

آموزش ریاضی دهم انسانی

نمودار تابع درجه دو

(فصل دوم – درس چهارم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$y = a(x - \underline{\alpha})^2 + \beta$$

رأس كسر $\left| \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \underline{\beta} \end{array} \right.$

خوبه $x = \alpha$

$a > 0 \rightarrow \underline{\min}$

$a < 0 \rightarrow \underline{\max}$

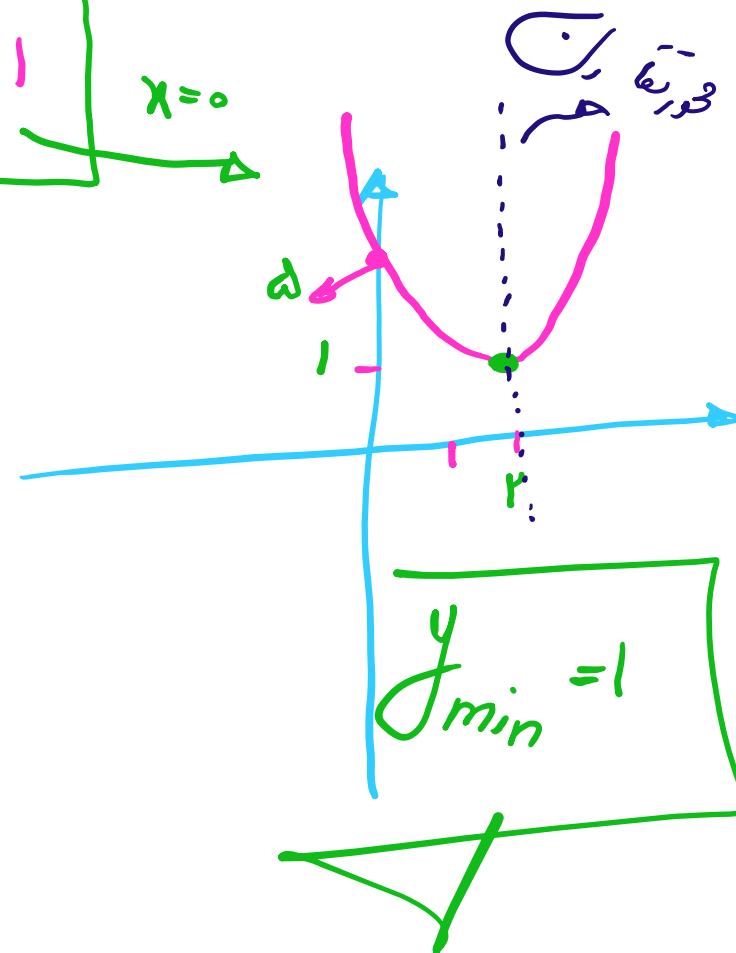
$$y = +(\underline{x-2})^2 + 1 \quad x=0$$

رأس كسر $\left| \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array} \right.$

خوبه $x = 2$

$a > 0 \rightarrow$ بالا

معادله استاندارد سهمی



$$y = ax^2 + bx + c$$

رأسی

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$y = \frac{-\Delta}{4a}$$

موجبات

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$a > 0$ بالا $\rightarrow$ min

$a < 0$ پایین $\rightarrow$ max

معادله شلخته سهمی

$$y = x^2 - 4x + 4$$

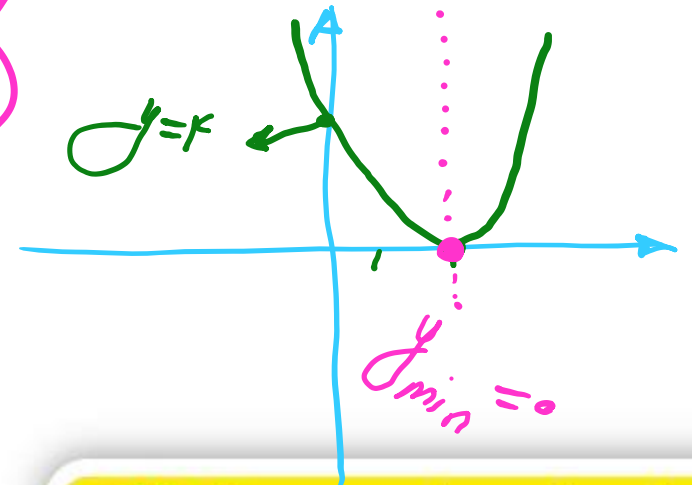
رأسی

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = 4 - 4 + 4 = 0 = \frac{-(16 - 16)}{4 \times 1} = 0$$

کوتاه $x = 2$ ✓

$a > 0$ بالا



سایت علی جیرا Aligebra.com

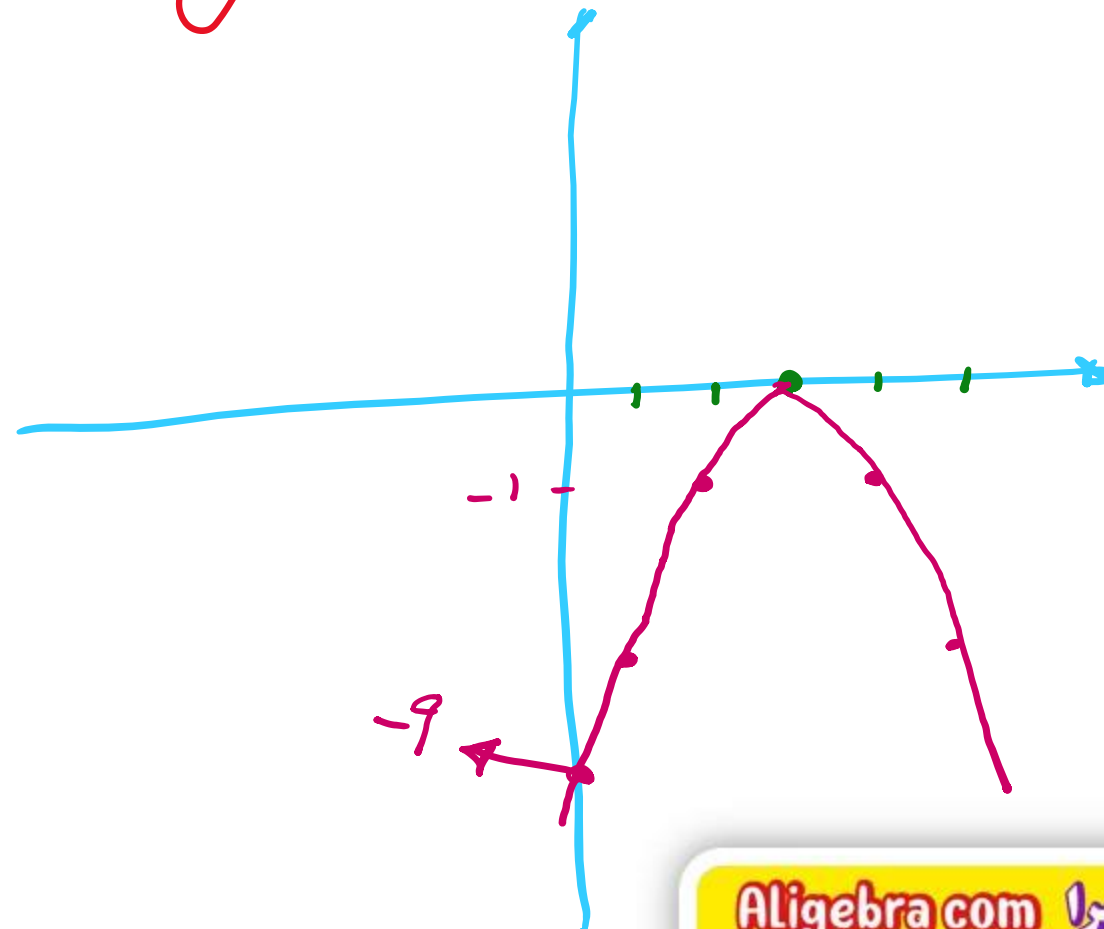
پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۴۳۸۹

$$f = -x^2 + 4x - 9$$

$$\begin{aligned} x=2 &\rightarrow y = -4 + 8 - 9 = -5 \\ x=1 &\rightarrow y = -1 + 4 - 9 = -6 \end{aligned}$$

$$1) x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$2) y = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16-36)}{-4} = 0$$

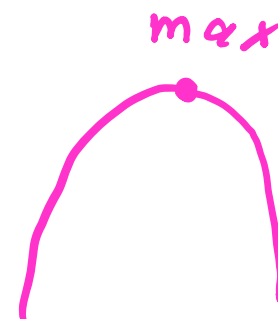
$$3) \begin{array}{c|ccccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline f & -4 & -1 & 0 & -1 & -4 \end{array}$$


$$y = \underline{a}x^2 + bx + c$$

$\underbrace{a > 0}_{\text{min}} \rightarrow y_{\min} = \frac{-\Delta}{4a}$

$\underbrace{a < 0}_{\text{max}} \rightarrow y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a}$

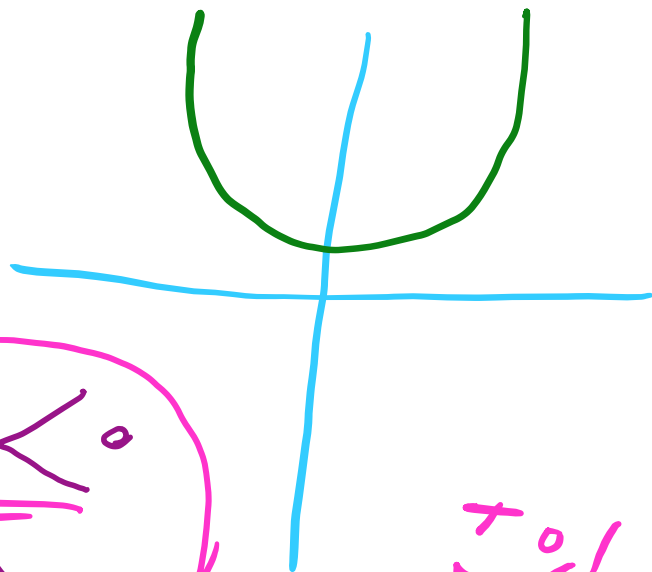
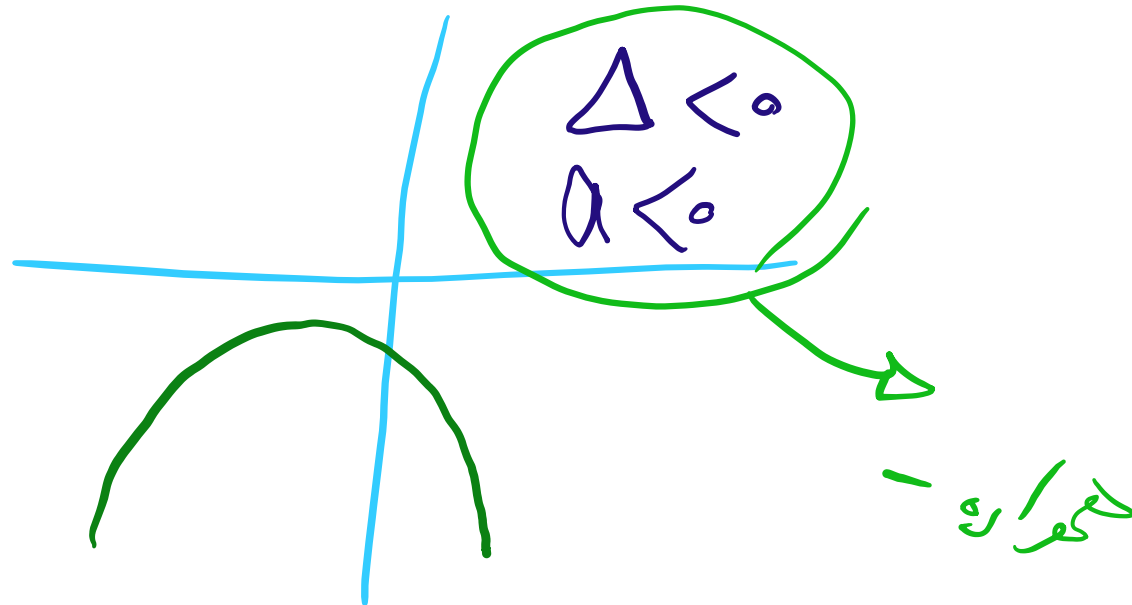
کمترین و بیشترین مقدار y



سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۳۸۹

همواره مثبت و همواره منفی



$$y = ax^2 + bx + c \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \text{ریشه ها} \end{matrix}$
 $y=0 \rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$

$$1) \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

$$2) \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

$$3) |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

۱ اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

$$f = \frac{-\Delta}{4a} = 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow \cancel{11-4} (k+3)(k) = 0$$

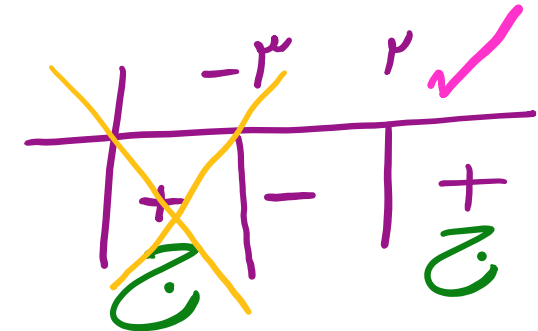
$$\rightarrow \underline{4} = \underline{1}k^2 - \underline{3}k = 0 \rightarrow -k^2 - 3k + 2 = 0$$

$$k = -2 \rightarrow y_{\max} = 0$$

$$k = 1 \rightarrow y_{\min} = 0$$

۲) به ازای کدام مقدار m ، منحنی تابع $y = (m + 2)x^2 + 4x + m - 1$ همواره بالای محور x ‌هاست؟

$$1) \Delta < 0 \rightarrow 16 - 4(m+2)(m-1) < 0 \rightarrow m^2 + m - 4 > 0$$

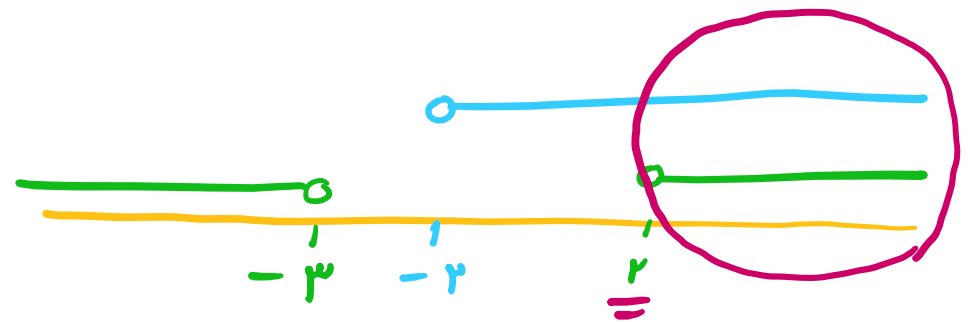
$$m^2 + m - 4 = 0 \rightarrow (m + 3)(m - 2) = 0 \rightarrow \begin{matrix} m = -3 \\ m = 2 \end{matrix}$$


$$2) a > 0 \rightarrow m + 2 > 0 \rightarrow m > -2$$

از -2 ار $\rightarrow$

$m > 2$





۳ اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه‌ی دوم $y = (\underline{a} - 1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $\underline{x = 2}$ متقارن باشد، این

منحنی محور $\underline{x}$ ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(a-1)} = 2 \rightarrow a-1 = -1 \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{-1}{2}x^2 + x + 3 = 0 \quad \times (-2) \rightarrow x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$(x - 4)(x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \checkmark \\ x = -2 \end{cases}$$

۴

منحنی به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ محور طولها را در ۳ و ۱ و محور عرضها را در ۶ قطع کرده است. کمترین مقدار y کدام است؟

A / $x=1$
 $y=0$

$$a + b + c = 0$$

$$a + b = -4$$

B / $x=3$
 $y=0$

$$9a + 3b + c = 0$$

$$3a + b = -2$$

$$\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -1 \end{array}$$

C / $x=0$
 $y=6$

$$0 + 0 + c = 6$$

$$c = 6$$

$$y_{\min} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(4^2 - 4(2)(6))}{4 \times 2} = \frac{-14}{8} = -\frac{7}{4}$$

۵ از میان مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن ۱۶ سانتی‌متر است مثلی را اختیار کرده‌ایم که مساحت آن ماکسیم است مساحت این مثلث چند سانتی‌متر مربع است؟

$$a + h = 16 \quad S = \frac{1}{2} a h$$

$$\hookrightarrow h = 16 - a \quad S = \frac{1}{2} a (16 - a) = 16a - \frac{1}{2} a^2$$

$$S = -\frac{1}{2} a^2 + 16a \quad S_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left(16^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)(0)\right)}{4\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$S_{\max} = \frac{-4^2}{-1} = 32$$

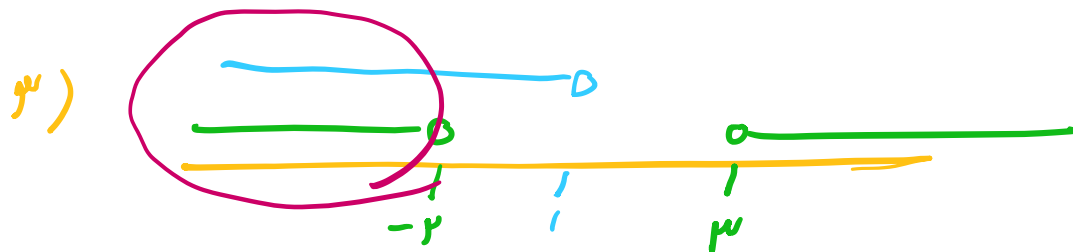
۶ به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = \underline{2}\sqrt{6}x - a + \underline{(1-a)}x^2$ ، همواره بالای محور x ها است؟

$$1) \Delta < 0 \rightarrow \cancel{2^2 - 4} (1-a)(-a) < 0 \rightarrow a^2 - a - 4 > 0$$

$$(a - 3)(a + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -2 \end{cases}$$

-2	3	
+ -	+ -	+
ج	ج	

$$2) a > 0 \rightarrow 1 - a > 0 \rightarrow a < 1 \checkmark$$



$$a < -2$$

۷ محیط مستطیلی ۱۸۰ واحد است. به ازای کدام طول مستطیل مساحت آن بیشترین مقدار است؟

$$P = 1x + 1y = 180 \rightarrow x + y = 90 \rightarrow y = 90 - x$$

$$S = xy = x(90 - x) = 90x - x^2 \rightarrow S = -x^2 + 90x$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-90}{-2} = 45$$

۸) به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، سهمی به معادله $y = (1 - m)x^2 + 2(m - 3)x - 1$ همواره پایین

محور x ها است؟

$$1) \Delta < 0 \rightarrow \cancel{4}(m-3)^2 - \cancel{4}(1-m)(-1) < 0 \rightarrow m^2 - \sqrt{m+10} < 0$$

$$m^2 - \sqrt{m+10} = 0 \rightarrow (m-5)(m-2) = 0 \rightarrow \begin{array}{c|c} m=5 \\ m=2 \end{array}$$

	+	-	+
	2	5	

ج

$$2) \Delta < 0 \rightarrow 1 - m < 0 \rightarrow m > 1$$



۹ اگر رأس یک سهمی روی نیمساز ربع اول باشد و محور x ها را در دو نقطه، به طول‌های -1 و 3 قطع کند، آن گاه این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

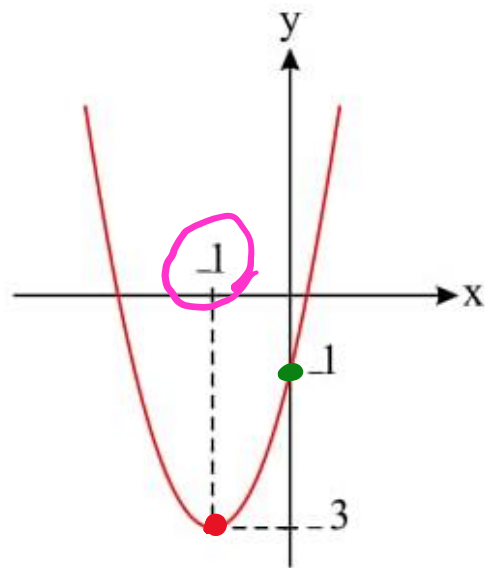
$$y = a(x + 1)(x - 3)$$

اول: $y = x$
دوم: $y = -x$

$$\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix} \rightarrow 1 = a(1)(-1) \rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}(x+1)(x-3) \xrightarrow{x=0} y = -\frac{1}{4}(1)(-3) = \frac{3}{4}$$

۱۰ مجموع مربعات صفرهای تابع درجه دو مقابل کدام است؟



$$y = ax^2 + bx + c = \underline{2x^2 + 2x - 1}$$

$$\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$0 + 0 + c = -1$$

$$c = -1$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$$

$$a - b - 1 = -3$$

$$a - \underline{b} = -2$$

$$x = \frac{-b}{2a} = -1$$

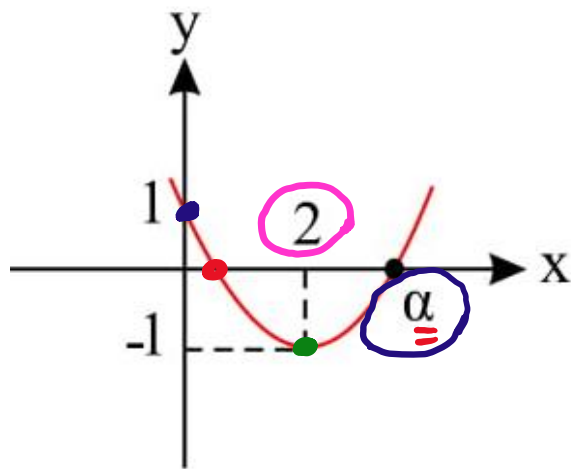
$$b = 2a$$

$$\alpha + \beta = \underbrace{(\alpha + \beta)}_{\frac{-b}{a}} - \underbrace{1}_{\frac{c}{a}} \alpha \beta = (-1) - 1\left(\frac{-1}{2}\right) = 1 + 1 = 2$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۳۸۹

۱۱) با توجه به شکل روبه رو که نمودار یک تابع درجه‌ی دو را نشان می‌دهد. مقدار α کدام است؟



$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{matrix} x=0 \\ y=1 \end{matrix} \rightarrow c=1 \quad \checkmark$$

$$\begin{matrix} x=2 \\ y=-1 \end{matrix} \rightarrow 4a + 2b + 1 = -1 \rightarrow 4a + 2b = -2 \rightarrow 2a + b = -1 \quad \checkmark$$

$$x = \frac{-b}{2a} = 2 \rightarrow b = -4a \rightarrow 4a - 4a = -1 \rightarrow a = \frac{1}{4} \rightarrow b = -1$$

$$y = \frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 4 - 4\left(\frac{1}{4}\right)(1) = 1$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{1}}{1}$$

$$\begin{matrix} x = 2 + \sqrt{1} \\ x = 2 - \sqrt{1} \end{matrix}$$

$$a = 2 + \sqrt{1}$$

۱۲) اگر نقطه‌ی $S(1, -2)$ رأس سهمی $x^2 + 2ax + \underline{y} + b = 0$ باشد، $a + b$ کدام است؟

$$y = -x^2 - \underline{2a}x - b$$

$$\begin{array}{l} x=1 \\ y=-2 \end{array}$$

$$\rightarrow -2 = -1 - 2a - b$$

$$\underline{2a + b} = 1 \quad \checkmark$$

$$b = 3 \quad \checkmark$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{2a}{-2} = 1$$

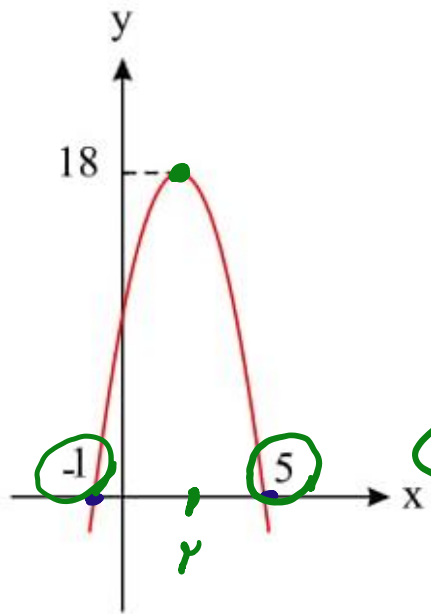
$$2a = -2$$

$$a = -1 \quad \checkmark$$

$$a + b = -1 + 3 = 2$$

۱۳) اگر شکل داده شده نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، آن گاه حاصل عبارت

$$A = -3a + \frac{b}{2} - c \text{ کدام است؟}$$



$$f = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$f = a(x + 1)(x - 5) \quad \xrightarrow{x=2, y=18} \quad 18 = a(3)(-3) \rightarrow \boxed{a = -2}$$

$$f = -2(x + 1)(x - 5) = -2x^2 + 1x + 10$$

$$a = -2$$

$$b = 1$$

$$c = 10$$

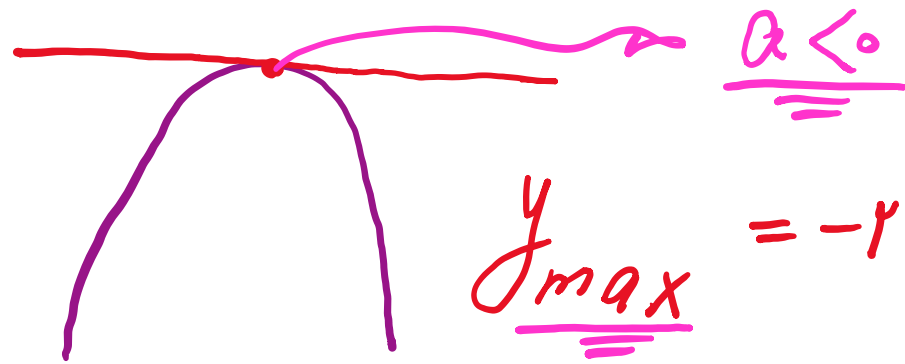
$$\rightarrow A = +9 + 1 - 10 = 0 \quad A = 0$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۴) به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر k ، خط $y = -2$ در بالاترین نقطه‌ی سهمی

$f(x) = kx^2 + 2\sqrt{2}x + k - 1$ بر سهمی مماس است؟



$$\frac{-\Delta}{4a} = -2 \rightarrow \Delta = 16a \rightarrow \cancel{1} - \cancel{4}^2 (k)(k-1) = \cancel{4}^2 k$$

$$\rightarrow 1 - k^2 + k = 4k \rightarrow k^2 + k - 2 = 0$$

$$k = 1 \quad \times$$

$$k = -2 \quad \checkmark$$

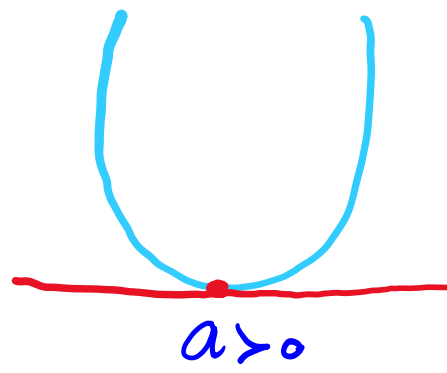
$$k = -2$$

۱۵) اگر مجموع طول نقاط تلاقی سهمی $y = \underline{2}x^2 + (\underline{2-m})x + m$ با محور x ها برابر m باشد، حاصل ضرب طول این نقاط کدام است؟

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = m \quad \frac{m-2}{2} = m \quad m = m-2 \quad m = -2 \checkmark$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{m}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

۱۶ خط $y = 2$ بر نمودار تابع $y = ax^2 + 3x + (a + 2)$ در پایین ترین نقطه ی آن مماس است. a کدام است؟



$$f = \frac{-\Delta}{4a} = 2 \rightarrow -\Delta = 1a \rightarrow -\left(\frac{9 - 4a(a+2)}{4}\right) = 1a$$

$$9 - 4a^2 - 1a = 1a$$

$$-9 + 4a^2 = 2a$$

$$4a^2 - 2a - 9 = 0$$

$$4a^2 = 2a + 9$$

$$a^2 = \frac{2a + 9}{4}$$

$$a = \frac{2a + 9}{4}$$

$$4a = 2a + 9$$

$$2a = 9$$

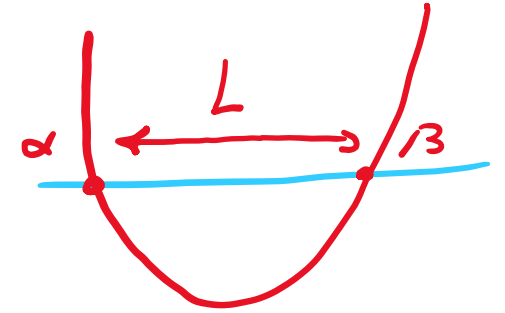
$$a = \frac{9}{2}$$

۱۷) محور تقارن سهمی $y = x^2 + 4x + k$ منحنی را در نقطه‌ای به عرض (-2) قطع می‌کند. طول پاره‌خطی که

سهمی روی محور x ها ایجاد می‌کند، کدام است؟

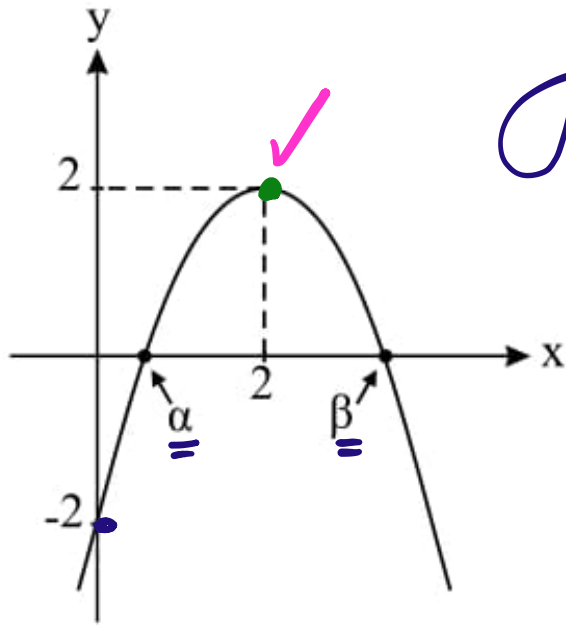
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -2 \end{array} \right\} \rightarrow -2 = 4 - 4 + k \rightarrow k = 2 \end{aligned}$$



$$L = |\beta - \alpha| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{16 - 4(1)(2)}}{1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۱۸) با توجه به نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، حاصل عبارت $\alpha\beta^3 + 2\alpha^2$ کدام است؟



$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \rightarrow c = -2$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \rightarrow 4a + 2b - 2 = 2 \rightarrow 2a + b = 2$$

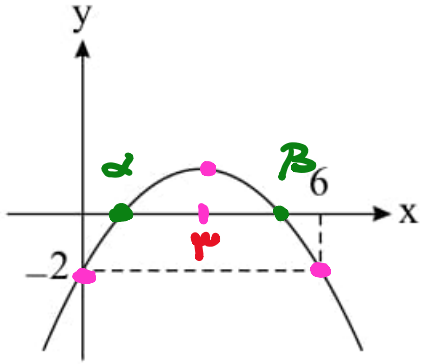
$$x = \frac{-b}{2a} = 2 \rightarrow b = -4a \rightarrow a = -1 \rightarrow b = 4$$

$$y = -x^2 + 4x - 2$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4 \\ \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \underline{\alpha\beta} \cdot \beta^3 + 2\alpha^2 &= 2(\alpha^3 + \beta^3) = 2((\underline{\alpha + \beta})^3 - 3\alpha\beta) \\ &= 2(16 - 4) = 24 \end{aligned}$$

۱۹ اگر صفرهای تابع درجه دوم زیر جملات چهارم و هشتم یک دنباله حسابی باشند، مجموع جمله دوم و دهم این دنباله حسابی کدام است؟



$$\begin{array}{c} 0 \\ -2 \end{array} \quad \begin{array}{c} 4 \\ -2 \end{array} \rightarrow x = 3$$

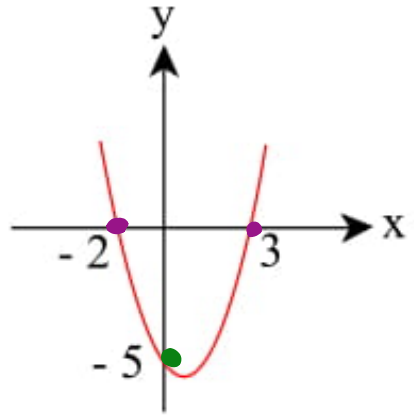
$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 3$$

$$\alpha + \beta = 6$$

$$\underbrace{a}_{12} + \underbrace{a}_{12} = 6$$

$$\underbrace{a}_{12} + \underbrace{a}_{10} = 6$$

۲۰) شکل زیر، نمودار تابع درجه‌ی دوم به معادله‌ی $y = \underline{a}x^2 + \underline{b}x + c$ را نشان می‌دهد. حاصل $a + b + c$ کدام است؟



$$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$y = a(x + 2)(x - 3) = \frac{5}{4}(x + 2)(x - 3)$$

$$\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -5 \end{array} \rightarrow -5 = a(2)(-3) \rightarrow a = 5/4 \checkmark$$

$$y = \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{4}x - 5 \rightarrow a + b + c = -5$$