

آموزش ریاضی یازدهم انسانی

اعمال بر روی توابع

(فصل دوم – درس سوم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \rightarrow D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \rightarrow D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{g=0\}$$

اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$ و $g(x) = \sqrt{x-2}$ دو تابع باشند، آن گاه مطلوبست محاسبه $(4f - 3g)(6)$

$$4f(6) - 3g(6) = 4 \left(\frac{6+1}{6-4} \right) - 3 \left(\sqrt{6-2} \right) = ?$$

اگر $f = \{(1, -4), (\underline{2}, \underline{7}), (\underline{3}, \underline{5}), (4, 9)\}$ و $g = \{(-1, 3), (0, 2), (\underline{2}, \underline{4}), (\underline{3}, \underline{1})\}$ باشند، آنگاه توابع $\underline{f+g}$

$$f \oplus g = \{(2, 11), (3, 4)\}$$

$$\frac{1}{f+g} = ?$$

$$۱) \frac{1}{f} = ?$$

$$۳) \frac{1}{f} \cap \frac{1}{g} = ?$$

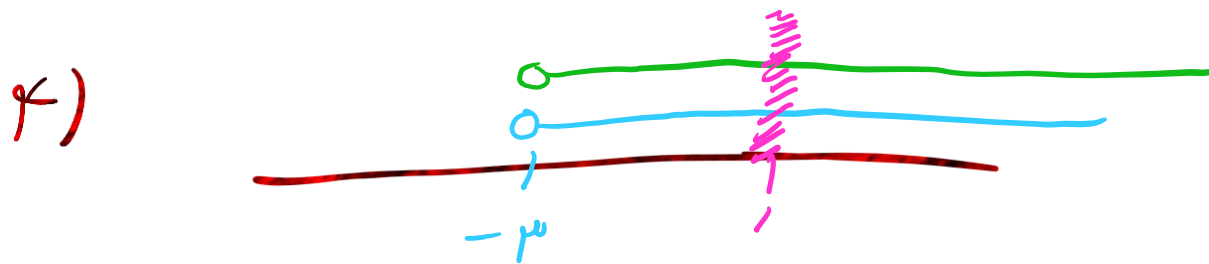
$$۲) \frac{1}{g} = ?$$

اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$ و $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}}$ باشد، دامنه‌ی تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ را بدست آورید.

۱) $x+3 > 0 \rightarrow x > -3$ ✓

۲) $x+3 > 0 \rightarrow x > -3$ ✓

۳) $x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$ ✓



$D_{f/g} = (-3, +\infty) - \{1\}$

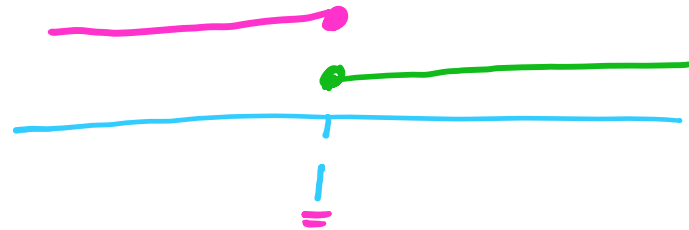
۱ اگر $f(x) = \sqrt[3]{n - 3x}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x - 3m}$ تابع $f + g$ به صورت $\{(1, a)\}$ باشد، آن گاه مقدار $am + n$ کدام است؟

$$n - 3x \geq 0 \rightarrow -3x \geq -n \rightarrow x \leq \frac{n}{3}$$

$$x - 3m \geq 0 \rightarrow x \geq 3m$$

$$\frac{n}{3} = 1 \rightarrow n = 3$$

$$3m = 1 \rightarrow m = \frac{1}{3}$$



$$f(1) + g(1) = a \rightarrow \sqrt[3]{1 - 3} + \sqrt[3]{1 - 3 \cdot \frac{1}{3}} = 0 \rightarrow a = 0$$

$$am + n = 0 + 3 = 3$$

۲ اگر $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g = \{(-3, \underline{5}), (-1, \textcircled{4}), (0, \textcircled{7})\}$, آن گاه بیش ترین مقدار تابع $(g-f) \cdot 2g$ کدام است؟

$$g-f = \{(-3, \cancel{5-\sqrt{1-9}}), (-1, 4-0), (0, \underline{7-1})\}$$

$$(g-f) \cdot \underline{2g} = \{(-1, \underline{4 \times 1}), (0, \underline{7 \times 14})\}$$

max $\rightarrow 14$

۳) اگر $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x+4}}$ و $g(x) = \frac{x^2-25}{\sqrt{x+4}}$ باشند، دامنه تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

$$1) x+4 > 0 \rightarrow x > -4 \quad \checkmark$$

$$2) x+4 > 0 \rightarrow x > -4 \quad \checkmark$$

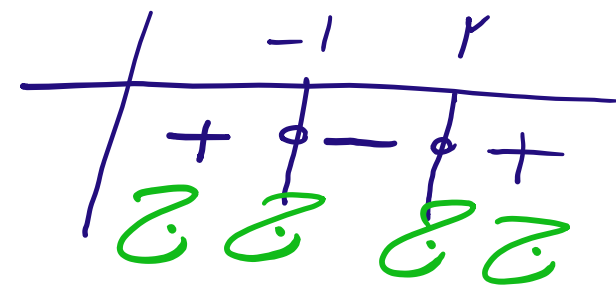
$$3) x^2 - 25 \neq 0 \rightarrow x \neq 5 \rightarrow x \neq \pm 5 \quad \checkmark$$

$$4) D_{f/g} = (-4, +\infty) - \{5\}$$

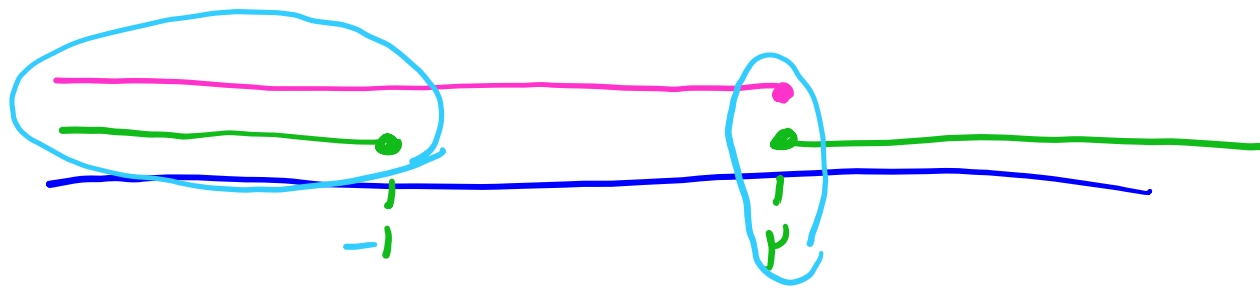
دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} - \sqrt{2 - x}$ کدام است؟ (۴)

$$x^2 - x - 2 \geq 0 \rightarrow \underline{x^2} - \underline{x} - \underline{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow D_f = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$$



$$2 - x \geq 0 \rightarrow -x \geq -2 \rightarrow x \leq 2$$



$$D_f = (-\infty, -1] \cup \{2\}$$

۵ اگر $f(x) = \underline{x + \sqrt{x}}$ و $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ باشد، آن گاه برد تابع $(g - f)(x)$ کدام است؟

$$g(x) - f(x) = 1 + \cancel{\sqrt{x}} - x - \cancel{\sqrt{x}} = \underline{\underline{1 - x}} \quad \checkmark$$

$$x \geq 0$$

$$x = 0$$
$$f = \underline{1}$$

$$K$$
$$g - f$$

$$= [-\infty, 1]$$

۶ اگر $f(x) = \sqrt{x+3}$, $g(x) = \sqrt{a-x+2b}$, $D_{f-g} = [-3, 10]$ و $(f+g)(6) = 6$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

$$x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3$$

$$a-x \leq 0 \rightarrow x \leq a$$

$$D_{f-g}$$

$$[-3, a]$$

$$a=10$$

$$(f+g)(6)=6 \rightarrow 3+2+2b=6 \rightarrow 2b=1 \rightarrow b=\frac{1}{2}$$

$$a+b = 10 + \frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{ (4, -5), \left(2, -\frac{3}{5} \right) \right\} \text{ و } g = \left\{ (4, 1-n), (-2, 1), (2, 5), (-3, n+2) \right\}, f = \left\{ (1, 3), (4, m), (2, -n^2+1), (-3, 1) \right\}$$

آن گاه حاصل $n - m$ کدام است؟

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(4, \frac{m}{1-n} \right), \left(2, \frac{-n^2+1}{5} \right), \left(-3, \frac{1}{n+2} \right) \right\}$$

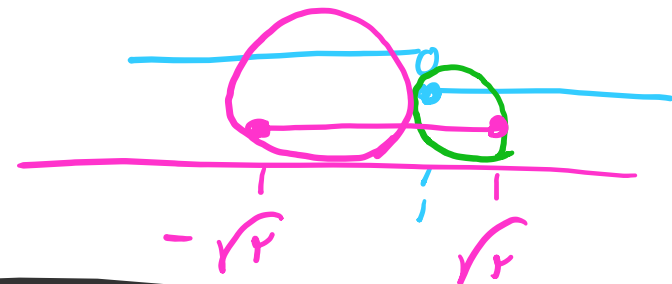
$$n+2=0 \rightarrow n=-2 \quad \checkmark$$

$$\frac{m}{1-(-2)} = -5 \rightarrow m = -15 \quad \checkmark$$

$$\rightarrow n-m = -2+15 = 13$$

۸ اگر $f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 1 \\ 1 & , x \leq 1 \end{cases}$ و $g(x) = \sqrt{2-x^2}$ ، آنگاه تعداد صفرهای تابع $f+g$ کدام است؟

$$2-x^2 \geq 0 \leadsto x^2 \leq 2 \leadsto -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$



$$f+g = \begin{cases} \sqrt{2-x^2}+1 & -\sqrt{2} \leq x < 1 \\ \sqrt{2-x^2}+x & 1 \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{2-x^2}+1=0 \leadsto \sqrt{2-x^2}=-1 \quad \times$$

$$\sqrt{2-x^2}+x=0 \leadsto \sqrt{2-x^2}=-x \leadsto 2-x^2=x^2 \leadsto 2x^2=2 \leadsto x^2=1$$

$$\leadsto x = \pm 1 \quad \begin{array}{l} x=1 \quad \times \\ x=-1 \quad \times \end{array}$$

اگر $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ باشد تابع $\frac{2f+g}{g}$ کدام است؟ $f = \{(-1, -2), (\underline{0}, \underline{4}), (1, \underline{9}), (4, \underline{0})\}$

$$\frac{2f+g}{g} = \left\{ \left(0, \frac{11+0}{0} \right) \left(1, \frac{11+2}{2} \right) \left(4, \frac{0+1}{1} \right) \right\}$$

$$\rightarrow \left\{ (1, 10) (4, 1) \right\}$$

۱۰ هرگاه $f(x) = \sqrt{\overbrace{[x] + [-x]}^0}$ و $g = \{(\frac{1}{2}, 1), (0, \underline{-1}), (3, \underline{\frac{-1}{2}}), (-1, 2), (\sqrt{2}, 3)\}$ باشد، بیشترین مقدار تابع $h = 3g - 2f$ کدام خواهد بود؟

$$3g - 2f = \left\{ (0, -3 - 0), \left(1, \frac{-3}{2} - 0\right), (-1, 4 - 0) \right\}$$

$$\rightarrow \left\{ (0, -3), \left(1, -\frac{3}{2}\right), (-1, 4) \right\}$$

نکته:

$$[x] + [-x] = \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \rightarrow \underline{\underline{0}} & \checkmark \\ x \notin \mathbb{Z} \rightarrow \underline{\underline{1}} & \times \end{cases}$$

۱۱ اگر f و g دو تابع خطی باشند به طوری که $\begin{cases} (f+g)(x) = 2x+1 \\ (g-f)(x) = x-2 \end{cases}$ ، حاصل $f(1) + g(3)$ کدام است؟

$$+ \begin{cases} f(x) + \underline{g(x)} = 2x+1 \\ g(x) - f(x) = x-2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \underline{f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$$

$$g(x) - f(x) = x - 2$$

$$2g(x) = 3x - 1 \rightarrow \underline{g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}$$

$$f(1) + g(3) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} \times 3 - \frac{1}{2}\right) = 9$$

۱۲ اگر $f(x) = \underline{x+1}$ و $g(x) = \underline{(4-2a)x^2 - 6}$ و $(f-g)(-1) = -3$ باشد آن گاه a کدام است؟

$$(f-g)(-1) = -3 \rightarrow \underline{f(-1)} - g(-1) = -3$$

$$\cancel{(-1+1)} \ominus (4 - \overset{-2a-2}{\underline{2a}} - 6) = -3$$

$$\rightarrow 2a + 1 = -3 \rightarrow 2a = -4 \rightarrow a = -\frac{4}{2}$$

۱۳ اگر $f = \{(\underline{2}, \underline{1}), (\underline{-1}, \underline{2}), (\underline{4}, \underline{2})\}$ و $g = \{(\underline{2}, \underline{-2}), (\underline{4}, \underline{3}), (\underline{-1}, \underline{0})\}$ باشند. حاصل $\frac{3f+g}{g}$ کدام است؟

$$\frac{3f+g}{g} = \left\{ \left(2, \frac{3-2}{-2} \right), \left(4, \frac{9+3}{3} \right), \left(-1, \frac{9+0}{0} \right) \right\}$$

$$\rightarrow \left\{ \left(2, \frac{1}{-2} \right), \left(4, 3 \right) \right\}$$

۱۴ اگر $f(x) = \begin{cases} -x & x < 1 \\ \underline{\underline{x^2 + 1}} & x \underline{\underline{\geq 1}} \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x + 1 & x > 2 \\ \underline{\underline{x + 1}} & x \underline{\underline{\leq 2}} \end{cases}$ حاصل $\frac{f}{g} - g$ در $x = f(1)$ چقدر است؟

$$f(1) = 1 + 1 = 2 \rightarrow x = 2 \quad \checkmark$$

$$\left(\frac{f}{g} - g\right)(2) = \frac{1}{g(2)} f(2) - g(2) = ?$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5 \quad \checkmark \quad g(2) = 2 + 1 = 3 \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{g(2)} f(2) - g(2) = \frac{5}{3} - 3 = -\frac{4}{3}$$

۱۵ اگر $f(x) = \sqrt{2x-1}$ و $g(x) = \sqrt{3-4x}$ باشند، برد تابع $h(x) = (f^2 + g^2)(x)$ شامل چند عضو است؟

$$2x-1 \geq 0 \rightarrow 2x \geq 1 \rightarrow x \geq \underline{\frac{1}{2}} \quad \checkmark$$

$$3-4x \geq 0 \rightarrow 4x \leq 3 \rightarrow x \leq \underline{\frac{3}{4}} \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{2} \cap \frac{3}{4} = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]$$

$$f = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]$$

$$g = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]$$

$$(f^2 + g^2)(x) = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]$$

۱۶) مجموع مؤلفه‌های دوم $\frac{-2f}{g^2}$ با فرض $g = \{(1, \underline{-2})(-2, \underline{2})(0, -1)(\underline{2}, \underline{0})\}$ و $f = \{(1, \underline{2})(-1, 0)(-2, \underline{-4})(\underline{2}, \underline{2})\}$

$$\frac{-2f}{g^2} = \left\{ \left(1, \frac{-2}{-1} \right) \left(-1, \frac{1}{2} \right) \left(2, \frac{-4}{0} \right) \right\}$$

→ $-1 + 2 = +1$

۱۷ اگر $f = \{(2, 7), (\underline{3}, 1), (\underline{1}, 4), (\underline{5}, 2)\}$ و $g = \{(\underline{3}, 4), (\underline{5}, 3), (4, 2), (\underline{1}, 2)\}$ برد تابع $f + g$ کدام است؟

$$f + g = \{(3, 5), (1, 6), (5, 5)\}$$

۱۸ اگر $f = \{(0, -1), (1, 0), (4, 1), (2, 5)\}$ باشد، آن گاه تابع $\frac{f}{f-1}$ از چند زوج مرتب تشکیل شده است؟

$$\frac{f}{f-1} = f \left(0, \frac{-1}{-1-1} \right) \left(1, \frac{0}{0-1} \right) \left(4, \frac{1}{1-1} \right) \left(2, \frac{5}{5-1} \right)$$

$$\rightarrow f \left(0, \frac{1}{1} \right) \left(1, 0 \right) \left(2, \frac{5}{4} \right)$$

۱۹ اگر $f = \{(1, \underline{4}), (2, 3), (3, \underline{4})\}$ و $f - g = \{(\underline{1}, -4), (\underline{3}, \underline{1})\}$ آن گاه تابع $h(x) = \frac{1}{g(x) - 1}$ شامل کدام عضو است؟

$$x=1 \rightarrow 1 - g(1) = -4 \rightarrow g(1) = 1$$

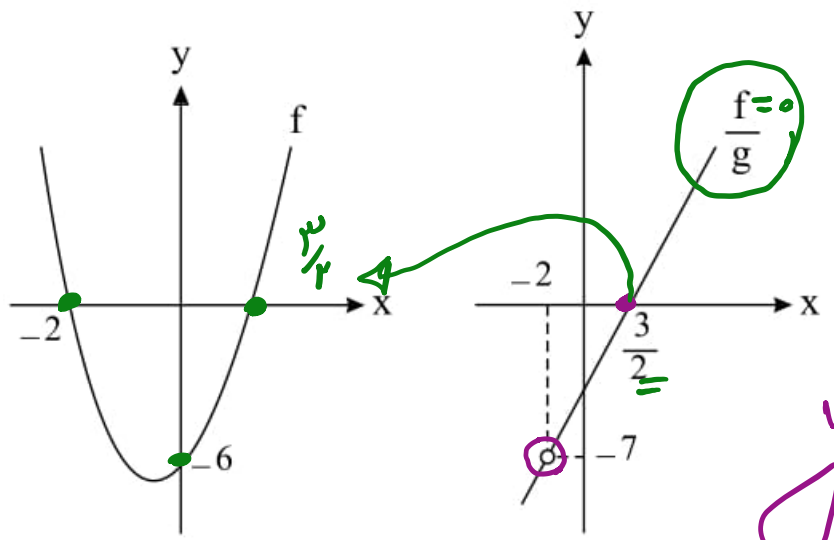
$$x=3 \rightarrow 1 - g(3) = 1 \rightarrow g(3) = 3$$

$$h = \left(3, -\frac{1}{5} \right)$$

$$(1, 1) \rightarrow h(1) = \frac{1}{g(1) - 1} = \frac{1}{1 - 1} \quad \times$$

$$(3, 3) \rightarrow h(3) = \frac{1}{g(3) - 1} = \frac{1}{3 - 1} = -\frac{1}{5}$$

نمودار سهمی f و تابع خطی $\frac{f}{g}$ ، به شکل زیر هستند. $g(\frac{3}{2})$ کدام است؟



$A \begin{vmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} -2 \\ -7 \end{vmatrix} \rightarrow m_{AB} = \frac{0 - (-7)}{\frac{3}{2} - (-2)} = \frac{7}{\frac{7}{2}} = 2$

$y - 0 = 2(x - \frac{3}{2}) \rightarrow y = 2x - 3 \rightarrow \frac{f}{g} = 2x - 3$

$f(x) = a(x+2)(x-\frac{3}{2})$ $\xrightarrow{x=0, y=-6} a=2 \rightarrow f(x) = (x+2)(2x-3)$

$\frac{f}{g} = \frac{(x+2)(2x-3)}{g} = 2x-3 \rightarrow g = x+2$

$\rightarrow g(\frac{3}{2}) = 1 + 2 = \frac{5}{2}$