

آموزش ریاضی دوازدهم تجربی

دایره

(فصل ششم – درس دوم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$(\underline{x-\alpha})^r + (\underline{y-\beta})^r = R^r$$

$$0 \mid \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \beta \end{array}$$

$$R =$$

$$(\underline{x+r})^r + (\underline{y-a})^r = \underline{\underline{100}}$$

$$0 \mid \begin{array}{l} x = -r \\ y = a \end{array}$$

$$R = 10$$

$$x^r + y^r + \underline{a}x + \underline{b}y + \underline{c} = 0$$

$$0 \mid \begin{array}{l} -\frac{a}{r} \\ -\frac{b}{r} \end{array} \quad 0 \mid \begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array}$$

$$0 \mid \begin{array}{l} \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \end{array}$$

$$R^r = \frac{a^r + b^r - rc}{r}$$

$$R^r = \alpha^r + \beta^r - c$$

اوضاع نسبی خط و دایره

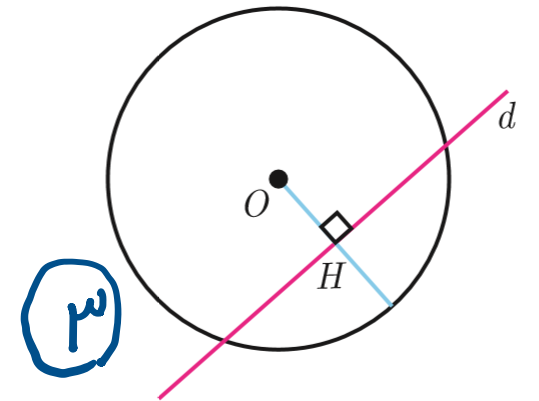
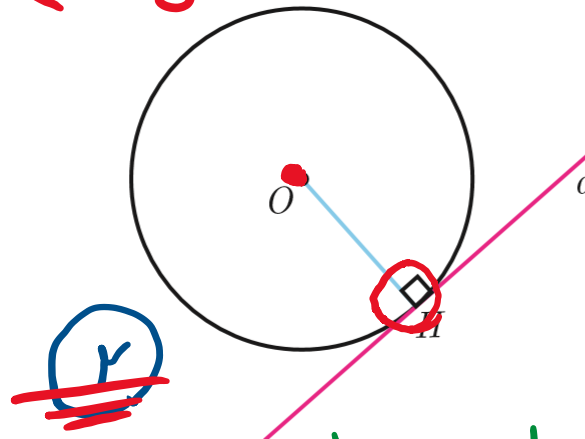
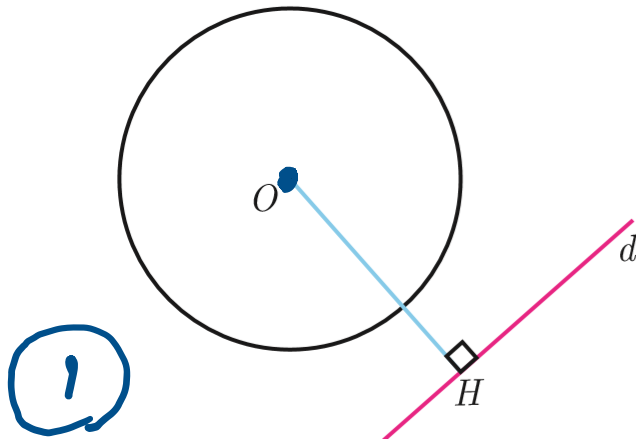
$$R > L$$

$$L = R$$

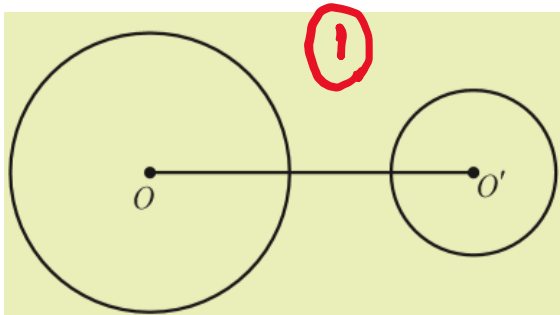
$$L > \underline{R}$$

$$\frac{0}{\beta}$$

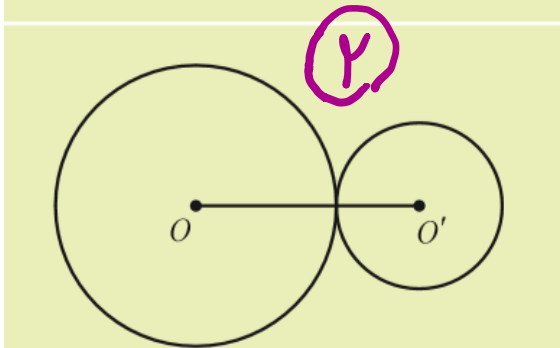
نکته: اگر دایره و خط مماس باشند
آن‌ها یک نقطه مشترک دارند
و این نقطه را باید از مرکز دایره عبور داد



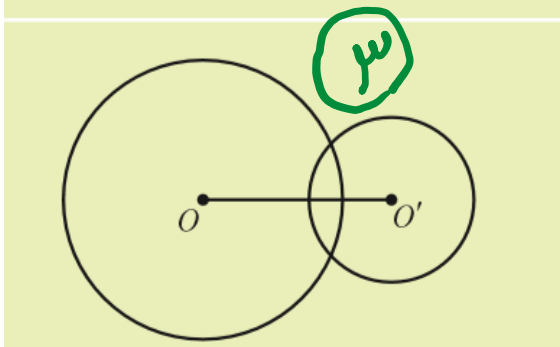
$$ax+by+c=0 \quad L = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



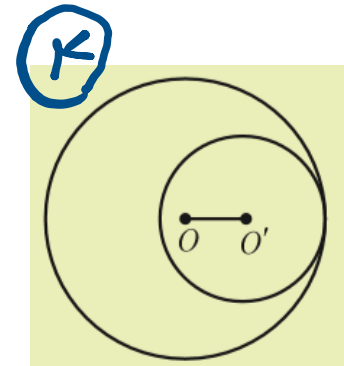
$$OO' > r + r'$$



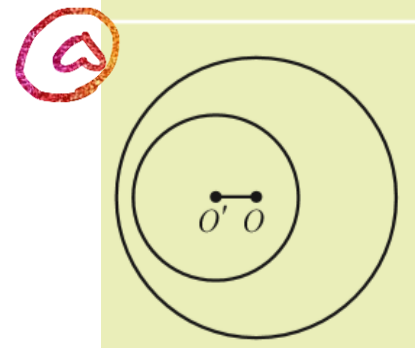
$$OO' = r + r'$$



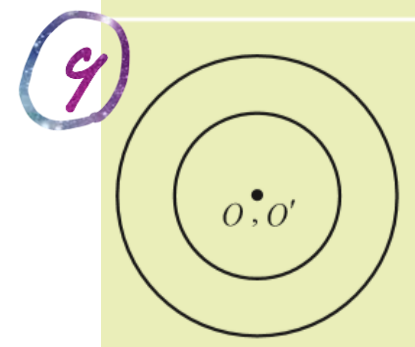
$$r - r' < OO' < r + r'$$



$$OO' = r - r'$$



$$OO' < r - r'$$



$$d = 0$$

۱ شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات $(\underline{0}, \underline{0})$, $(\underline{-2}, \underline{4})$, $(\underline{2}, \underline{1})$ می‌گذرد کدام است؟

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$(0,0) \rightarrow c = 0$ ✓

$(-2,4) \rightarrow 4 + 16 - 2a + 4b = 0 \rightarrow -2a + 4b = -20$

$(2,1) \rightarrow 4 + 1 + 2a + b = 0 \rightarrow 2a + b = -5$

$a = 0$
 $b = -5$

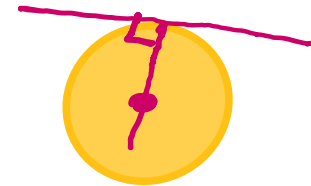
$$x^2 + y^2 + 0x - 5y + 0 = 0$$

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{0 + 25 + 0}{4} \rightarrow R = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

۲) به ازای کدام مقدار a ، زاویه‌ی بین خط مماس بر دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x + y = 1$ و خط به معادله‌ی $3x + 2y = a$ در نقطه‌ی تلاقی آنها، 90° درجه است؟

$$\begin{array}{l} 0 \text{ مریز} \\ -\frac{2}{2} = 1 \\ -\frac{1}{2} = \frac{-1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ 2y + 1 = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{2} \end{array}$$

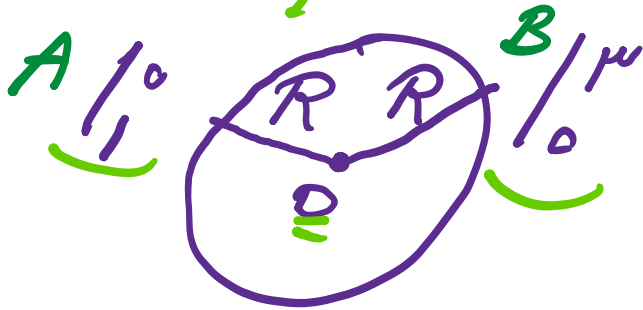


$$x + y = a$$

$$\rightarrow 1 - 1 = 2 = a \rightarrow a = 2$$

دایره‌ای از دو نقطه‌ی $(0, 1)$ و $(3, 0)$ گذشته و معادله‌ی یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ است. شعاع این دایره کدام است؟ ۳

$$\begin{aligned} x &= a \\ y &= a - 2 \end{aligned}$$



$$\rightarrow \underline{OA} = OB \rightarrow \sqrt{a^2 + (a-2)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (a-1)^2}$$

$$\rightarrow a^2 = a^2 - 4a + 4 \rightarrow 4a = 4 \rightarrow a = 1$$

$$R = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

۴ دایره‌ی C بر دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایره‌ی C از نقطه‌ی $(8, 7)$ می‌گذرد. شعاع دایره‌ی C کدام است؟

$$C \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ R = 1 \end{cases}$$

$$C' \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \\ x = +2 \\ y = -1 \\ R' = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3 \end{cases}$$

$$OO' = R + R' \rightarrow \sqrt{1^2 + 4^2} = 10 = R + 3 \rightarrow R = 7$$

$$R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - c$$

۵ فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x, y)$ از نقطه‌ی $A(3, 6)$ ، دو برابر فاصله‌ی آن از مبدأ مختصات است. / بزرگترین وتر از مکان نقاط M کدام است؟

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 4x^2 + 4y^2$$

$$\rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 6x + 12y - 45 = 0$$

$$\div 3 \rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0$$

$$R = \sqrt{\frac{4 + 16 + 90}{4}} = \sqrt{10}$$

$$\rightarrow \text{قطر} = 2r = 2\sqrt{5}$$

دایره‌ای به مرکز $(2, -1)$ و مماس بر خط به معادله‌ی $x - y = 1$ محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

$$\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}$$

$$R = L = \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$x - y - 1 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$$

$$\begin{matrix} \text{بنا بر } x, y \\ y = 0 \end{matrix} \rightarrow$$

$$(x - 2)^2 + 1 = 2 \rightarrow (x - 2)^2 = 1$$

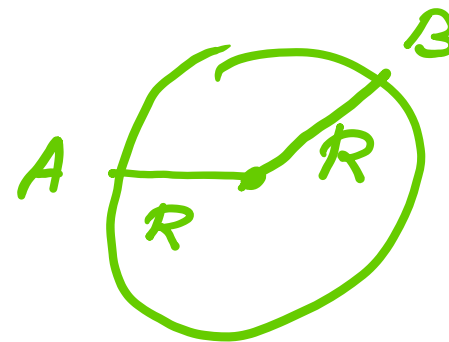
$$\begin{aligned} x - 2 = 1 &\rightarrow x = 3 \checkmark \\ x - 2 = -1 &\rightarrow x = 1 \checkmark \end{aligned}$$

دایره‌ای، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟ (۷)

$$\begin{array}{l} O \\ x = a \\ y = a \end{array}$$

$$A \begin{array}{l} / \\ 1 \end{array}$$

$$B \begin{array}{l} / \\ 3 \end{array}$$



$$\sqrt{(a-1)^2 + \underline{a^2}} = \sqrt{(a-3)^2 + \underline{a^2}}$$

$$a - 2a + 1 = a^2 - 6a + 9 \rightarrow a = 2 \checkmark$$

$$R = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3} \checkmark$$

دایره‌ی گذرا بر نقطه‌ی $(\underline{1}, \underline{-2})$ ، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

$$\begin{cases} x = \underline{R} \\ y = \underline{-R} \end{cases}$$

$$\rightarrow (x - R)^2 + (y + R)^2 = R^2$$

$$\rightarrow \cancel{R^2 - 2R + 1 + R^2 - 2R + 1} = \cancel{R^2}$$

$$\rightarrow R^2 - 2R + 0 = 0$$

$$(R - 0)(R - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} R = 1 \\ R = 0 \end{cases}$$

۹ دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8$ و $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 12 = 0$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

$$O / \underline{\underline{2}}^{-4}$$

$$R = \sqrt{14 + 4 - 12} = \sqrt{1} = 2\sqrt{2}$$

$$O' / \underline{\underline{-3}}^1$$

$$R' = \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11} = 2\sqrt{2}$$

مماس
✓

$$OO' = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$$

$$\underline{\underline{OO'}} = 5\sqrt{2} = \underline{\underline{R + R'}} = 5\sqrt{2}$$

۱۰ طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطه $A(-1, 0)$ و $B(3, 0)$ و $C(0, -3)$ می‌گذرد کدام است؟

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\xrightarrow{(-1, 0)} 1 - a + c = 0$$

$$\xrightarrow{(3, 0)} 9 + 3a + c = 0$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ c = -3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(0, -3)} 9 - 3b - 3 = 0 \rightarrow b = 2$$

$$R = \sqrt{\frac{1^2 + 1^2 + 1^2}{1}} = \sqrt{3}$$

دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13$ و $x^2 + y^2 + 2x = 1$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

$$O / \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \quad R = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$$

$$O' / \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \quad R' = \sqrt{1 + 4 + 13} = 4\sqrt{2}$$

$$OO' = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

$$OO' = R' - R = 2\sqrt{2}$$



نقطه‌ی $(a, 2a)$ مرکز دایره‌ای گذرنده بر دو نقطه‌ی $(2, 1)$ و $(-1, 4)$ است. شعاع این دایره کدام است؟

$$OA = OB \rightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (2a-4)^2}$$

$$\rightarrow \cancel{a^2} - 4a + 4 + \cancel{4a^2} - 4a + 1 = \cancel{a^2} + 2a + 1 + \cancel{4a^2} - 16a + 16$$

$$\rightarrow 2a = 12 \rightarrow a = 6$$

$$R = \sqrt{0 + 9} = 3$$

۱۳) به ازای کدام مقدار a ، دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$ بر خط به معادله $x + 3y = 0$ مماس است؟

$$R = L \rightarrow \sqrt{5-a} = \frac{5}{\sqrt{10}} \rightarrow 5-a = \frac{25}{10}$$

$$\rightarrow a = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} / \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}$$

$$R = \sqrt{1+4-a} = \sqrt{5-a}$$

$$L = \frac{|1-6|}{\sqrt{1+9}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

۱۴ شعاع دایره به مرکز $(-۲, ۲)$ و مماس خارج بر دایره $x^2 + y^2 - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$ کدام است؟

$$O / \begin{matrix} -۲ \\ ۲ \end{matrix}$$

$$R = ?$$

$$O' / \begin{matrix} ۱ \\ -۲ \end{matrix}$$

$$R' = \sqrt{1 + 4 - 1} = ۲$$

$$OO' = \sqrt{9 + 14} = ۵$$

$$OO' = R + R' \rightarrow ۵ = R + ۲ \rightarrow R = ۳$$

۱۵ دایره‌ای از دو نقطه‌ی $(0, 0)$ و $(3, 1)$ گذشته و مرکز آن بر خط به معادله‌ی $y = 2x$ قرار دارد. شعاع این دایره کدام است؟

$$O \begin{cases} x = a \\ y = 2a \end{cases}$$

$$A \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

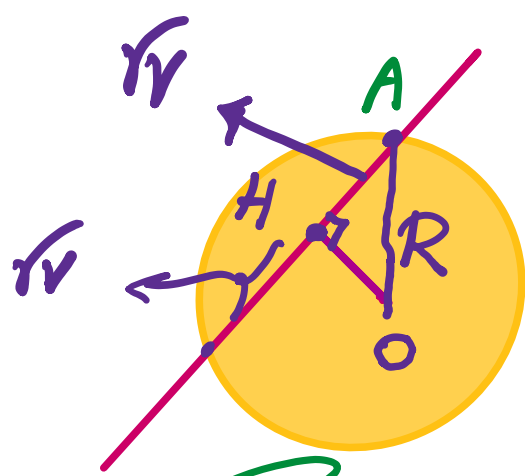
$$\underline{\underline{OA = OB = R}}$$

$$\rightarrow \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (2a-1)^2}$$

$$\rightarrow \cancel{a^2}^2 = \cancel{a^2}^2 - 4a + 9 + \cancel{4a^2}^2 - 4a + 1 \rightarrow a = 1$$

$$R = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

۱۶) نقطه $C(-1, 4)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $2x - 3y + 1 = 0$ و تری به طول $2\sqrt{7}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y = 2$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟



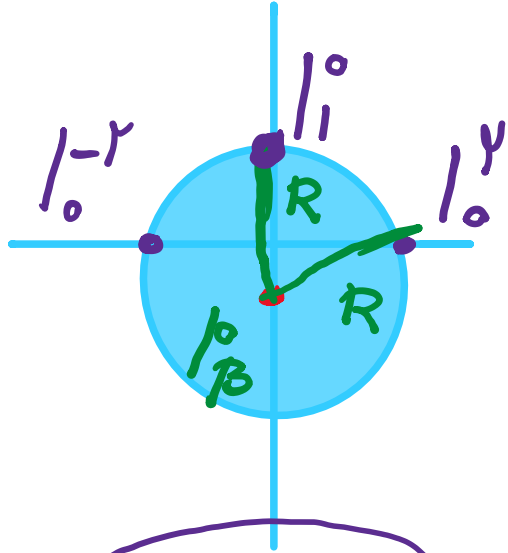
$$OH = \frac{|-2 - 12 + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$R = \sqrt{13 + 7} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 20 \xrightarrow{y=2} (x+1)^2 + 4 = 20$$

$$(x+1)^2 = 16 \rightarrow \begin{cases} x+1=4 \rightarrow x=3 \\ x+1=-4 \rightarrow x=-5 \end{cases}$$

۱۷ دایره‌ای از دو نقطه‌ی $(2, 0)$ و $(-2, 0)$ گذشته و بر خط $y = 1$ مماس است. شعاع این دایره کدام است؟



$$R = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$R = \frac{5}{2}$$

$$\sqrt{1 + \beta^2} = \sqrt{0 + (\beta - 1)^2}$$

$$\rightarrow 1 + \beta^2 = \beta^2 - 2\beta + 1 \rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

۱۸) به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a ، منحنی به معادله‌ی $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$ یک دایره است؟

$$a^2 - 7 = 2 \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = \pm 3$$

$$a = -3$$

$$a = 3 \rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y + 3 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + 2y + \frac{3}{2} = 0$$

$$R = \sqrt{\frac{0 + 4 - 4}{4}} \quad \times$$

$$a = 3 \quad \times$$

$$a = -3 \rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y - 3 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + 2y - \frac{3}{2} = 0$$

$$R = \sqrt{\frac{0 + 4 + 4}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} \quad \checkmark$$

۱۹) معادله‌ی وتر مشترک دو دایره به مراکز $(-1, 2)$ و $(2, 1)$ و به شعاع‌های مساوی ۲ واحد، کدام است؟

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

$$4x - 2y = 0 \rightarrow y = 2x$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

۲۰ دایره‌ای از نقطه $(-۱, ۲)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره بزرگتر کدام است؟

$$\begin{cases} x = -R \\ y = R \end{cases} \rightarrow (x+R)^2 + (y-R)^2 = R^2$$

$$\rightarrow R = ? \rightarrow D = ?$$