

آموزش ریاضی دهم انسانی

کاربردهای معادله درجه دو

(فصل اول – درس دوم)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 &\rightarrow x = \frac{-b}{2a} \\ \Delta < 0 &\rightarrow \text{بدون جواب} \end{aligned}$$

$$\Delta = 0$$

مساخف

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x - 1)(x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x - 1)(x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

۱) $c=0 \rightarrow x^2 - 1x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

۲) $b=0 \rightarrow x^2 - 1a = 0 \rightarrow x^2 = 1a \rightarrow x = \pm \sqrt{a}$

۳) $a+b+c=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-c/a \end{cases}$

۳) $x^2 - 1a + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1/a \end{cases}$

۴) $b=a+c \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-c/a \end{cases}$

۴) $x^2 + 1a + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-1/a \end{cases}$

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{S} = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{P} = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) \end{cases}$$

$$\mu x^2 + x - \omega = 0$$

$$\begin{cases} \underline{S} = \frac{-1}{\mu} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{P} = \frac{-\omega}{\mu} \end{cases}$$

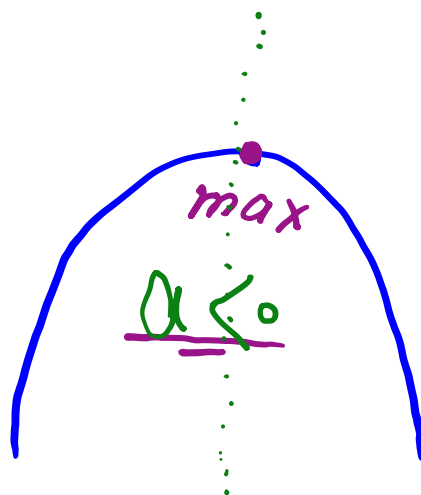
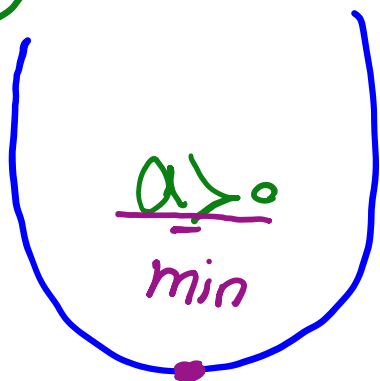
$$\underline{\underline{|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}}$$

$$(1) \quad P > 0 \quad / \quad \Delta > 0 \quad \leftarrow \text{دو ریشه مثبت}$$

$$(2) \quad P > 0 \quad / \quad \Delta < 0 \quad \leftarrow \text{دو ریشه منفی}$$

$$(3) \quad P < 0 \quad / \quad \Delta > 0 \quad \leftarrow \text{یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی}$$

$$y = ax^2 + bx + c$$



رأس سهمی

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$y = \frac{-\Delta}{4a}$$

محور تقارن

$$x = \frac{-b}{2a}$$

کمترین مقدار و بیشترین مقدار f

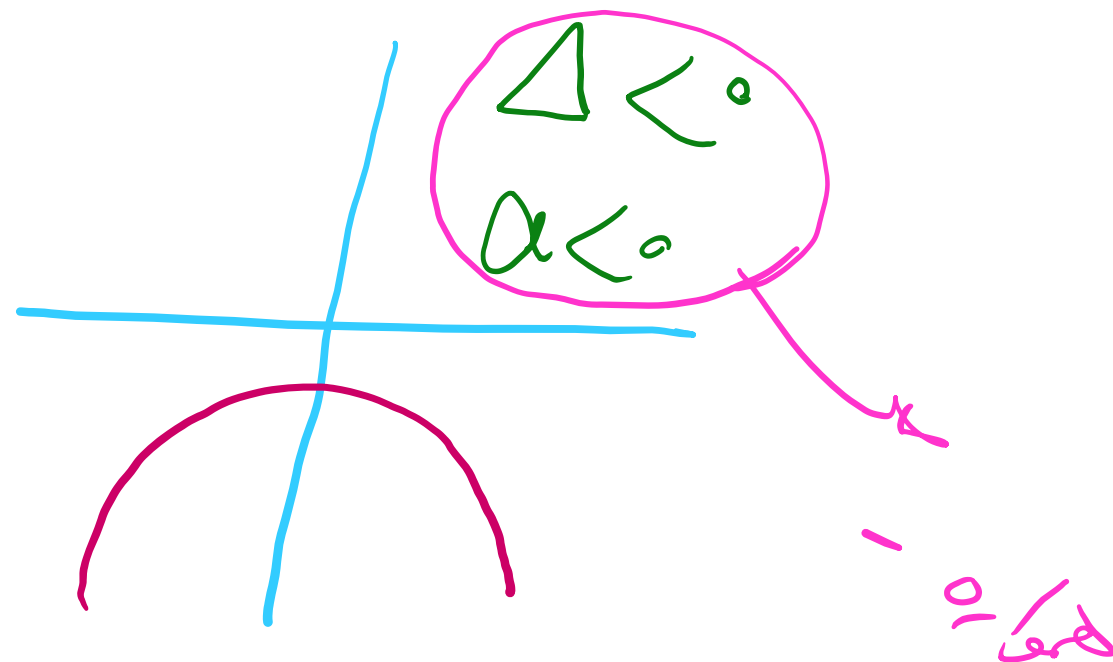
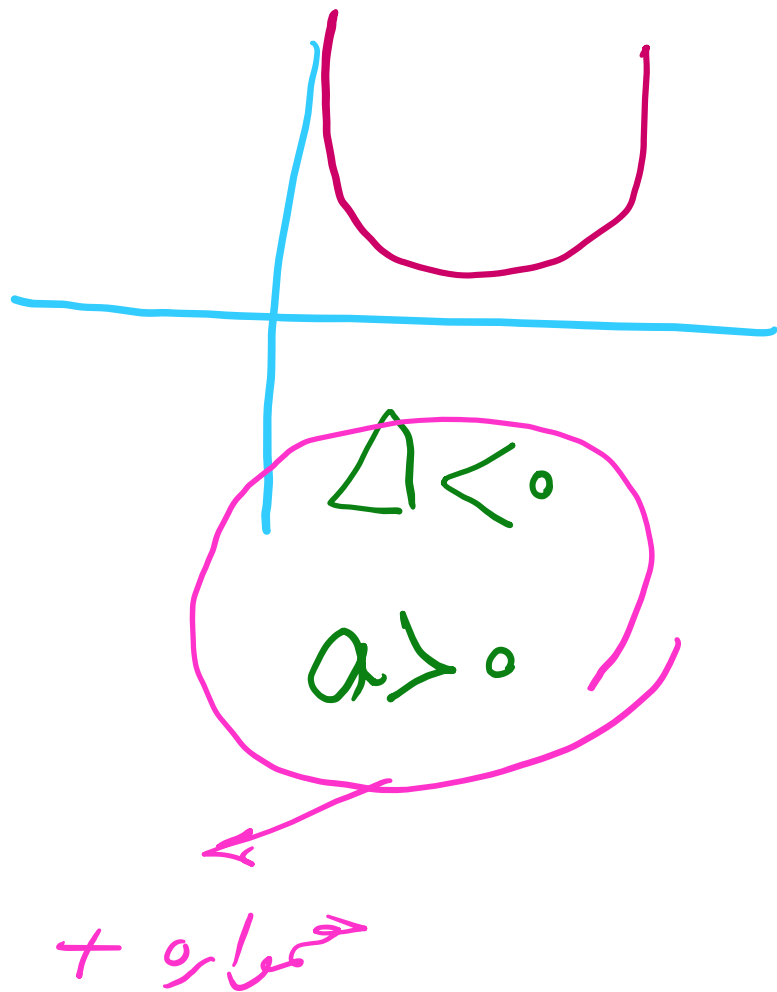
$$f = \underline{a}x^2 + bx + c$$

$\underline{a} > 0 \rightarrow \underline{f_{min}} = \frac{-\Delta}{4a}$

$\underline{a} < 0 \rightarrow \underline{f_{max}} = \frac{-\Delta}{4a}$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۳۸۹



۱) به ازای کدام مقادیر a ، معادله $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت است؟

$$x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 \quad | \quad \underline{x-1}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 \\ - (x^3 - x^2) \\ \hline ax^2 + (4-a)x - 4 \\ - (ax^2 - ax) \\ \hline 4x - 4 \\ \hline 4x - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x^2 + ax + 4) = 0$$

$$\frac{x^3}{x} = x^2$$

$$\frac{ax^2}{x} = ax$$

$$\frac{4x}{x} = 4$$

$$\Delta > 0 \rightarrow a^2 - 14 > 0 \rightarrow a^2 > 14$$

$$\left| \begin{array}{l} a > \sqrt{14} \\ a < -\sqrt{14} \end{array} \right.$$

$$S > 0 \rightarrow -a > 0 \rightarrow a < 0$$

$$P > 0 \rightarrow 4 > 0$$

$$x^3 - 4x^2 + 9x - 4 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array} \right.$$

$$(x-1)(x^2 - 5x + 4)$$

$$a < -4$$

$$x=1 \rightarrow (x-1)=0$$

$$(-\infty, -4) \cup (-1, 0)$$

اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x(ax^2 - x - 5) = 2$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟

$$x=2 \rightarrow 2(4a - 2 - 5) = 2 \rightarrow 4a - 7 = 1 \rightarrow 4a = 8 \rightarrow a = 2$$

$$\begin{array}{r} 1x^3 - x^2 - 5x - 2 \\ 1x^3 - 2x^2 \\ \hline 1x^2 - 5x - 2 \\ 1x^2 - 2x \\ \hline -3x - 2 \\ -3x + 6 \\ \hline -8 \end{array}$$

$$(x-2)(1x^2 + 1x + 1) = 0$$

$$\begin{array}{r} 1x^3 - 5x - 2 \\ 1x^3 - 2x \\ \hline -3x - 2 \end{array}$$

$$\frac{1x^3}{x} = 1x^2$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{1}{1}$$

$$\begin{array}{r} x - 2 \\ x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

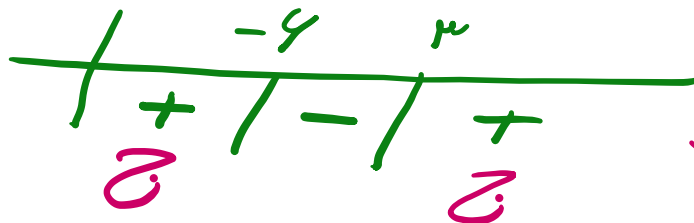
$$\frac{1x^2}{x} = 1x$$

$$\frac{x}{x} = 1$$

به ازای کدام مقادیر m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی است؟

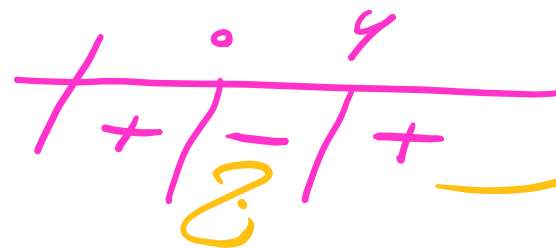
$$1) \Delta > 0 \rightarrow (m-6)(-3) > 0 \rightarrow m+18 > 0 \rightarrow (m+6)(m-3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 3 \end{cases}$$



$$\rightarrow \begin{cases} m < -6 \\ m > 3 \end{cases}$$

$$2) \Delta < 0 \rightarrow \frac{16}{m-6} < 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 6 \end{cases}$$



$$\rightarrow 0 < m < 6$$

$$3) P > 0 \rightarrow \frac{-3}{m-6} > 0 \rightarrow m-6 < 0 \rightarrow m < 6$$

$$\rightarrow \begin{cases} m < -6 \\ m > 3 \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} 0 < m < 6 \end{cases}$$

$$3 < m < 6$$

۴) مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2 + x)^2 - \underline{18}(x^2 + x) + \underline{72} = 0$ کدام است؟

$$(x^2 + x - 12)(x^2 + x - 4) = 0$$

$$x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{-1}{1} = -1 \quad \checkmark$$

$$x^2 + x - 4 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{-1}{1} = -1 \quad \checkmark$$

$$x_1 + x_2 = -1 - 1 = -2$$

۵ اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه‌ی دوم $y = \underline{(a-1)}x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

$$x=2 \rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(a-1)} = 2 \rightarrow a = \frac{3}{4} \checkmark$$

$$a = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{-1}{4}x^2 + x + 3 = 0 \quad \times (-4) \rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x - 6)(x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 6 \checkmark \\ x = -2 \end{cases}$$

۶ اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

$$\frac{-\Delta}{4a} = 0 \rightarrow \Delta = 0$$

۰

$$\Delta = 16 - 4(k+3)(k) = 0 \rightarrow 4 - k - 3k = 0$$

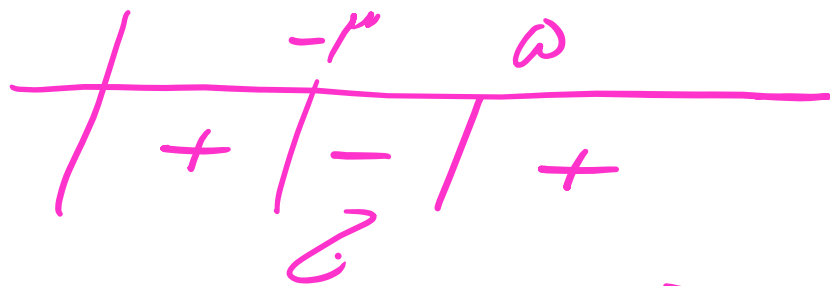
$$x(-) \rightarrow k^2 + 3k - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 1 \rightarrow 0 < 0 \quad \times \\ k = -4 \quad \checkmark \end{cases}$$

۷ به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + (\underline{m+1})x + \frac{1}{2}m + 2 = 0$ فاقد ریشه‌ی حقیقی است؟

$$\Delta < 0 \rightarrow (m+1)^2 - 4\left(\frac{1}{2}m + 2\right) < 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - 2m - 4 < 0 \rightarrow m^2 - 3 < 0$$

$$m^2 - 3 = 0 \rightarrow (m - \omega)(m + \mu) = 0 \rightarrow \begin{matrix} m = \omega \\ m = -\mu \end{matrix}$$



$$-\mu < m < \omega$$

۸ به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $\underline{mx^2 - (m+3)x + 5 = 0}$ برابر ۶ می‌باشد؟
 α, β

$$\alpha + \beta = 4 \rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4 \rightarrow \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) - 4 = 0$$

$$xm \rightarrow m + 4m + 9 - 10m - 4m = 0 \rightarrow -5m^2 - 1m + 9 = 0$$

$$m=1 \rightarrow x^2 - 8x + 5 = 0 \rightarrow \Delta = 14 - 4 < 0 \quad \times$$

$$m = \frac{-9}{5} \rightarrow \frac{-9}{5}x^2 - \left(\frac{-9}{5} + 3\right)x + 5 = 0 \quad \Delta > 0 \quad \checkmark$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta > 0 \rightarrow ac < 0$$

۹ به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ ، بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورها، مماس است؟

$$\Delta = 0$$

$$y = x$$

$$2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x \rightarrow 2x^2 + mx + m + 5 = 0$$

$$m = -5$$

$$\Delta = 0 \rightarrow m^2 - 4(1)(m+5) = 0 \rightarrow m^2 - 4m - 20 = 0$$

$$(m - 12)(m + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 12 \rightarrow 2x^2 + 12x + 18 = 0 \quad \times \\ m = -5 \rightarrow 2x^2 - 5x + 1 = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\div 2 \rightarrow x^2 + 5x + 9 = 0 \rightarrow (x + 3)^2 = 0 \rightarrow x = -3$$

$$\div 2 \rightarrow x^2 - 5x + 1 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1 \quad \checkmark$$

۱۰ به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم $\underline{2}x^2 - (\underline{m+1})x + \underline{\frac{1}{2}} = 0$ برابر ۲ می‌باشد؟
 α, β

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2 \rightarrow \underline{\alpha + \beta} + 2\sqrt{\underline{\alpha\beta}} = 4$$

$$\frac{m+1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 4 \rightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = 4$$

$$x2 \rightarrow m+1 = 1 \rightarrow m = 0$$

۱۱) اگر هریک از ریشه‌های معادله‌ی $\frac{3x^2 + ax + b}{A} = 0$ دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی $\frac{4x^2 - 7x + 3}{x} = 0$ باشد، a کدام است؟

$$A = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{A}$$

$$\rightarrow x \left(\frac{x}{A^2} \right) - 7 \left(\frac{x}{A} \right) + 3 = 0 \quad \times A^2 \rightarrow \underline{14 - 14A + 3A^2 = 0}$$

$$\text{معادله } \underline{3x^2 - 14x + 14} = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -14 \\ b = 14 \end{cases}$$

۱۲) به ازای کدام مقادیر a معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟

$$\Delta > 0 \rightarrow a^2 - 4\left(1\right)\left(a - \frac{3}{2}\right) > 0$$

$$a^2 - 4a + 6 > 0 \rightarrow (a - 2)(a - 3) < 0$$

$$\begin{array}{l} \nearrow a = 3 \\ \searrow a = 2 \end{array}$$

2	3	
+	-	+
2	3	2

$$\begin{array}{l} \nearrow a > 3 \\ \searrow a < 2 \end{array}$$

۱۳ ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $\underline{2x^2 - 3x - 1 = 0}$ ، یک واحد کمتر است؟

$$A = \frac{1}{x} - 1 \rightsquigarrow A + 1 = \frac{1}{x} \rightsquigarrow \frac{1}{A+1} = x$$

$$2\left(\frac{1}{A+1}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{A+1}\right) - 1 = 0 \quad \times (A+1)^2 \rightsquigarrow 2 - 3(A+1) - (A+1)^2 = 0$$

$$2 - 3A - 3 - A^2 - 2A - 1 = 0 \rightsquigarrow -A^2 - 5A - 2 = 0$$

$$\rightsquigarrow A^2 + 5A + 2 = 0$$

۱۴ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $\frac{x^2}{A} + ax + b = 0$ یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی $\frac{x^2}{x} + 7x + 1 = 0$ بیشتر است. b کدام است؟

$$A = x + 1 \rightarrow x = A - 1$$

$$3(A-1)^2 + 7(A-1) + 1 = 0 \rightarrow 3A^2 - 4A + 3 + 7A - 7 + 1 = 0$$

$$3A^2 + A - 3 = 0 \quad \div 3 \rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = 0$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$b = -1$$

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + \underline{ax} + 9 = 0$ یک ریشه دو برابر ریشه‌ی دیگر است. مجموع دو ریشه‌ی مثبت کدام است؟

$$\beta = 2\alpha \rightarrow \beta = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \quad \checkmark$$

$$\alpha + \beta = \frac{-a}{2} = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2} \rightarrow \underline{\underline{\underline{a = -9}}}$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{9}{2} \rightarrow \alpha \cdot 2\alpha = \frac{9}{2} \rightarrow \alpha^2 = \frac{9}{4} \rightarrow \alpha = \frac{3}{2} \quad \checkmark$$

۱۶ به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، سهمی به معادله $y = (1 - m)x^2 + 2(m - 3)x - 1$ ، همواره پایین محور x ها است؟

$$\Delta < 0 \rightarrow 4(m-3)^2 - 4(1-m)(-1) < 0 \rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0$$

$$(m-2)(m-5) < 0 \quad \left| \begin{array}{l} m=2 \\ m=5 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} 2 \quad 5 \\ + \quad | \quad - \quad | \quad + \\ \text{ج} \end{array} \rightarrow \underline{\underline{2 < m < 5}}$$

$$a < 0 \rightarrow 1 - m < 0 \rightarrow \underline{\underline{1 < m}}$$

$$\begin{array}{l} 1 < m < 5 \\ 2 < m < 5 \end{array} \rightarrow \underline{\underline{2 < m < 5}}$$

۱۷) منحنی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ محور طولها را در ۳ و ۱ و محور عرضها را در ۶ قطع کرده است. کمترین مقدار y کدام است؟

$$A \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right. \rightarrow a + b + 4 = 0$$

$$B \left| \begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \right. \rightarrow 9a + 3b + 4 = 0$$

$$a + b = -4$$

$$3a + b = -4$$

$$\left| \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -1 \end{array} \right.$$

$$C \left| \begin{array}{c} 0 \\ 4 \end{array} \right. \rightarrow 0 + 0 + c = 4 \quad c = 4$$

$$y_{\min} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(4 - 4(2)(4))}{4(2)} = -2$$

۱۸) به ازای کدام مقدار m ، رابطه‌ی $\overline{P} + \overline{S} = 4$ بین ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 + (2m-1)x = 5$ برقرار است؟

$$mx^2 + (2m-1)x - 5 = 0$$

$$\frac{-5}{m} + \frac{2m-1}{m} = 4 \rightarrow -5 - 2m + 1 = 4m$$

$$4m = -4 \rightarrow m = -1 \rightarrow \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 5 = 0$$

$$x(-3) \rightarrow x^2 + x + 15 = 0 \rightarrow \Delta < 0$$

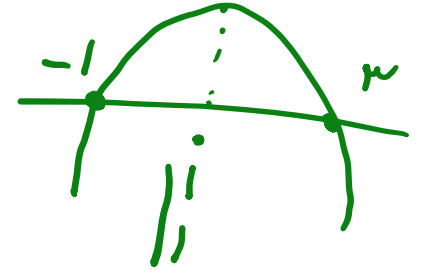
۱۹ محیط مستطیلی ۱۸۰ واحد است. به ازای کدام طول مستطیل مساحت آن بیشترین مقدار است؟

$$2x + 2y = 180 \rightarrow x + y = 90 \rightarrow y = 90 - x$$
$$S = xy = x(90 - x) = 90x - x^2$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-90}{2(-1)} = \underline{\underline{45}}$$

۲۰ اگر رأس یک سهمی روی نیمساز ربع اول باشد و محور x ها را در دو نقطه، به طول های -۱ و ۳ قطع کند، آن گاه این سهمی محور y ها را در نقطه ای با کدام عرض قطع می کند؟

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta) \quad \text{و} \quad y = a(x + 1)(x - 3)$$



$$\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \end{array} \rightarrow 1 = a(1)(-1) \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)(x-3) \xrightarrow{x=0} y = -\frac{1}{2}(1)(-3) = \frac{3}{2}$$