}, \underline{a}, \underline{4}$ مجموع شش جمله‌ی اول کدام است؟

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} a_1 = 4 \\ a_n = 9 \end{array} \right\} & \rightarrow \frac{a_n}{a_1} = \frac{9}{4} \rightarrow \frac{a_1 q^n}{a_1} = 9 = \frac{9}{4} \rightarrow 9 = 4 \cdot \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$q > 1$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 4 \\ q = \frac{9}{4} \end{array} \right\} \rightarrow S_6 = \frac{4 \left(\left(\frac{9}{4} \right)^6 - 1 \right)}{\frac{9}{4} - 1} = 1 \left(\left(\frac{9}{4} \right)^6 - 1 \right)$$

۶ دنباله‌ی هندسی $\frac{1}{2}, x, 2$ غیر نزولی است. مجموع شش جمله‌ی اول آن کدام است؟

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1 q^2}{a_1} = q^2 = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \rightarrow q = \frac{-1}{2}$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = \frac{-1}{2} \end{cases} \rightarrow S_6 = \frac{2 \left(\left(\frac{-1}{2} \right)^6 - 1 \right)}{\frac{-1}{2} - 1} = \frac{-4}{3} \left(\frac{-4}{4} \right) = \frac{21}{14}$$

۷ در یک دنباله‌ی هندسی نزولی، مجموع جملات پنجم و ششم برابر ۲ و تفاضل جمله‌ی هفتم از پنجم برابر ۱ است. جمله‌ی هفتم آن کدام است؟

$$\begin{aligned} a_5 + a_6 &= 2 \rightarrow a_5 + a_5 q = 2 \\ a_5 - a_7 &= 1 \rightarrow a_5 - a_5 q^2 = 1 \end{aligned} \rightarrow \frac{a_5(1+q)}{a_5(1-q^2)} = 2$$

$$\rightarrow \frac{1+q}{(1-q)(1+q)} = 2 \rightarrow 1-q = \frac{1}{2} \rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$a_1 q^6 + a_1 q^5 = 2 \rightarrow \frac{1}{16} a_1 + \frac{1}{32} a_1 = 2 \rightarrow a_1 = \frac{64}{3}$$

$$a_7 = a_1 q^6 = \frac{64}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{3}$$

۸ اگر در دنباله‌ای هندسی $S_n = 2 \times 5^n - 2$ باشد a_n کدام است؟

$$n=1 \rightarrow S_1 = a_1 = 10 - 2 = 8 \rightarrow a_1 = 8 \quad \checkmark$$

$$n=2 \rightarrow S_2 = a_1 + a_2 = 20 - 2 = 18 \rightarrow a_2 = 10 \quad \checkmark$$

$$a_2 = a_1 \cdot q \rightarrow 10 = 8 \times q \rightarrow q = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \quad \checkmark$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 8 \times \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}$$

در دنباله‌ای هندسی اگر جمله سوم برابر ۲ باشد حاصل ضرب ۵ جمله اول کدام است؟

$$a_n = 2 \rightarrow \underline{a_1 q^n} = 2$$

$$\begin{aligned} a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 &= a_1 \times a_1 q \times a_1 q^2 \times a_1 q^3 \times a_1 q^4 \\ &= a_1 \times q^{10} = (a_1 q^2)^5 = (2)^5 = 32 \end{aligned}$$

۱۰ در یک دنباله‌ی هندسی صعودی جمله‌ی سوم ۱۰ و جمله‌ی هفتم ۴۰ است. جمله‌ی اول کدام است؟

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} a_v = 40 \\ a_{\mu} = 10 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{a_v}{a_{\mu}} = 4 \rightarrow \frac{a_1 q^4}{a_1 q^1} = q^3 = 4 \rightarrow q = \sqrt[3]{4} \rightarrow q = \sqrt[3]{4} \\ & \rightarrow a_1 \times 1 = 10 \rightarrow a_1 = 10 \end{aligned}$$

Note: The handwritten solution shows a sequence of steps. It starts with $a_v = 40$ and $a_{\mu} = 10$. The ratio $\frac{a_v}{a_{\mu}} = 4$ is derived. Then, $\frac{a_1 q^4}{a_1 q^1} = q^3 = 4$ is shown, leading to $q = \sqrt[3]{4}$. Finally, $a_1 \times 1 = 10$ is used to find $a_1 = 10$. A large green circle is drawn around the final result $a_1 = 10$.

مجموع جواب‌های معادله‌ی $\frac{1 - x + x^2 - \dots + x^6 - x^7 + x^8}{1 - x^3 + x^6} = 5$ کدام است؟

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ q = -x \end{array} \right\} \rightarrow \sum_9 = \frac{1(-x^9 - 1)}{-x - 1} = \frac{x^9 + 1}{x + 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ q = -x^3 \end{array} \right\} \rightarrow \sum_3 = \frac{1(-x^9 - 1)}{-x^3 - 1} = \frac{x^9 + 1}{x^3 + 1}$$

$$\frac{(x+1)(x^9 - x + 1)}{x+1} = 5 \rightarrow x^9 - x + 1 = 5 \rightarrow x^9 - x - 4 = 0$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{\pm 1}{1} = 1$$

۱۲) بین دو عدد ۱ و ۹ سه واسطه‌ی هندسی می‌نویسیم جمله‌ی وسط کدام است؟

$$\frac{1}{a_1} < \frac{1}{a_2} < \frac{1}{a_3} < \frac{1}{a_4} < \frac{9}{a_5}$$

$$a_5 = 9 \rightarrow a_1 q^4 = 9 \rightarrow q^4 = 9 \rightarrow q^2 = 3$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 = 1 \times 3 = 3$$

۱۳ در یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $q = 2$ مجموع شش جمله‌ی اول چند برابر مجموع سه جمله‌ی اول است؟

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{\frac{a_1(q^6-1)}{q-1}}{\frac{a_1(q^3-1)}{q-1}} = \frac{(q^3-1)(q^3+1)}{q^3-1} = q^3+1$$

$$\frac{S_6}{S_3} = q^3+1 \xrightarrow{q=2} \frac{S_6}{S_3} = 1+1 = 2$$

در یک دنباله‌ی هندسی حاصل ضرب جملات سوم و پنجم، سه برابر جمله‌ی هفتم است. جمله‌ی اول کدام است؟

$$a_3 \cdot a_5 = 3a_7 \rightarrow a_1 q^2 \cdot a_1 q^4 = 3a_1 q^6$$

$$\rightarrow a_1 q^2 \cdot q^4 = 3a_1 q^6$$

$$a_1 = 3$$

در یک دنباله هندسی نزولی مجموع جمله ی اول و دوم برابر حد مجموع جملات بعدی است. قدرنسبت کدام است؟

1/2

$$a_1 + a_2 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots$$

$$\rightarrow a_1 + a_1 q = \frac{a_1 q^2}{1-q} \rightarrow a_1(1+q)(1-q) = a_1 q^2$$

$$\rightarrow 1-q = q^2 \rightarrow 1 - q^2 = 1 \rightarrow q^2 = \frac{1}{2} \rightarrow q = +\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

توپي را از زمين تا ارتفاع ۱۰ متری پرتاب می کنیم. در هر بار برخورد به زمین توپ تا نصف ارتفاع قبلی بالا می آید. کل مسیری که توپ تا توقف خود می پیماید چقدر است؟

مسیر : ۱۰ ، ۵ ، ۲٫۵ ، ...

$$S_{\infty} = \frac{10}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$$

ووو

$$\text{مسافت} = 20 \times 2 = 40$$

جمله‌ی عمومی یک دنباله $a_n = \frac{3^n + 4^n}{12^n}$ است، حد مجموع بی‌شمار جمله‌ی این دنباله کدام است؟ (۱۷)

$$a_n = \left(\frac{3}{12}\right)^n + \left(\frac{4}{12}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

اگر حد مجموع جملات هندسی نزولی برابر ۳ و حد مجموع مربعات آنها نیز برابر ۳ باشد، q (قدرنسبت) کدام است؟

$$a_1, a_1q, a_1q^2, \dots \rightarrow \sum_{\infty} = \frac{a_1}{1-q} = 3 \xrightarrow{\text{تولد } q < 1} \frac{a_1^2}{(1-q)^2} = 9$$

$$a_1^2, a_1^2q^2, a_1^2q^4, \dots \rightarrow \sum_{\infty} = \frac{a_1^2}{1-q^2} = 3$$

$$\frac{\frac{a_1^2}{(1-q)^2}}{\frac{a_1^2}{1-q^2}} = \frac{3}{3} \rightarrow \frac{(1-q)(1+q)}{(1-q)(1-q)} = 3 \rightarrow 1+q = 3-1q$$

$$\rightarrow 2q = 2 \rightarrow q = 1$$

۱۹ دنباله‌ی هندسی $\dots, \frac{1}{3}, x, 3$ غیرنزولی است. مجموع شش جمله‌ی اول آن کدام است؟

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \frac{a_n}{a_1} = \frac{a_1 q^n}{a_1} = q^n = \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{9} \rightarrow q = \frac{-1}{3}$$

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ q = \frac{-1}{3} \end{cases} \rightarrow S_6 = \frac{3 \left(\left(\frac{-1}{3} \right)^6 - 1 \right)}{\frac{-1}{3} - 1} = \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{29}} = \frac{18\sqrt{2}}{11}$$

۲۰ در دنباله ای، $t_n = \frac{5}{3^{n+1}}$ می باشد حد مجموع جملات این دنباله چیست؟

$$\begin{aligned} n=1 &\rightarrow t_1 = \frac{5}{9} \\ n=2 &\rightarrow t_2 = \frac{5}{27} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{t_2}{t_1} = 9 = \frac{5/27}{5/9} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} t_1 &= 5/9 \\ 9 &= 1/3 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad S_{\infty} = \frac{5/9}{1 - 1/3} = 5/4$$

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت Algebra.com است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.