

# آموزش ریاضی دوازدهم تجربی

## نقطه بحرانی

(فصل پنجم – درس اول)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$y = f(x) \rightarrow f'(x) \rightarrow \text{مشتق}$$

$$y = x^3 - 3x$$

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$y = x^3 - 3x$$

$$x = 1$$

$$[0, 1]$$

$$x = 0$$

$$x = 2$$

$$y = |u| \rightarrow \begin{cases} u=0 \\ u'=0 \end{cases}$$

$$y = |x| \rightarrow x=0$$

$$y = |x-1| \rightarrow x=1$$

$$y = \frac{x}{|x|} \rightarrow x=0 \text{ } \times$$

$$y = \left(\frac{x-1}{|x-1|}\right) \rightarrow x=1$$

$$* y = f(x) \cdot |g(x)| \rightarrow \begin{cases} g(x)=0 \rightarrow \checkmark \\ f(x) \cdot g(x) \rightarrow \text{مشتق} = 0 \end{cases}$$

۱ مجموعه‌ی طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = |x - 2| \sqrt[3]{x^2}$  کدام است؟

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$\sqrt[n]{u^m} \rightarrow \frac{m u^{m-1}}{n \sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

$$f(x) = (x - 2) \sqrt[3]{x^2} \rightarrow f'(x) = (1) \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} (x - 2)$$

$$f' = \frac{3x + 2x - 4}{\sqrt[3]{x}} \rightarrow \begin{cases} 5x - 4 = 0 \\ \sqrt[3]{x} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$x = 2$$

$$x = \frac{4}{5}$$

$$x = 0$$

۲ مجموعه‌ی طول نقاط بحرانی تابع  $y = |x^2 - 4x|$  کدام است؟

$$y = |u| \rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u' = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$2x - 4 = 0 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^2(x-2)^2$  سه رأس یک مثلث‌اند. نوع این مثلث کدام است؟

$$f' = 2x(x-2)^2 + 2(x-2)x^2 = 0 \Rightarrow 2x(x-2)(x-2+x) = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \rightarrow y=0 \\ x=2 \rightarrow y=0 \\ x=1 \rightarrow y=1 \end{cases}$$

$$A \begin{smallmatrix} / \\ 0 \end{smallmatrix}$$

$$B \begin{smallmatrix} / \\ 0 \end{smallmatrix}$$

$$C \begin{smallmatrix} / \\ 1 \end{smallmatrix}$$

$$AB = \sqrt{4+0} = 2$$

$$AC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$AC = BC \rightarrow \text{متساوی الساقین}$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \rightarrow \text{م قائم الزاویه}$$

۴ مجموعه‌ی طول نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^{\frac{3}{5}}(4-x)$  کدام است؟

$$f(x) = 4x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{1}{5}} \rightarrow f'(x) = \frac{12}{5}x^{-\frac{2}{5}} - \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$$

$$\rightarrow \frac{12}{5}x^{-\frac{2}{5}} - \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{12}{5}x^{\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$$

$$\rightarrow \frac{12}{5}x^{\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = 0 \rightarrow \frac{12}{5}x^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} \rightarrow 12x^{\frac{1}{5}} = x^{-\frac{4}{5}} \rightarrow 12x^{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = 1 \rightarrow 12x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{12}$$

$$12 - 12x = 0 \rightarrow x = \frac{12}{12} = 1$$

$$\frac{12}{5}x^{\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = 0 \rightarrow \frac{12}{5}x^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} \rightarrow 12x^{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = 1 \rightarrow 12x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{12}$$

$$\underline{\underline{x=0}}$$

۵ نقاط بحرانی تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$  در بازه  $[-1, 1]$  کدام است؟

$$f'(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} (2x^{\frac{2}{3}} - 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot (2x^{\frac{2}{3}} - 1)$$

$$2\sqrt[3]{x^2} - 1 = 0 \rightarrow \sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{2} \rightarrow x^2 = \frac{1}{8} \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\sqrt[3]{x} = 0$$

$$x = 0$$

$$\left[ \begin{array}{c} \checkmark \\ x \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{c} \checkmark \\ x \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{c} \checkmark \\ \checkmark \end{array} \right]$$

مجموع طول‌های نقاط بحرانی تابع  $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} (\underline{x^3 - 3x^2 + 4})^{-\frac{2}{3}} \cdot (\underline{3x^2 - 6x})$$

$$3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 3x(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}$$

$$\underline{x^3 - 3x^2 + 4} = \underline{x^3 - 3x^2 - x^2 + 4} = x^2(\underline{x - 2}) - (\underline{x - 2})(x + 2) = 0$$

$$\rightarrow (x - 2)(x^2 - x - 2) = (x - 2)(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}$$

$$2 - 1 + 0 = 1$$

۷ تابع  $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$  در بازه  $(-1, 1)$  چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟  $\frac{1}{3} - (-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$

$$f'(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} (2x^{\frac{2}{3}} - 1)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x'}} \cdot (2\sqrt{x'^2} - 1)$$

$$\sqrt[3]{x} = 0 \rightarrow x = 0$$

$$2\sqrt{x'^2} - 1 = 0 \rightarrow \sqrt{x'^2} = \frac{1}{2} \rightarrow x'^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

۸ تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt[5]{x^5 - 5x^4}$  در  $x = x_0$  دارای نقطه‌ی بحرانی است. مجموعه‌ی مقادیر  $x_0$  کدام است؟

$$f(x) = (x^5 - 5x^4)^{\frac{1}{5}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{5} (x^5 - 5x^4)^{-\frac{4}{5}} \cdot (5x^4 - 20x^3)$$

$$x^5 - 5x^4 = 0 \rightarrow \underline{x^4(x - 5)} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$5x^4 - 20x^3 = 0 \rightarrow 5\underline{x^3(x - 4)} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$x = 0 \quad \checkmark$$

$$x = 4 \quad \checkmark$$

$$x = 5 \quad \checkmark$$

مجموعه‌ی طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = (x^2 - 28) \cdot \sqrt[3]{x}$  کدام است؟

$$f'(x) = 2x \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot (x^2 - 28) = \frac{9x^2 + x^2 - 28}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\sqrt[3]{x^2 - 28} = 0 \rightarrow x^2 = 28 \rightarrow x = \pm \sqrt{28}$$

$$\sqrt[3]{x^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

$$y = \sqrt[n]{u^m} \rightarrow \frac{m u'}{n \sqrt[n]{u^{n-m}}} \quad \left| \quad \sqrt[3]{x^2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

۱۰ تعداد نقاط بحرانی تابع  $y = x\sqrt{x^2 - 4}$  بر روی دامنه‌ی خود کدام است؟

$$y' = \sqrt{x^2 - 4} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \cdot x = \frac{x^2 - 4 + x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \quad \times$$

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \quad \checkmark$$

نکته : دامنه

۱۱ مجموعه طول نقاط بحرانی تابع باضابطه  $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt[3]{x^2}$  کدام است؟

$$f'(x) = 1x \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} (x^2 - 1)$$

$$= \frac{4x^2 + 1x^2 - 1}{3\sqrt[3]{x}} \rightarrow \begin{cases} 1x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{1} \rightarrow x = \pm \frac{1}{1} \\ 3\sqrt[3]{x} = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$x = 0$$

$$x = \frac{1}{1}$$

$$x = -\frac{1}{1}$$

۱۲) تابع  $-3 < x \leq 2$   $2 < x < 5$   $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x \\ x^3 - 18x \end{cases}$  در بازه‌ی  $(-3, 5)$  چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

$$x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \checkmark \\ x = -1 \checkmark \end{cases}$$

$$x^2 - 18 = 0 \rightarrow x^2 = 18 \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4} \checkmark \\ x = -\sqrt{4} \times \end{cases}$$

$$x = 2 \rightarrow \begin{cases} 1 - 6 = -5 \\ 1 - 36 = -35 \end{cases}$$

نیویز نیست

$$x = 1 \checkmark$$

$$x = -1 \checkmark$$

$$x = \sqrt{4} \checkmark$$

$$x = 2 \checkmark$$

۱۳ تابع  $f(x) = ۲x + \sqrt{1-x^۲}$  چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

$$f'(x) = ۲ + \frac{-1x}{\sqrt{1-x^۲}} = \frac{۲\sqrt{1-x^۲} - x}{\sqrt{1-x^۲}}$$

$$\sqrt{1-x^۲} = 0 \rightarrow 1-x^۲ = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$۲\sqrt{1-x^۲} - x = 0 \rightarrow ۲ - ۲x^۲ = x^۲ \rightarrow ۵x^۲ = ۲ \rightarrow x^۲ = \frac{۲}{۵}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۵}}$$

$$x = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۵}}$$

$$۲\sqrt{1-x^۲} = x$$

۱۴) اگر در تابع  $f(x) = \begin{cases} x^3 - bx & , x < 3 \\ ax + c & , x \geq 3 \end{cases}$  فقط نقاط  $x = \pm\sqrt{3}$  بحرانی باشند، مقدار  $a + b + c$  کدام است؟

$$\underline{x^3 - b = 0} \xrightarrow{x = \pm\sqrt{3}} 9 - b = 0 \rightarrow b = 9 \checkmark$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 9x \\ ax + c \end{cases}$$

$$\rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 9 \\ a \end{cases}$$

$$27 - 27 = 3a + c$$

$$27 - 9 = a \rightarrow a = 18 \checkmark$$

$$\rightarrow 3a + c = 0$$

$$c = -54 \checkmark$$

$$a + b + c = 18 + 9 - 54 = -27 \checkmark$$

سوال  
پشتیبانی

۱۵) تعداد نقاط بحرانی تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = |\sin x|$  در بازه‌ی  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$  کدام است؟

$$\sin x = 0 \rightarrow 0, \pi, 2\pi$$

$$\cos x = 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

