

آموزش ریاضی دوازدهم انسانی

حل تمرین های فصل دوم

(درس اول مدل سازی و دنباله)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۱. برای محاسبه قبض آب^۱ (آب بها) هر واحد مسکونی در شهر تهران ابتدا میانگین مصرف هر واحد مسکونی محاسبه می شود و بر اساس آن «طبقه مصرفی» واحد مسکونی با توجه به «جدول ۱» تعیین می گردد. آنگاه به کمک رابطه زیر، آب بها محاسبه می شود:

هزینه هر متر مکعب با توجه به طبقه مصرف $\times$ میانگین مصرف = آب بها^۱

جدول ۱. محاسبه آب بها بر اساس طبقات مصرف در استان تهران

هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)
۸/۴۹۶	$25 \leq x < 30$
۱۱/۵۸۰	$30 \leq x < 35$
۱۵/۴۴۴	$35 \leq x < 40$
۳۳/۴۶۲	$40 \leq x < 50$
۶۶/۹۲۴	$x \geq 50$

هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)
۱/۴۱۹	$0 \leq x < 5$
۲/۱۲۳	$5 \leq x < 10$
۲/۸۲۷	$10 \leq x < 15$
۳/۷۰۳	$15 \leq x < 20$
۵/۴۰۰	$20 \leq x < 25$

الف) نمودار «طبقه مصرف - آب بها» جدول بالا را رسم کنید و ضابطه و دامنه و برد تابع را به دست آورید.

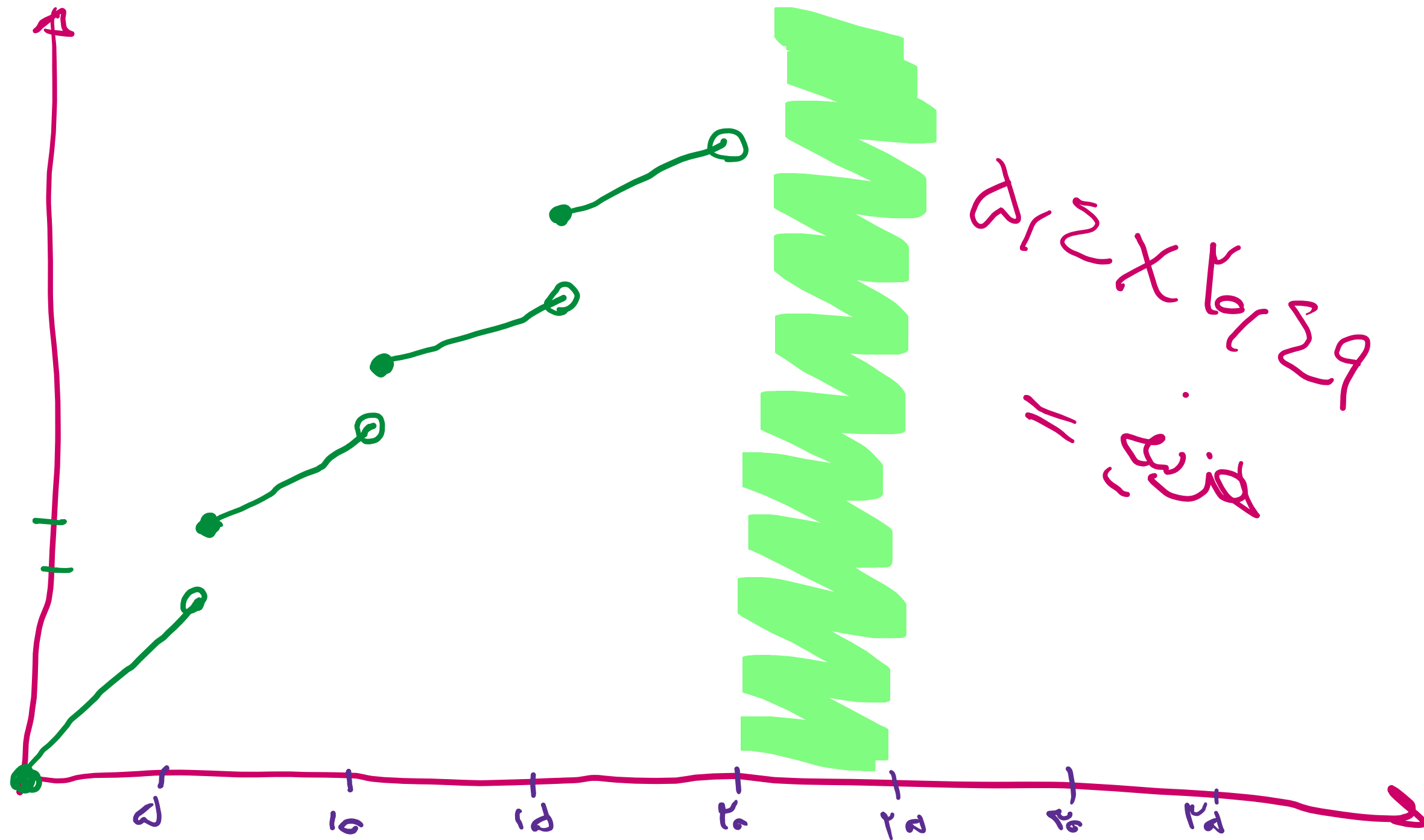
ب) اگر میانگین مصرف یک واحد مسکونی^۲ در تهران در یک ماه $20/49 m^3$ باشد، سطح زیر منحنی نمودار چه تابعی، آب بها را مشخص می کند؟

۴۴, ۹۲۴

$x \geq 50$

$$D_f = [0, +\infty)$$

$$R_f = [0, 5 \times 1,419) \cup [1, 123 \times 5, 1, 123 \times 15) \cup \dots$$



۲. اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از آنها را مشخص کنید.

الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر

ب) میزان استفاده دانش آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر ساعت

ج) حجم مکعبی به ضلع x

د) تغییرات سطح دریاچه ارومیه در بیست سال اخیر

ه) میزان مصرف ماهیانه آب در یک واحد مسکونی

☐ $\mathbb{N}$

☒ $\mathbb{R}$ +

☒ $\mathbb{N}$

☐ $\mathbb{R}$

☐ $\mathbb{N}$

☒ $\mathbb{R}$ +

☒ $\mathbb{N}$

☐ $\mathbb{R}$

☒ $\mathbb{N}$

☐ $\mathbb{R}$

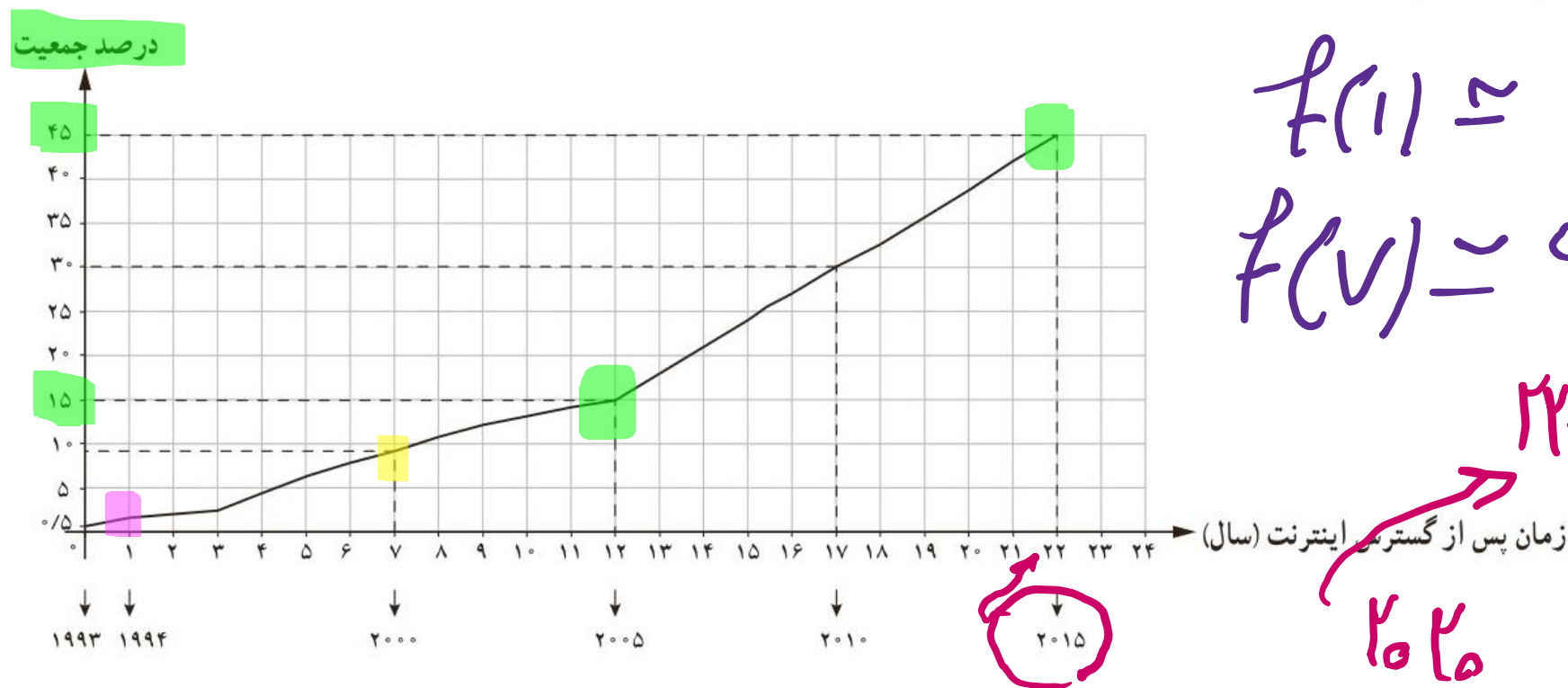
ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۳. نمودار زیر درصد جمعیتی از سراسر جهان را نشان می‌دهد که از ۱۹۹۳ که سال گسترش اینترنت در دنیاست، از اینترنت استفاده کرده‌اند:

الف) اگر $f(n)$ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان، n سال پس از گسترش اینترنت باشد، به کمک نمودار داده شده مقادیر $f(1)$ و $f(7)$ را مشخص کنید و معنای آن را توضیح دهید.

ب) با توجه به مدل خطی استفاده‌کنندگان از اینترنت از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۵، با به دست آوردن ضابطه تابع خطی، در سال ۲۰۲۰ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان چقدر خواهد بود؟



$$f(1) \approx 4\%$$

$$f(7) \approx 10\%$$

$$12 + 5 = 17$$

$$10\%$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

$$\begin{aligned} f(r) &= r\alpha \\ f(r) &= 1\alpha \end{aligned} \rightarrow \frac{r\alpha - 1\alpha}{r - 1} = \frac{r\alpha - \alpha}{r - 1} = \frac{\alpha(r - 1)}{r - 1} = \alpha$$

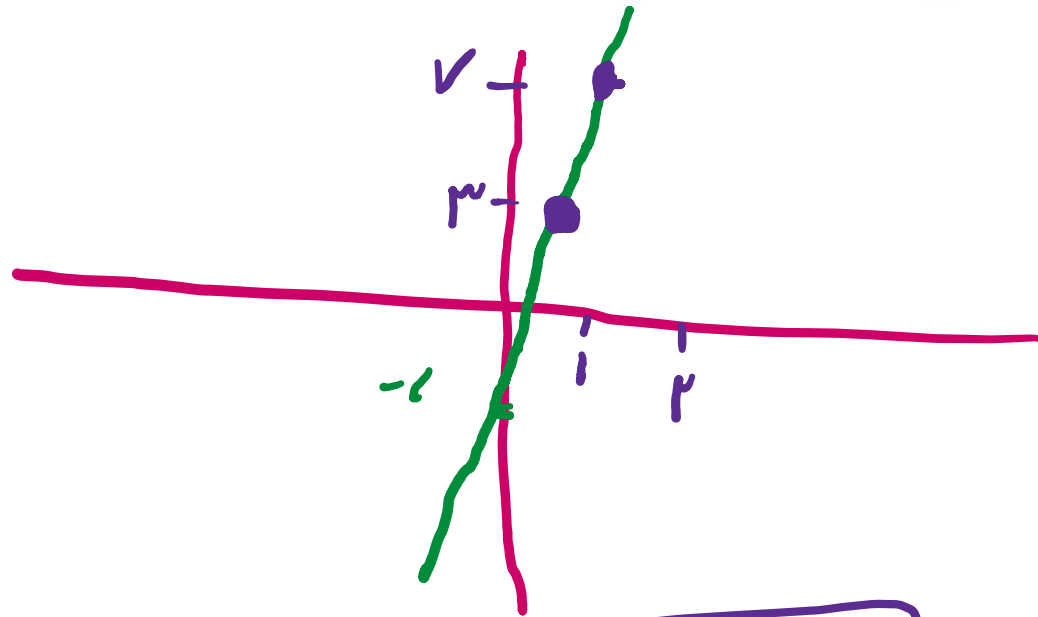
$$y = ax + b \rightarrow y = r\alpha x + b \rightarrow 1\alpha = r\alpha + b \rightarrow b = -r\alpha$$

$$y = r\alpha x - r\alpha \xrightarrow{x=r} y = r\alpha r - r\alpha = r\alpha$$

۴. اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی $y = 4x - 1$ پیروی کنند، با توجه به دامنه دنباله :

الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.

ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه ارتباطی با رابطه بازگشتی دنباله دارد؟



تابعی

$$\{ \begin{array}{l} N \rightarrow R \\ a_n = 4n - 1 \end{array} \}$$

تفاوت

$$a_{n+1} = a_n + 4$$

۵. با توجه به دنباله‌های $a_n = 3^n$ ، $b_n = (-\frac{1}{2})^{n+1}$ ، $c_n = \frac{1}{3n-1}$ ، $d_n = n^2 - 1$ ، حاصل عبارت‌های خواسته شده را به دست آورید.

الف) $a_2 + b_1$

$$a_2 = 3^2 = 9$$

$$b_1 = (-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

$$9 + \frac{1}{4} = 9.25$$

ب) $c_2 - d_1$

$$c_2 = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

$$d_1 = 1 - 1 = 0$$

$$\frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

ج) $b_2 + d_2$

$$b_2 = (-\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{8}$$

$$d_2 = 4 - 1 = 3$$

$$-\frac{1}{8} + 3 = \frac{23}{8}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۶. جمله پنجم دنباله‌های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$, $a_1 = -2$

$$a_2 = \frac{1}{3} (-2) = -\frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{9}$$

$$a_4 = \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{2}{27}$$

$$a_5 = \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{27}\right) = -\frac{2}{81}$$

ب) $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, $a_1 = 1$

$$a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$a_5 = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

$$ج) a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}, \quad a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

$$د) a_{n+1} = a_n + (-1)^n, \quad a_1 = 1$$

$$a_4 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$a_5 = 1 + 1 + 3 = 5$$

$$a_2 = 1 + (-1)^1 = 0$$

$$a_3 = 0 + (-1)^2 = 1$$

$$a_4 = 1 + (-1)^3 = 0$$

$$a_5 = 0 + (-1)^4 = 1$$

۷. جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	رابطه بازگشتی	ضابطه دنباله	دنباله دو ضابطه‌ای
۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ...	$a_{n+1} = a_n + 3$ $a_1 = 5$	$a_n = 3n + 2$	
۴, ۱, ۴, ۱, ۴, ۱, ...	$a_{n+1} = a_n + 3(-1)^n$ $a_1 = 4$		$a_n = \begin{cases} 4 & \text{نرد} \\ 1 & \text{زوج} \end{cases}$
$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots$			$a_n = \begin{cases} n & \text{نرد} \\ \frac{1}{n} & \text{زوج} \end{cases}$
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$		$a_n = \frac{n}{n+1}$	

۸. شش جمله اول دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & n \text{ زوج} \\ 3a_n + 1 & n \text{ فرد} \end{cases}$ را برای هر کدام از حالت‌های زیر بنویسید.

الف) $a_1 = 11$

ب) $a_1 = 25$

$$n=1 \rightarrow a_2 = 3a_1 + 1 = 3(11) + 1 = 34$$

$$n=2 \rightarrow a_3 = \frac{1}{2}(34) = 17$$

$$n=3 \rightarrow a_4 = 3(17) + 1 = 52$$

$$n=4 \rightarrow a_5 = \frac{1}{2}(52) = 26$$

$$n=5 \rightarrow a_6 = 3(26) + 1 = 79$$

$$a_1 = 25$$

$$a_2 = 76$$

$$a_3 = 38$$

$$a_4 = 115$$

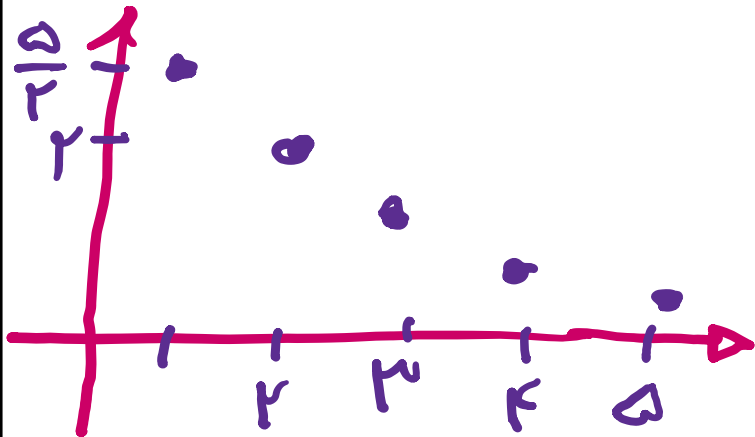
$$a_5 = \frac{1}{2}115$$

ALIGEBRA.COM

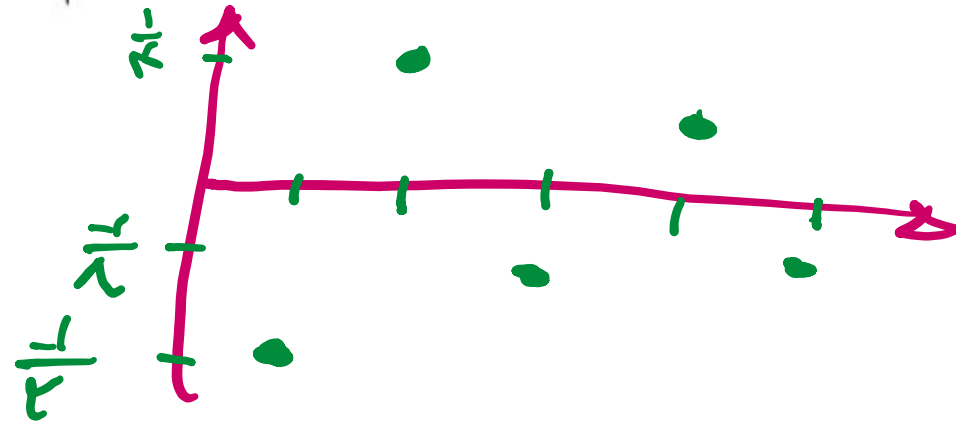
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۹. نمودار دنباله‌های زیر را برای $n \leq 5$ رسم کنید.

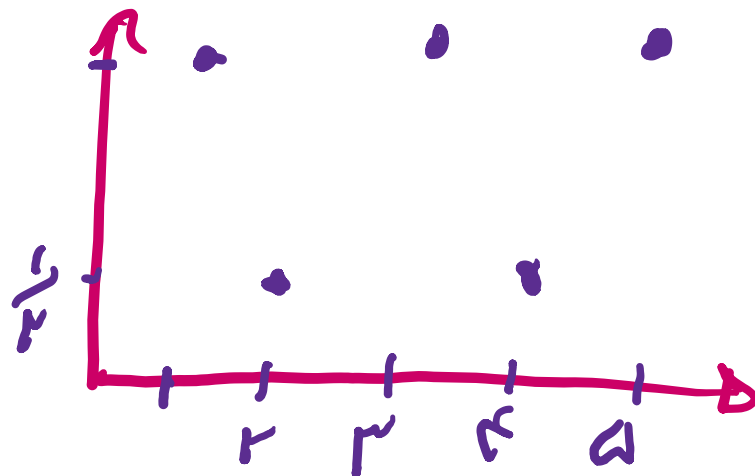
الف) $a_n = -\frac{1}{2}n + 3$



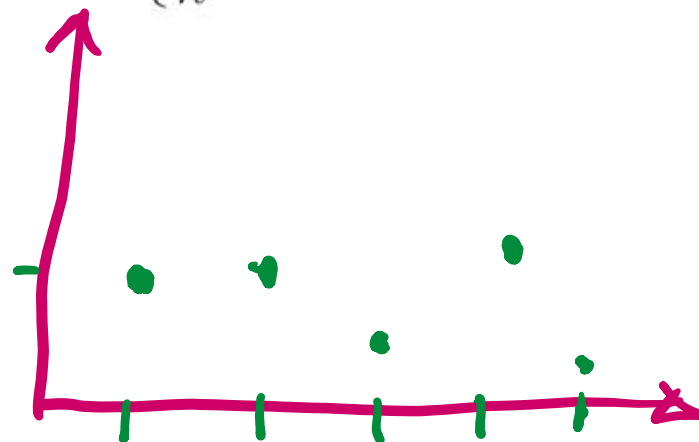
ب) $a_n = (-\frac{1}{2})^n$



ج) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ $a_1 = 2$



د) $a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ زوج} \\ \frac{1}{n} & n \text{ فرد} \end{cases}$



ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۰. محاسبه جذر اعداد در تمدن بابل - با نوشتن جملات دنباله بازگشتی زیر می توانیم به طرز شگفت انگیزی به جذر عدد k یعنی $\sqrt{k}$ نزدیک شویم.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{k}{a_n} \right) \quad a_1 = k$$

این روش منسوب به تمدن بابل (واقع در شرق ایران و در بین النهرین) است.

به کمک دنباله بازگشتی بالا، اگر a_3 را تقریبی برای $\sqrt{k}$ در نظر بگیریم، حاصل اعداد زیر را مشخص کنید.

الف) $\sqrt{2}$

ب) $\sqrt{3}$

ج) $\sqrt{5}$

$$a_1 = k = 2$$

آیا این روش مزیتی بر استفاده از ماشین حساب دارد؟ چرا؟

$$n=1 \rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{k}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = 1,41 = \sqrt{2}$$

$$n=2 \rightarrow a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{k}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{17}{12} = 1,41$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

$$a_1 = k = r$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{r} \left(a_n + \frac{k}{a_n} \right)$$

$$n=1 \rightarrow a_1 = \frac{1}{r} \left(r + \frac{r}{r} \right) = r$$

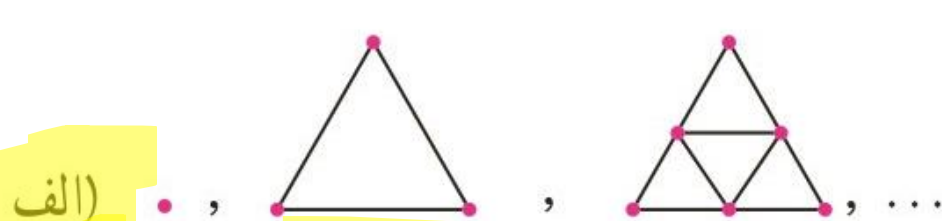
$$n=1 \rightarrow a_r = \sqrt{k} = \sqrt{r} = \frac{1}{r} \left(r + \frac{r}{r} \right) = \frac{r}{r} = 1, \sqrt{a} = \sqrt{r}$$

$$a_1 = k = a$$

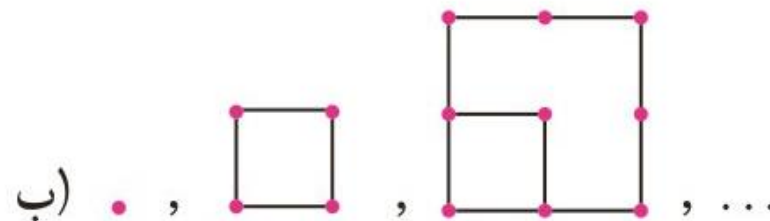
$$n=1 \rightarrow a_1 = \frac{1}{r} \left(a + \frac{a}{a} \right) = r$$

$$n=1 \rightarrow a_r = \frac{1}{r} \left(r + \frac{a}{r} \right) = \frac{1^k}{r} \Rightarrow r^{\frac{1}{r}} r = \sqrt{a}$$

۱۱. جملات دنباله بازگشتی $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ ، $a_1 = 1$ رأس کدام یک از الگوهای زیر را مشخص می کنند؟



۱، ۳، ۹



۱، ۴، ۹

$$n=1 \rightarrow a_2 = a_1 + (1+1) = 1 + 1 = 2$$

$$n=2 \rightarrow a_3 = a_2 + (2+1) = 2 + 2 = 4$$

۱۲. مطابق گزارش سازمان محیط زیست، به دلیل ورود پَس مانده‌های صنعتی کارخانه‌ها به یک دریاچه، ۲۵۰ تن فاضلاب صنعتی به این دریاچه وارد شده است. محیط زیست دریاچه سالیانه ۱٪ فاضلاب صنعتی را به صورت طبیعی خنثی و بی اثر می‌کند. سازمان محیط زیست با وضع قوانین جدید میزان ورودی فاضلاب صنعتی به دریاچه را به ۱۵ تن در سال کاهش داده است. اگر $P_1 = 250$ میزان آلودگی فعلی دریاچه باشد، با نوشتن یک رابطه بازگشتی، میزان مواد آلوده صنعتی را بعد از دو سال و پنج سال محاسبه کنید.

$$P_{n+1} = P_n - \frac{1}{10}P_n - 15$$

$$P_5 = 1128$$

$$P_{n+1} = \frac{9}{10}P_n - 15 \quad P_1 = 250$$

$$P_2 = \frac{9}{10} \times 250 - 15 = 210 \rightarrow P_3 = \frac{9}{10} \times 210 - 15 = 174$$

$$P_4 = \frac{9}{10} \times 174 - 15 = 146.4 \rightarrow P_5 = \frac{9}{10} \times 146.4 - 15$$

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Algebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.