

آموزش ریاضی دوازدهم انسانی

دنباله حسابی

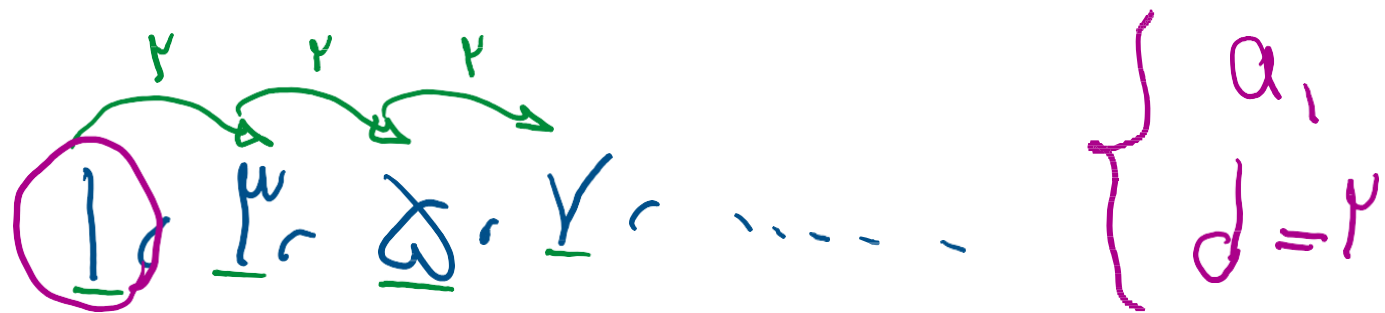
(فصل دوم – درس دوم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.



$$\text{فرمول } n \text{ جمله: } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_2 = a_1 + 1d$$

$$a_{100} = a_1 + 99d$$

حسابی - عددی

۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ...

$$+ ۳ + ۳ + ۳$$

الف) نوع دنباله را مشخص کنید.

ب) جمله عمومی دنباله را بدست آورید.

پ) جمله دوازدهم دنباله را بدست آورید.

ت) جمله چندم این دنباله برابر با ۲۰ است؟

$$a_n = a_1 + (n-1)d = ۲ + (n-1) \times ۳ = ۲ + ۳n - ۳ \rightarrow a_n = ۳n - ۱$$

$$a_n = ۳n - 1 \rightarrow a_{1۲} = ۳(۱۲) - 1 = ۳۵$$

$$\begin{array}{l} a_n = ۲۰ \\ n = ? \end{array} \rightarrow ۳n - 1 = ۲۰ \rightarrow ۳n = ۲۱ \rightarrow n = ۷$$

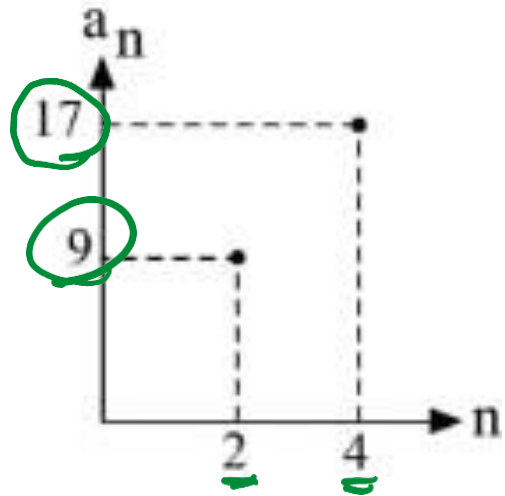
جمله یازدهم و هفدهم یک دنباله حسابی به ترتیب برابر ۲۵ و ۳۷ است. a_1 و d و جمله عمومی را بدست آورید.

$$\begin{cases} a_{17} = 37 \\ a_{11} = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 + 16d = 37 \\ a_1 + 10d = 25 \end{cases} \xrightarrow{d=2} \begin{cases} a_1 + 16 = 37 \\ a_1 + 10 = 25 \end{cases}$$
$$6d = 12 \rightarrow d = 2 \quad a_1 = 5$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 5 + (n-1) \times 2 = 5 + 2n - 2 \rightarrow a_n = 2n + 3$$

نمودار شکل زیر، برخی از جملات یک دنباله حسابی را نشان می دهد. جمله چندم این دنباله برابر ۶۵ می باشد؟



$$\begin{cases} a_k = 17 \\ a_p = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 17 \\ a_1 + d = 9 \end{cases}$$

$$2d = 8$$

$$d = 4$$

$$\begin{aligned} a_1 + 3d &= 17 \\ a_1 + d &= 9 \end{aligned} \xrightarrow{d=4} a_1 + 4 = 9$$

$$a_1 = 5$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_n = 5 + (n-1) \times 4$$

$$a_n = 45$$

$$n = ? \rightarrow 45 = 5 + (n-1) \times 4 \rightarrow 40 = (n-1) \times 4$$

$$n-1 = \frac{40}{4} = 10 \rightarrow n = 11$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

جمله اول یک دنباله حسابی نصف جمله سوم است. جمله پانزدهم این دنباله چند برابر قدر نسبت آن است؟

$$\underline{a_1} = \frac{1}{\underline{r}} \underline{a_{15}} \rightarrow r a_1 = \underline{a_{15}} = a_1 + 14d \rightarrow a_1 = 14d \quad \checkmark$$

$$\frac{a_{15}}{d} = \frac{a_1 + 14d}{d} = \frac{14d + 14d}{d} = 14 \quad \checkmark$$

مجموع ۵ جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی حسابی صعودی مساوی ۶۰ و مجموع دو جمله‌ی بزرگ‌تر سه برابر مجموع سه جمله‌ی کوچک‌تر است.

$$\underline{a_1} + \underbrace{a_2}_{a_1+d} + \underbrace{a_3}_{a_1+2d} + \underbrace{a_4}_{a_1+3d} + \underbrace{a_5}_{a_1+4d} = \underline{60}$$

$$\underbrace{a_4 + a_5}_{a_1+3d \quad a_1+4d} = \underbrace{3}_{\text{حاصل شده از } 5-2} \left(\underbrace{a_1 + a_2}_{a_1+d \quad a_1+2d} \right)$$

$$\begin{cases} 5a_1 + 10d = 60 \\ -\sqrt{a_1} - 2d = 0 \end{cases}$$

$$- \sqrt{a_1} - 2d = 0$$

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ d = \sqrt{a_1} \end{cases}$$

در دنباله حسابی مجموع سه جمله اول آن ۳۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۶۰ می باشد. جمله هشتم آن، کدام است؟

$$a_1 + \underbrace{a_2}_{a_1+d} + \underbrace{a_3}_{a_1+2d} = 33$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3a_1 + 3d = 33 \\ 3a_1 + 12d = 60 \end{cases}$$

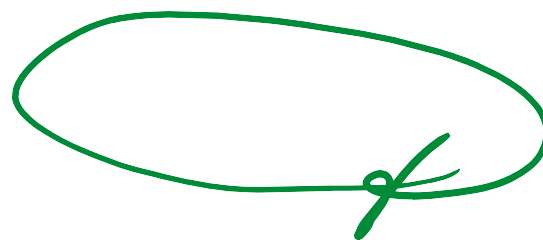
$$\rightarrow \begin{cases} d = 3 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{a_2}_{a_1+3d} + \underbrace{a_4}_{a_1+5d} + \underbrace{a_6}_{a_1+7d} = 60$$

$$a_8 = a_1 + 7d = 1 + 7 \times 3 = 22 \quad \checkmark$$

a, b, c

حالی



→ $2b = a + c$

بین ۳۲ و ۶۸ سه واسطه حسابی قرار دهید.

$$\frac{۳۲}{a_1}, \frac{41}{a_2}, \frac{50}{a_3}, \frac{59}{a_4}, \frac{68}{a_5}$$

$$\begin{cases} a_5 = 68 \\ a_1 = 32 \end{cases} \rightarrow \frac{32}{a_1} + 4d = 68 \rightarrow 4d = 36 \rightarrow d = 9$$

بین ۱۲ و ۵۲ چهار عدد طوری قرار دهید که اعداد حاصل تشکیل یک دنباله ی حسابی بدهند.

$$\frac{12}{a_1}, \frac{20}{a_2}, \frac{28}{a_3}, \frac{36}{a_4}, \frac{44}{a_5}$$

$$a_5 = a_1 + 4d \rightarrow 12 + 4d = 44 \rightarrow d = \frac{44-12}{4} = 7$$

بین اعداد ۱۳۹۶ و ۱۳۰۰، پنج عدد قرار داده‌ایم تا ۷ عدد تشکیل دنباله حسابی دهند. در این صورت بزرگ‌ترین عدد از بین ۵ عدد

$$\frac{1300}{a_1}, \frac{\checkmark}{a_2}, \frac{\checkmark}{a_3}, \frac{\checkmark}{a_4}, \frac{\checkmark}{a_5}, \frac{1380}{a_6}, \frac{1396}{a_7}$$

$$a_7 = a_1 + 6d \rightarrow 1300 + 6d = 1396 \rightarrow 6d = 96 \rightarrow d = \frac{96}{6} = \underline{16}$$

اگر $x, y, \textcircled{5}, z, \textcircled{13}, \dots$ پنج جمله اول یک دنباله حسابی باشند، حاصل $\frac{2xy}{z}$ کدام است؟
 a_5 a_9

$$\begin{cases} a_5 = 13 \\ a_9 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 + 4d = 13 \\ a_1 + 8d = 5 \end{cases} \xrightarrow{d=4} a_1 + 1 = 5 \rightarrow a_1 = -4$$

$$4d = 1 \rightarrow \textcircled{d=4} \rightarrow \textcircled{a_1 = -4}$$

$$\frac{\textcircled{-4}}{\textcircled{1}}, \frac{\textcircled{1}}{\textcircled{5}}, \frac{\textcircled{5}}{\textcircled{9}}, \frac{\textcircled{9}}{\textcircled{13}}$$

$$\frac{2xy}{z} = \frac{2(-4)(1)}{9} = -\frac{8}{9}$$

$$S_n = \frac{n}{1} \left(\downarrow a_1 + (n-1) \downarrow d \right)$$

$$S_n = \frac{n}{1} \left(\downarrow a_1 + \downarrow a_n \right)$$

در یک دنباله‌ی حسابی مجموع یازده جمله‌ی اول صفر است. چندمین جمله‌ی دنباله برابر صفر است؟

$$S_{11} = 0$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{11} = \frac{11}{2} (2a_1 + 10d) = 11 (a_1 + 5d) = 0$$

$$a_5 = 0$$

در یک دنباله‌ی حسابی جملات سوم و پانزدهم به ترتیب ۱۳ و ۳۷ می‌باشند. مجموع ۱۰ جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 37 \\ a_{15} = 13 \end{array} \right. & \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 + 14d = 13 \\ a_1 + 2d = 13 \end{array} \right. \xrightarrow{d=2} a_1 + 2 = 13 \\ & \quad \quad \quad 12d = 24 \rightarrow d = 2 \quad a_1 = 9 \end{aligned}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (1 \times 9 + 9 \times 2)$$

$$\frac{10}{2} (2 \times 18) = 180$$

مجموع ۱۰ جمله‌ی اول در دنباله‌ی حسابی ۱, ۵, ۹, ۱۳, ... کدام است؟

$$a_1 = 1 \quad d = 4$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + \underline{\underline{(n-1)}} d)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} \left(\underbrace{2 \times 1}_2 + \underbrace{9 \times 4}_{36} \right) = 40$$

مجموع جملات دنباله $3, 8, 13, 18, \dots, 203$ کدام است؟

$$a_1 = 3$$

$$a_n = 103$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{101}{2} \left(\frac{3 + 103}{104} \right) = 1273$$

~~$$a_n = a_1 + (n-1)d$$~~

$$103 = 3 + (n-1) \times 5 \longrightarrow 100 = (n-1) \times 5$$

$$\longrightarrow n-1 = 20 \longrightarrow \underline{n = 21}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

مجموع ۳۰ عدد طبیعی فرد متوالی، با کوچکترین عدد ۵۱، کدام است؟

$51, 53, \dots, d=2, n=30$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{30} = \frac{30}{2} (1 \times \underline{51} + 29 \times 2) = 1500$$

مجموع اعداد طبیعی فرد و متوالی شروع از ۲۳ و ختم به ۶۱، کدام است؟

$\mu \mu$ — — — — — $\gamma \gamma$

$$\Sigma_n = \frac{p_0}{r} (r^w + 91) = 11p_0$$

$$a_n = a_1 + (n-1) d$$

$$q_1 = \gamma \mu + (n-1) \times \gamma \rightarrow n = \gamma_0$$

مجموع چند جمله از دنباله‌ی عددی $۲, ۶, ۱۰, \dots$ برابر جمله‌ی ۱۳ ام است؟

$$a_1 = \underline{۲} \quad d = ۴$$

$$a_{۱۳} = a_1 + ۱۲d = ۲ + ۱۲ \times ۴ = \underline{۵۰}$$

$$S_n = \frac{n}{۲} (۲a_1 + (n-1)d) \rightarrow ۵۰ = \frac{n}{\textcircled{۲}} (\underline{۲} + \underline{۴}(n-1))$$

$$\rightarrow ۵۰ = \underline{n} (\cancel{۲} + \underline{۴}n - \cancel{۴}) \rightarrow \cancel{۲}n^{\cancel{۲}} = ۵۰$$

$$\rightarrow n^{\cancel{۲}} = ۲۵ \rightarrow \textcircled{n = ۵} \checkmark$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

اگر مجموع $1 + 2 + 3 + \dots + n$ برابر 5050 شود، مقدار n را بیابید.

$$\frac{n(n+1)}{2} = 5050 \rightarrow n(n+1) = 10100$$

$$\rightarrow \underline{n(n+1)} = \underline{100} \times \underline{101}$$

$$n = 100$$

در دنباله‌ی اعداد $1, 4, 7, 10, \dots$ مجموع اعدادی که از جمله‌ی هفتم شروع و به جمله‌ی هجدهم ختم می‌شود را محاسبه کنید.

$$\boxed{a_7 + a_8 + \dots + a_{18}} = \underline{\underline{S_{18}}} - \underline{\underline{S_6}} = ?$$

$$S_{18} = \frac{18}{2} (1 + 17 \times 3)$$

$$\rightarrow 429$$

$$S_6 = \frac{6}{2} (1 + 5 \times 3)$$

اگر در یک دنباله‌ی حسابی مجموع n جمله‌ی اول از رابطه‌ی $S_n = \underline{n^2 + n}$ به دست آید، جمله‌ی عمومی

$$\underline{n=1} \longrightarrow S_1 = a_1 = 2$$

$$\underline{n=2} \longrightarrow S_2 = \underbrace{a_1}_{2} + a_2 = 6 \longrightarrow \underbrace{a_2 = 4}_{\underline{\underline{\underline{a_2 = 4}}}} \quad \text{با یک پیکان سبز از } a_1 \text{ به } a_2$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 6 \end{cases} \longrightarrow \underbrace{d = 4}_{\underline{\underline{\underline{d = 4}}}}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 2 + (n-1) \times 4$$

$$a_n = 4n - 2$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

اگر مجموع n جمله‌ی اول از دنباله‌ی عددی به صورت $S_n = \frac{n^2 - 3n}{3}$ باشد، جمله‌ی دهم را به دست آورید.

$$n=1 \rightarrow S_1 = a_1 = \frac{1-3}{3} = \frac{-2}{3} \rightarrow a_1 = \frac{-2}{3}$$

$$n=2 \rightarrow S_2 = a_1 + a_2 = \frac{-2}{3} \rightarrow a_2 = 0$$

$$d = a_2 - a_1 \rightarrow d = \frac{2}{3}$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = \frac{-2}{3} + 9\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}$$

در یک دنباله ی عددی به جمله ی اول ۴ واحد و به قدر نسبت ۲ واحد اضافه می کنیم. به جمع ۱۰ جمله ی اول چه قدر اضافه خواهد

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (2(a_1 + 1) + 9(d + 1))$$

$$\frac{10}{2} \times 14 = 140$$

اگر به اختلاف مشترک یک دنباله‌ی حسابی ۲ واحد افزوده شود، به مجموع ۵ جمله‌ی اول آن چند واحد اضافه خواهد شد؟

$$S_n = \frac{a}{r} (ra_1 + r d)$$

$$S_n = \frac{a}{r} \left(\underbrace{ra_1}_{0} + \underbrace{r}_{1} (d + r) \right)$$

$$\frac{a}{r} \times A^r = r_0$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

در یک دنباله ی عددی $a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 20$ مقدار S_{13} را به دست آورید.

$$a_1 + 3d + a_1 + 5d + a_1 + 7d + a_1 + 9d = 20$$

$$\rightarrow 4a_1 + 12d = 20 \rightarrow \underline{a_1 + 3d = 5}$$

$$S_{13} = \frac{13}{2} (2a_1 + 12d) = 13 (\underline{a_1 + 3d}) = 13 \times 5 = 65$$

حاصل $۲^۲ - ۱^۲ + ۴^۲ - ۳^۲ + ۶^۲ - ۵^۲ + \dots + ۱۰۰^۲ - ۹۹^۲$ را به دست آورید

$$\frac{(۲-۱)(۲+۱)}{۲} + \frac{(۴-۳)(۴+۳)}{۲} + \frac{(۶-۵)(۶+۵)}{۲} + \dots + \frac{(۱۰۰-۹۹)(۱۰۰+۹۹)}{۲}$$

$$۲, ۴, ۶, ۸, \dots, ۱۰۰ \rightarrow \begin{cases} a_1 = ۲ \\ d = ۲ \end{cases}$$

$$S_n = \frac{n}{2} (۲a_1 + (n-1)d) = \frac{۵۰}{2} (۲ + ۹۹ \times ۲) = ۵۰۵۰$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$۱۰۰ = ۲ + (n-1) \times ۲ \rightarrow \underline{\underline{n = ۵۰}}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

در یک دنباله حسابی، مجموع ۵ جمله ی اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جمله ی بعدی است. جمله ی دوم چند برابر جمله ی اول است؟

$$S_5 = \frac{1}{3} (S_{10} - S_5)$$

$$\rightarrow 3S_5 = S_{10} - S_5 \rightarrow 4S_5 = S_{10}$$

$$4 \times \frac{5}{2} (2a_1 + 5d) = \frac{10}{2} (2a_1 + 9d) \rightarrow \underline{d = 2a_1}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} = \frac{a_1 + 2a_1}{a_1} = \underline{\underline{3}}$$

در یک دنباله ی عددی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم

$$S_{20} = 3S_{12} \rightarrow \frac{20}{2} (2a_1 + 19d) = 3 \times \frac{12}{2} (2a_1 + 11d)$$

$$a_3 = 6 \rightarrow a_1 + 2d = 6 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2a_1 = -12 \\ d = 3 \end{cases}$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = -6 + 3 \times 9 = 21 \quad \checkmark$$

علی در ابتدای ماه ۱۰۰۰ تومان در جعبه‌ی پس‌انداز خود می‌گذارد و هر روز ۵۰۰ تومان بیشتر از روز قبل در جعبه قرار می‌دهد. در پایان این ماه، علی چند تومان پس‌انداز کرده است؟ (ماه را ۳۰ روزه فرض کنید).

$$a_1 = 1000$$

$$d = 500$$

$$n = 30$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

$$= \frac{30}{2} (2 \times 1000 + 29 \times 500)$$

$$= 247500$$

سایت علی جبراً Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

شخصی در ماه اول A تومان پس انداز کرده و در هر ماه به اندازه‌ی $\left(\frac{1}{20}A\right)$ بیشتر از ماه قبل پس انداز می کند تا مقدار پس انداز یک ماه آن به دو برابر پس انداز ماه اول برسد. اگر در این زمان، مجموع پس انداز وی ۶۳۰۰۰ تومان باشد، اولین پس انداز وی چه قدر بوده است؟

$$a_1 = A \quad d = \frac{1}{20}A \quad a_n = 2A$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \rightarrow \quad 2A = A + (n-1) \times \frac{1}{20}A \quad \rightarrow \quad n = 21$$

$$S_n = 42000 \quad \rightarrow \quad A = ?$$

$$42000 = \frac{21}{2} \left(2A + \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} A \right) \quad \rightarrow \quad A = 2000$$

یک شرکت تولیدی تا پایان سال اول ۸۰۰ واحد کالا تولید می‌کند و در نظر دارد که پس از گذشت هر سال، به‌طور مرتب ۹۰ واحد کالا به تولید سال قبل خود اضافه کند. پس از گذشت ۴ سال، جمعاً چند واحد کالا می‌تواند تولید کند؟

$$a_1 = 800 \quad d = 90 \quad n = 4$$

$$S_4 = \frac{4}{1} (1 \times 800 + 3 \times 90) = 1720$$

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.