

آموزش ریاضی دوازدهم تجربی

آشنایی با مفهوم مشتق

(فصل چهارم - درس اول)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$\lim_{x \rightarrow r} \frac{f(x) - f(r)}{x - r} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \frac{f'(x)}{1} = f'(r) = ?$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+h) - f(r)}{\omega h} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \frac{f'(r+h)}{\omega} = \frac{f'(r)}{\omega} = ?$$

$$y = f(u) \rightarrow y' = u' \cdot f'(u)$$

$$y = f(x'' + x) \rightarrow y' = (x'' + 1) \cdot f'(x'' + x)$$

$$y = f(\sqrt{x'' + \omega x}) \rightarrow y' = \frac{x'' + \omega}{\sqrt{x'' + \omega x}} \cdot f'(\sqrt{x'' + \omega x})$$

۱) اگر تابع f در $x = 4$ مشتق پذیر و $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = \frac{-3}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $y = \frac{f(2x)}{x}$ در $x = 2$ ، کدام است؟

$$\frac{f(4) + 7}{0} = \frac{-3}{2} \rightarrow \begin{cases} f(4) + 7 = 0 \rightarrow f(4) = -7 \\ \text{H.o.P} \quad \frac{f'(x)}{1} = f'(4) = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$y' = \frac{2f'(2x) \cdot x - f(2x)}{x^2} \quad x=2 \rightarrow y' = \frac{4f'(4) - f(4)}{4}$$

$$y' = \frac{4\left(\frac{-3}{2}\right) - (-7)}{4} = \frac{-6 + 7}{4} = \frac{1}{4}$$

۲ اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f'(x-h) - f'(x+h)}$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \text{ HSP} \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{-1 f''(x-h) - f''(x+h)} = \frac{1}{-f''(x) - f''(x)} = \frac{-1}{2 f''(x)}$$

$$y = x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow y' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \rightarrow y'' = \frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4} x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^5}} = \frac{3}{4} x \cdot \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}}$$

$$\text{جواب} = \frac{-1}{2 \left(\frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}} \right)} = \frac{-4x^{\frac{5}{2}}}{6}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۴۳۸۹

۳ اگر $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$ برابر $\frac{1}{2}$ باشد، مشتق $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$ در $x = -\frac{1}{2}$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{H\&O} \frac{f'(x)}{1} = f'(-2) = \frac{1}{2}$$

$$y' = \frac{-1}{x^2} \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x = -\frac{1}{2}} y' = -4x f'(-2)$$

$$y' = -4\left(\frac{1}{2}\right) = -2$$

۴ اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(3) - f(x)}{x - 3}$ برابر ۴ باشد، مشتق تابع $g(x) = f\left(\frac{3}{x}\right)$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{0 - f'(x)}{1} = -f'(3) = 4 \rightarrow \boxed{f'(3) = -4}$$

$$y' = \frac{-3}{x^2} \cdot f'\left(\frac{3}{x}\right) \xrightarrow{x=1} y' = -3 f'(3)$$

$$y' = -3(-4) = 12$$

۵ اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{2}$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ ، آن گاه $(f \circ g)'$ در $x = 0$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{H.o.P} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{1} = f'(1) = \frac{3}{2}$$

$$y = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x) \cdot f'(g(x)) \xrightarrow{x=0} y' = g'(0) \cdot f'(g(0))$$

$$g(x) = \sqrt{x+1} \rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \rightarrow \begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y' = \frac{1}{2} \times f'(1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

۶ اگر تابع f در $x = -2$ مشتق پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $y = x^2 f(x)$ در $x = -2$ کدام است؟

$$\frac{f(-2) + 3}{0} = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} f(-2) + 3 = 0 & \rightarrow f(-2) = -3 \\ \frac{f'(-2+h)}{1} = f'(-2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y' = 2x f(x) + x^2 f'(x) \xrightarrow{x=-2} y' = -4 f(-2) + 4 f'(-2)$$

$$y' = -4(-3) + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 12 + 2 = 14$$

اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -\frac{2}{3}$ ، مقدار مشتق $y = f(\sqrt{1-3x})$ به ازای $x = -1$ کدام است؟ ۷

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(2+h)}{1} = f'(2) = -\frac{2}{3}$$

$$y' = \frac{-3}{2\sqrt{1-3x}} \cdot f'(\sqrt{1-3x}) \xrightarrow{x=-1} y' = \frac{-3}{4} \cdot f'(2)$$

$$y' = \frac{-3}{4} \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

۸ اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{6 - 2x} = 3$ باشد، مقدار مشتق $f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$ به ازای $x = 4$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{H.o.P} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{-2} = \frac{f'(3)}{-2} = 3 \rightarrow f'(3) = -6$$

$$y' = \frac{-2-1}{(x-1)^2} \cdot f'\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) \xrightarrow{x=4} y' = \frac{-3}{9} f'(3)$$

$$\rightarrow y' = \frac{-1}{3} (-6) = 2$$

۹ اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{-h} = 2$ مقدار مشتق تابع $f(x^2 + x)$ در $x = 1$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{H \circ P} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f'(2+3h) - 0}{-1} = -3f'(2) = 2 \rightarrow f'(2) = -\frac{2}{3}$$

$$y' = (1x+1) \cdot f'(x^2+x) \xrightarrow{x=1} y' = 3f'(2)$$

$$y' = 3 \left(-\frac{2}{3} \right) = -2$$

۱۰ اگر $g(x) = x + \sqrt{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3}$ باشد، $(f \circ g)'(1)$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{H\&P} \frac{f'(x)}{1} = f'(2) = \frac{4}{3} \quad / \quad g'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x) \cdot f'(g(x)) \xrightarrow{x=1} y' = g'(1) \cdot f'(g(1))$$

$$\rightarrow y' = \frac{4}{3} \times f'(2) = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$$

(11) خط به معادله $y = 3x - 5$ در نقطه $x = 2$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3}$ باشد، $(f \circ g)'(2)$

$$g(2) = 1 \rightarrow g'(2) = 3$$

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{2} = \frac{f'(1)}{2} = \frac{2}{3} \rightarrow f'(1) = \frac{4}{3}$$

$$y = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x) \cdot f'(g(x)) \xrightarrow{x=2} y' = g'(2) \cdot f'(g(2))$$

$$y' = 3 \cdot f'(1) = 3 \left(\frac{4}{3} \right) = 4$$

۱۲) در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^3$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ ، کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{H\&O} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{1} = f'(2) = ?$$

$$y' = \frac{3}{2} y \left(\frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x-3} \right) \xrightarrow{x=2} y' = \frac{3}{2} \times 1 \left(\frac{1}{4} - 2 \right)$$

$$y = f(x) = \left(\sqrt{\frac{x}{1}} \right)^3 = x^{\frac{3}{2}} = 1$$

$$\rightarrow y' = -\frac{21}{4}$$

۱۳ اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-2h)}{h} = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$ مقدار $f'(2)$ کدام است؟

$\frac{0}{0} \xrightarrow{H.o.P} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) + 2f'(x-2h)}{1} = 3f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$

$\rightarrow f'(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2+5}} \rightarrow f'(2) = \frac{2}{3 \times 3} = \frac{2}{9}$

۱۴ اگر $f(x) = \sqrt[3]{5x+3}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{1} = f'(1) = ?$$

$$y' = \frac{5}{3 \sqrt[3]{(5x+3)^2}} \xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{5}{3 \times 4} = \frac{5}{12}$$

۱۵ اگر $f(x) = \frac{3x-3}{\sqrt{2x+1}}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \frac{f'(4+h)}{1} = f'(4) = ?$$

$$y' = y \left(\frac{u}{u^2 - 3} - \frac{1}{u} \left(\frac{u}{2u+1} \right) \right) \xrightarrow{x=4} y' = 3 \left(\frac{3}{9} - \frac{1}{9} \right) = \frac{2}{3}$$

$$y = f(4) = \frac{12-3}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

اگر تابع f بر روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+3) - 4}{h} = 5$ ، مشتق تابع $y = \frac{\sqrt{f(x)}}{x}$ در نقطه $x = 3$ کدام است؟

$\frac{f(3) - 4}{0} = 5 \rightarrow \begin{cases} f(3) - 4 = 0 \rightarrow f(3) = 4 \\ \text{H.o.P.} \rightarrow \frac{f'(h+3)}{1} = f'(3) = 5 \end{cases}$

$y' = \frac{\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \cdot x - \sqrt{f(x)}}{x^2} \xrightarrow{x=3} y' = \frac{\frac{5 \times 3}{2 \times 2} - 2}{9} = \frac{7}{18}$

۱۷) تابع f مشتق پذیر است. اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 2}{x - 2} = \frac{1}{2}$ باشد، معادله‌ی خط مماس بر تابع $y = x f(\sqrt{x})$ در نقطه‌ای به طول $x = 4$ واقع بر آن کدام است؟

$$\frac{f(2) + 2}{0} = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} f(2) + 2 = 0 \rightarrow f(2) = -2 \\ \text{HOP} \rightarrow \frac{f'(x)}{1} = f'(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y' = 1 \times f(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f'(\sqrt{x}) \cdot \underline{x}$$

$$\begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = 4 f(2) = -8 \\ m = f(2) + f'(2) = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y + 8 = \frac{-3}{2} (x - 4)$$

$$2y + 16 = -3x + 12$$

$$\rightarrow \underline{3x + 2y + 4 = 0} \quad \checkmark$$

۱۸ در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+h)}{1} = f'(1) = ?$$

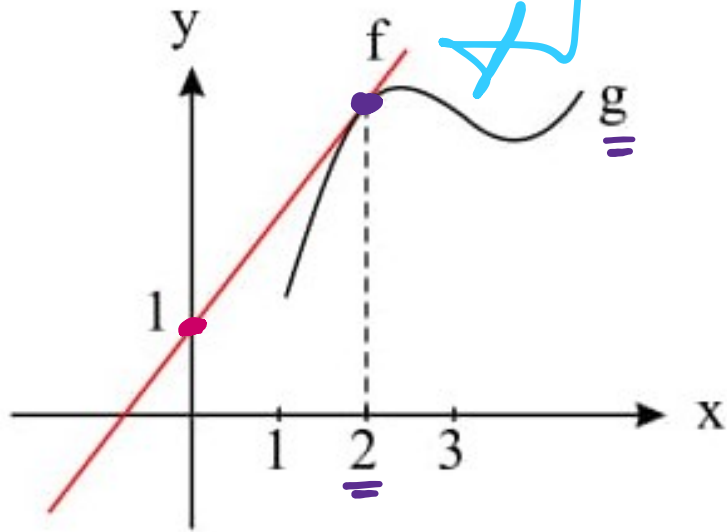
$$y' = \frac{1}{y} \left(\frac{4}{4x+5} - \frac{1}{x+3} \right) \xrightarrow{x=1} y' = \frac{1}{y} \times \frac{1}{4} \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{41}$$

$$y = f(1) = \sqrt{\frac{4+5}{1+3}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

۱۹ در شکل زیر اگر داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x) - f(2)}{x - 1} = 4$ آنگاه حاصل $f(1) + g'(2)$ چقدر است؟

$$= 3 + 2 = 5$$



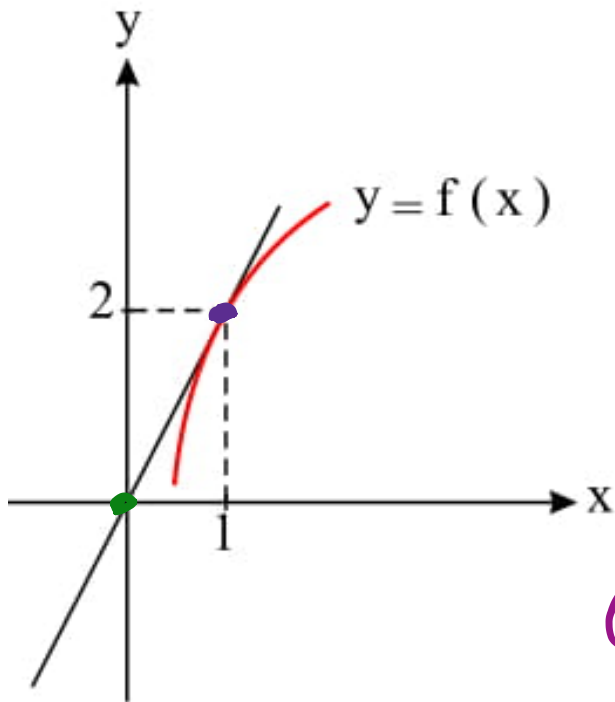
$$\frac{0}{0} \text{ HOP} \rightarrow \frac{2f'(2x)}{1} = 2f'(2) = 4 \rightarrow f'(2) = 2$$

$$\rightarrow f'(2) = g'(2) = 2$$

$$y = ax + b \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2ax + b - 2a - b}{x - 1} = 4 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2$$

$$\rightarrow y = 2x + b \xrightarrow[x=1]{x=0} b = 1 \rightarrow f(x) = 2x + 1$$

۲۰ اگر خط مماس بر نمودار تابع f در $x = 1$ به صورت زیر باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h}$ کدام است؟



$$\frac{0}{0} \xrightarrow{H.O.P} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f'(1-h)}{1} = -f'(1) = ?$$

$$A / \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad B / \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \rightarrow m_{AB} = \frac{2}{1} = 2 \quad \checkmark$$

$$\text{مماس} \rightarrow f'(1) = m_{AB} = 2 \quad \checkmark$$

$$\rightarrow -f'(1) = -(2) = -2$$