

آموزش ریاضی دوازدهم تجربی

مشتق قدر مطلق و جز صحیح

(فصل چهارم – درس دوم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Algebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$y = |x - 5| \xrightarrow{x=5} \begin{cases} x > 5 \rightarrow y = x - 5 \rightarrow y' = 1 \rightarrow f'_+(5) = 1 \\ x < 5 \rightarrow y = -x + 5 \rightarrow y' = -1 \rightarrow f'_-(5) = -1 \end{cases}$$

$x = 5$ ✓

$$y = |(x - 2)^2| \xrightarrow{x=2} \begin{cases} x > 2 \rightarrow y = (x - 2)^2 \rightarrow y' = 2(x - 2) \\ x < 2 \rightarrow y = (x - 2)^2 \rightarrow y' = 2(x - 2) \end{cases} \xrightarrow{x=2} y' = 0$$

$x = 2$ ✓

$$f = [x] \xrightarrow{x=1} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f = 0 \end{cases}$$

مشتق جز صحیح

$$f = [x] \xrightarrow{x=1.5} \lim_{x \rightarrow 1.5^+} f = \lim_{x \rightarrow 1.5^-} f = f(1.5) = 1 \quad \checkmark$$

$$f = 1 \rightarrow y' = 0$$

$$f(x) = [x] \mid x - r$$

$$f'_-(r)$$

$$f'_+(r)$$

$$f'_-(r) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow r^-} f(x) = 0 \\ f(r) = 0 \end{cases}$$

$$f'_+(r) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow r^+} f(x) = 0 \\ f(r) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow r^-} f(x) = (1)(-x+r) \rightarrow f'_-(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow r^+} f(x) = (r)(x-r) \rightarrow f'_+(x) = r$$

۱ اگر $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x|$ و $g(x) = 4x + |x|$ باشند، مشتق تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

$x \geq 0 \rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{3}{5}x \\ g(x) = 5x \end{cases} \rightarrow f \circ g(x) = \frac{3}{5}x$ مشتق $\rightarrow 3/5$ ✓

$x \leq 0 \rightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = 3x \end{cases} \rightarrow f \circ g(x) = 3x$ مشتق $\rightarrow 3$ ✓

$y' = 3$

۲ اگر برای تابع $f(x) = a|x-1| + b|x+1|$ داشته باشیم $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2+1) - f(h^2-1) + 2}{h^2} = 4$ ، آنگاه

$a+b$ کدام است؟

$$\frac{f(1) - f(-1) + 2}{0} = 4 \rightarrow 2b - 2a + 2 = 0 \rightarrow b - a = -1 \quad \checkmark$$

$$\div \text{H.O.P} \rightarrow \frac{2h f'(h^2+1) - 2h f'(h^2-1)}{2h} = f'_+(1) - f'_+(-1) = 4$$

$$\begin{aligned} x > 1 &\rightarrow f(x) = ax - a + bx + b \rightarrow f'_+(1) = a + b \\ x > -1 &\rightarrow f(x) = -ax + a + bx + b \rightarrow f'_+(-1) = -a + b \end{aligned}$$

$$2a = 4 \rightarrow a = 2 \quad \checkmark$$

$$a + b + a - b = 4$$

$$b - a = -1 \quad a = 2 \rightarrow b - 2 = -1 \rightarrow b = 1 \quad \checkmark$$

۳ مشتق چپ و راست تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |ax + b|$ در $x = 2$ به ترتیب برابر -3 و 3 است. مقدار مثبت b کدام است؟

$$x=2 \rightarrow 2a+b=0 \xrightarrow{a=3} 6+b=0 \rightarrow b=-6$$

$$1) f(x) = \begin{cases} x > 2 \xrightarrow{a>0} f(x) = ax+b \rightarrow f'(x) = a = 3 \\ x < 2 \xrightarrow{a>0} f(x) = -ax-b \rightarrow f'(x) = -a = -3 \end{cases} \rightarrow a=3$$

$$2) a < 0 \rightarrow a = -3 \rightarrow -6+b=0 \rightarrow b=6$$

$$f(-1) = 1 + 3 = 4$$

۴ اگر $f(x) = x^2 + 3|x|$ باشد، مشتق تابع $y = f(\sqrt{f(x)})$ در $x = -1$ کدام است؟

$$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \cdot f'(\sqrt{f(x)}) = \frac{f'(-1)}{\sqrt{f(-1)}} \cdot f'(\sqrt{f(-1)})$$

$$\rightarrow y' = \frac{f'(-1)}{\sqrt{4}} f'(\sqrt{4}) = \frac{1}{4} f'(-1) \cdot f'(2) = ?$$

$$\begin{aligned} \text{بر } x = -1 &\rightarrow f(x) = x^2 - 3x \text{ و } f'(x) = 2x - 3 \rightarrow f'(-1) = -5 \\ \text{بر } x = 2 &\rightarrow f(x) = x^2 + 3x \text{ و } f'(x) = 2x + 3 \rightarrow f'(2) = 7 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{جواب} = \frac{1}{4} (-5)(7) = \boxed{-\frac{35}{4}}$$

۵ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x| \cdot [x]$ مقدار $f'(0^-) - f'(0^+)$ کدام است؟

$$x = 0^- \rightarrow f(x) = (-x)[0^-] = (-x)(-1) = x \rightarrow f'(0^-) = 1$$

$$x = 0^+ \rightarrow f(x) = (x)[0^+] = (x)(0) = 0 \rightarrow f'(0^+) = 0$$

$$\rightarrow f'(0^-) - f'(0^+) = 1 - 0 = 1$$

۶ اگر $f(x) = |x - 2| + \sqrt{2x}$ حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{H.o.P} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f'(2 + \Delta x) - 0}{1} = f'_-(2)$$

$$2^- \rightarrow f(x) = -x + 2 + \sqrt{2x} \rightarrow f'_-(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$\rightarrow f'_-(2) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

۷ مشتق چپ تابع $f(x) = |2x + 1| - |x - 1|$ در نقطه‌ای به طول $x = -\frac{1}{2}$ کدام است؟

$$-\frac{1}{2} \rightarrow f(x) = -|x - 1| + x - 1 = -\underline{x - 2}$$

$$\rightarrow f'(-\frac{1}{2}) = -1$$

اختلاف مشتق چپ و راست تابع $f(x) = x^2 \underline{[x^2]} |x - 2|$ در نقطه‌ی $x_0 = 2$ کدام است؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است.

$$2^+ \rightarrow f(x) = x^2 \cdot [x^+] (x-2) = 1^4 x^2 (x-2) \xrightarrow{x=2} f' = 1^4 x^2 = \underline{\underline{16}}$$

$$2^- \rightarrow f(x) = x^2 \cdot [x^-] (2-x) = 1^3 x^2 (2-x) \xrightarrow{x=2} f' = -1^3 x^2 = \underline{\underline{-12}}$$

$$\underline{\text{جواب}} = 16 - (-12) = 28$$

۹ اگر $f(x) = ([x] + [-x])|x^2 - x|$ آن گاه مشتق چپ تابع f در $x = 1$ کدام است؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است.

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق حد}} \boxed{-1}$$

$$f(x) = -|x(x-1)| \xrightarrow{x=1^-} f(x) = x(x-1)$$

$$\rightarrow f'_-(x) = 1x-1 \rightarrow f'_-(1) = 1$$

$$f(x) = x(x-1) \xrightarrow{x=1} f'(x) = 1 \rightarrow f'_-(1) = 1$$

۱۰ اگر $f(x) = x^r [x^r]$ آن گاه حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\sqrt{r}) - f(\sqrt{r} - h)}{h}$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است)

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0 + f'(\sqrt{r})}{h} = f'_+(\sqrt{r})$$

$$f(x) = x^r [r^+] = rx^r \rightarrow f'(x) = rx$$

$$\rightarrow f'_+(\sqrt{r}) = r\sqrt{r}$$

۱۱ در تابع با ضابطه $f(x) = \underline{x\sqrt{x}} + |x-1|$ ، مقدار $f'_+(1) + 3f'_-(1)$ ، کدام است؟

۱

۵

۲

۳

۴

$$\begin{aligned} 1^+ &\rightarrow f(x) = x^{\frac{3}{2}} + x - 1 \rightarrow f'_+(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 1 \rightarrow f'_+(1) = \frac{5}{2} \\ 1^- &\rightarrow f(x) = x^{\frac{3}{2}} - x + 1 \rightarrow f'_-(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 1 \rightarrow f'_-(1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$f'_+(1) + 3f'_-(1) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$$

۱۲ اندازه‌ی مشتق تابع $y = |x| + |x^2 - 2x|$ در $x = -1$ چقدر است؟

$$f(x) = -x + x^2 - 2x = x^2 - 3x$$

$$f'(x) = 2x - 3 \rightarrow f'(-1) = -2 - 3 = -5$$

۱۳ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |5 - x\sqrt{x}|$ مقدار $f'(1) + f'(4)$ کدام است؟

$$x=1 \rightarrow f(x) = 5 - x^{\frac{3}{2}} \rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(1) = -\frac{3}{2}$$

$$x=4 \rightarrow f(x) = -5 + x^{\frac{3}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(4) = 3$$

$$f'(1) + f'(4) = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$$

۱۴ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ مقدار $f'_+(2) - f'_-(2)$ کدام است؟

$$f(x) = x^2 + \sqrt{(x-2)^2} = x^2 + |x-2|$$

$$x^+ \rightarrow f(x) = x^2 + x - 2 \rightarrow f'(x) = 2x + 1 \rightarrow f'_+(2) = 5$$

$$x^- \rightarrow f(x) = x^2 - x + 2 \rightarrow f'(x) = 2x - 1 \rightarrow f'_-(2) = 3$$

$$f'_+(2) - f'_-(2) = 5 - 3 = 2$$

۱۵ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - \frac{x|x+1|}{x+1}$ مقدار $f'_-(-1) - f'_+(-1)$ کدام است؟

$$-1^- \rightarrow f(x) = x^2 + x \rightarrow f'_-(x) = 2x + 1 \rightarrow f'_-(-1) = -1$$

$$-1^+ \rightarrow f(x) = x^2 - x \rightarrow f'_+(x) = 2x - 1 \rightarrow f'_+(-1) = -3$$

$$f'_-(-1) - f'_+(-1) = -1 + 3 = 2$$

۱۶ اگر $f(x) = [x]|x^2 - x - 2|$ حاصل $f'_+(-2) - f'_-(2)$ کدام است؟
 $f(x) = [x]|(x-2)(x+1)|$

$$-2^+ \rightarrow f(x) = -2(x^2 - x - 1) \rightarrow f'_+(x) = -2(2x - 1) \rightarrow f'_+(-2) = 10$$

$$2^- \rightarrow f(x) = 1(-x^2 + x + 2) \rightarrow f'_-(x) = -2x + 1 \rightarrow f'_-(2) = -3$$

$$f'_+(-2) - f'_-(2) = 10 + 3 = 13$$

۱۷ در تابع $f(x) = |x - 1||x + 2|$ ، مقدار $f'(0)$ کدام است؟

$$x=0 \rightarrow f(x) = (-x+1)(x+2)$$

$$f'(x) = (-1)(x+2) + (1)(-x+1)$$

$$f'(0) = -2 + 1 = -1$$

۱۸ مشتق تابع $y = |x| + |x+1| + \dots + |x+99|$ در $x = -\frac{9}{2}$ چقدر است؟

$$y = |\underline{x}| + |\underline{x+1}| + |\underline{x+2}| + |\underline{x+3}| + |\underline{x+4}| + |x+5| + \dots + |x+99|$$

$$y = -x - x - 1 - x - 2 - x - 3 - x - 4 + x + 5 + \dots + x + 99$$

$$y = -5x + 95x + C = 90x + C$$

$$y' = 90$$

اگر $f(x) = x[2x + 1]$ مقدار $f'_+(1) - f'_-(1)$ کدام است؟

وجود ندارد

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1[3^+] = \underline{3} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1[3^-] = \underline{2} \quad f(1) = \underline{3}$$

در ادامه

$$x=1 \rightarrow f'(1) = ?$$

$$y = [x] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} y = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} y = 0 \end{cases} \quad f(1) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} y \neq f(1)$$

پس وجود ندارد

$$y = [x]/|x-1| \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} y = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} y = 0 \end{cases} \quad f(1) = 0$$

$$1^+ : y = x-1 \rightarrow y' = 1$$

$$1^- : y = 0 \rightarrow y' = 0$$

۲۰ اگر $f(x) = \sqrt{\frac{x[x]}{|1-x|}}$ باشد، آنگاه حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(2+h) - 0}{1} = f'(2^+)$$

$$2^+ \rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x-1}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$x=2 \rightarrow f'_+(2) = \frac{1}{2} \times 2 \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{1}{2}$$