

آموزش ریاضی دوازدهم تجربی

حل تمرین های فصل چهارم

(مشتق)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۱ اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

$$f'(x) = 6x - 2 \rightarrow f'(2) = 10$$

$$x_0 = 2 \quad y_0 = 9 \quad m = 10$$

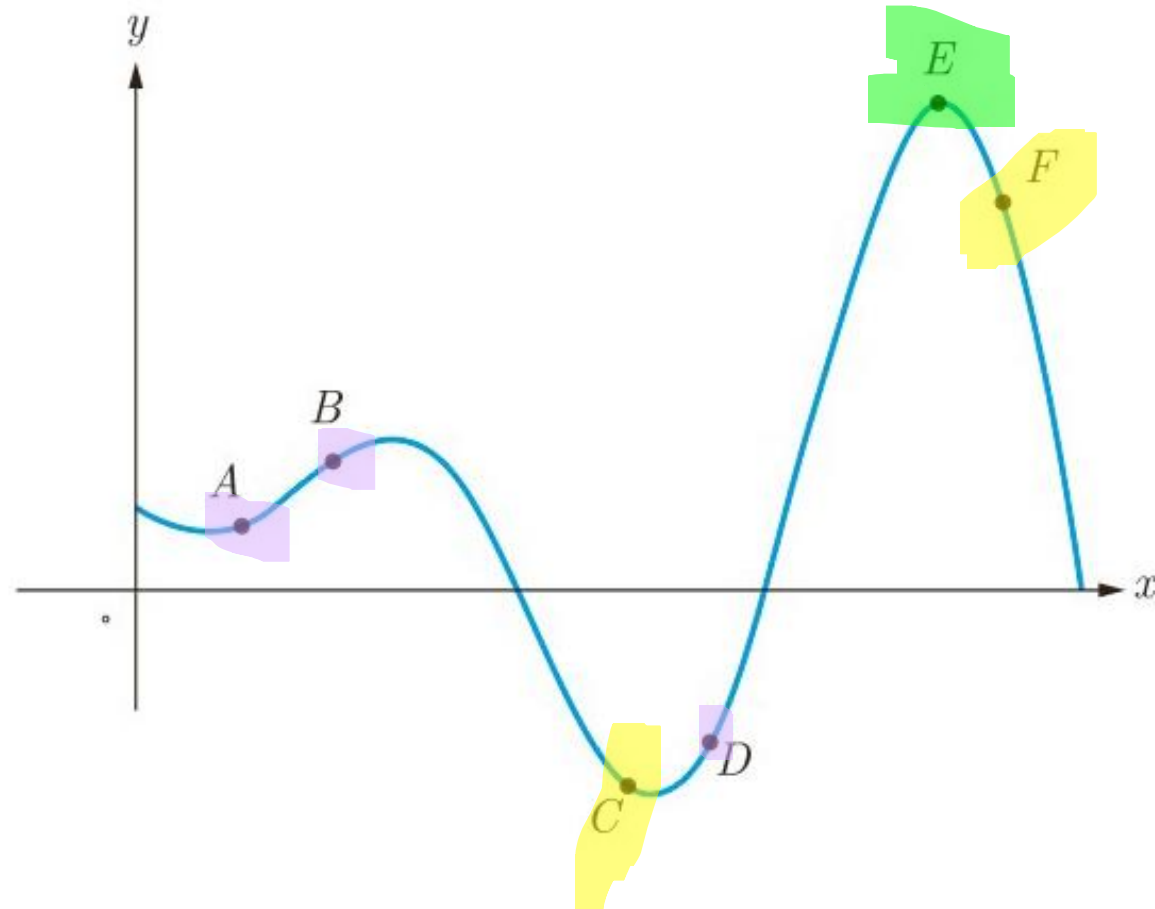
$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 9 = 10(x - 2)$$

$$y - 9 = 10x - 20 \rightarrow y = 10x - 11$$

نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

۲

شیب	نقطه
-۳	F
-۱	C
۰	E
-۱/۲	A
-۱	B
۲	D

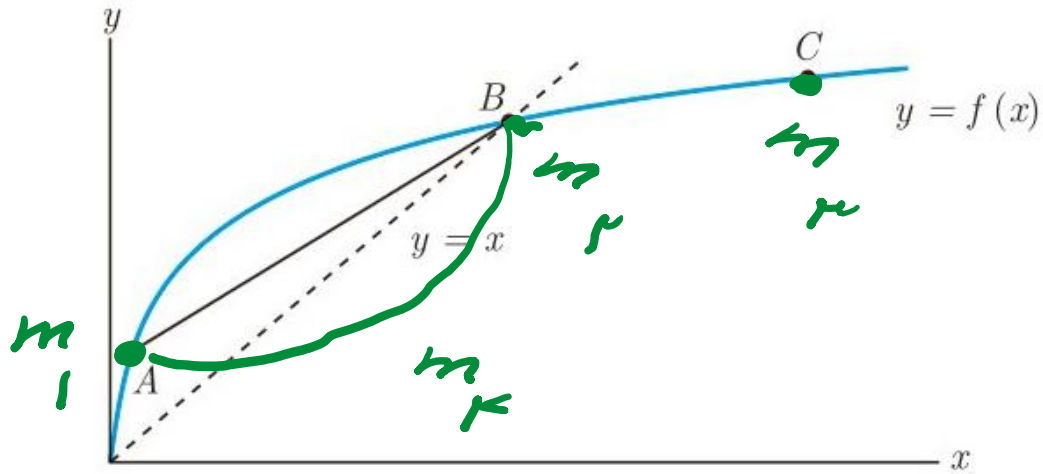


ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۳ برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف»

تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A

ب) شیب نمودار در نقطه B

پ) شیب نمودار در نقطه C

ت) شیب خط AB

ث) شیب خط $y=2$

ج) شیب خط $y=x$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب $m_1, m_2, \dots, m_6$

در نظر بگیرید.

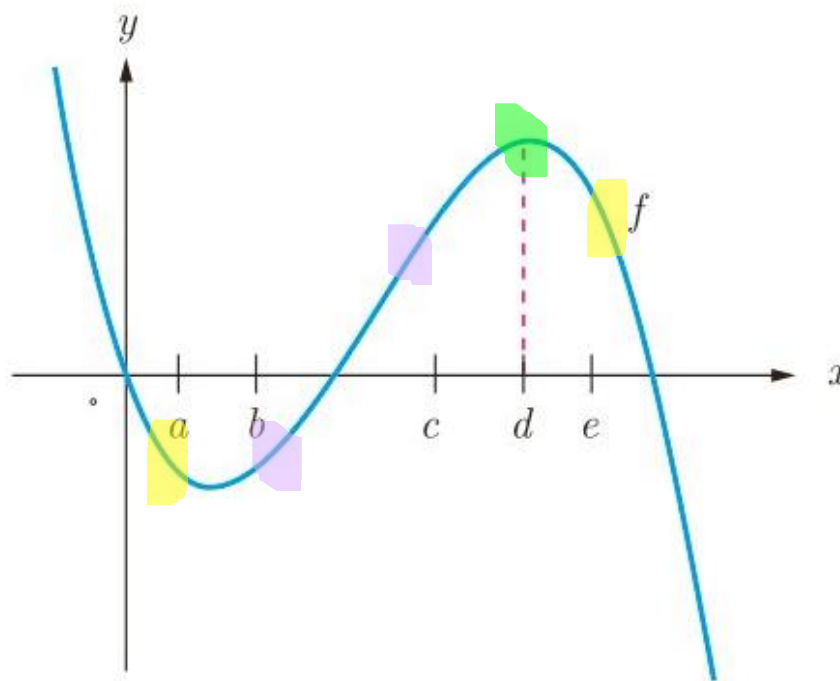
$$m_1 > m_6 > m_4 > m_2 > m_3 > m_5$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
d	0
b	$0/5$
c	2
a	$-0/5$
f	-2



۵) نقاطی مانند A, B, C, D, E, F و G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که :

الف) A ، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

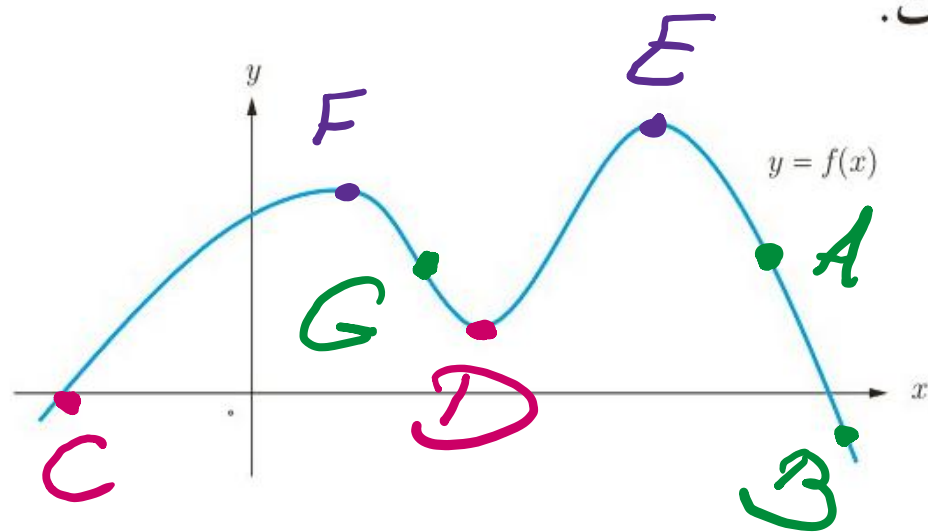
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

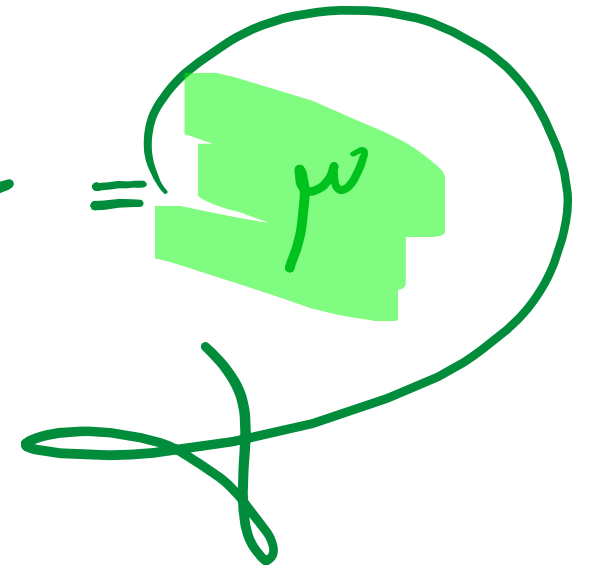
ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



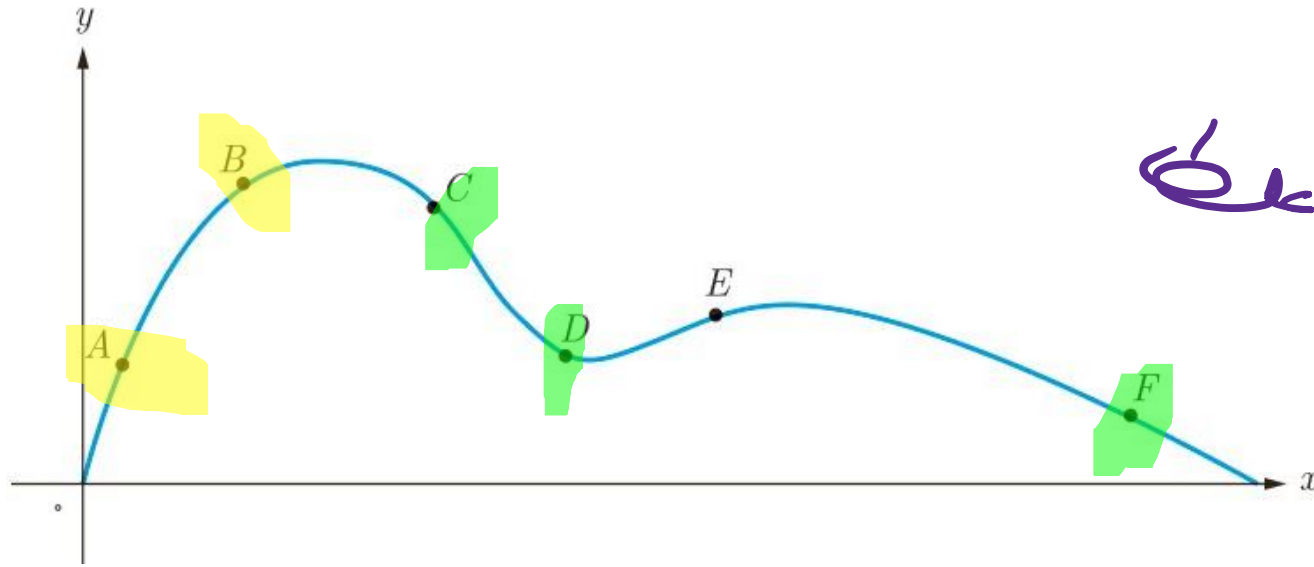
۶ اگر $f(x) = x^3 - 2$ ، $f'(-1)$ را به دست آورید.

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2) - (-3)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x+1}$$



۷ نقاط F, E, D, C, B, A را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک نادرست است؟



الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است. **نقطه**

ب) $m_A < m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A نمایش داده‌ایم)

پ) $m_E < m_B < m_A$ **درست**

ت) شیب منحنی در نقاط C و D, F منفی است. **درست**

ث) $m_F < m_D < m_C$ **نقطه** $m_F > m_D$

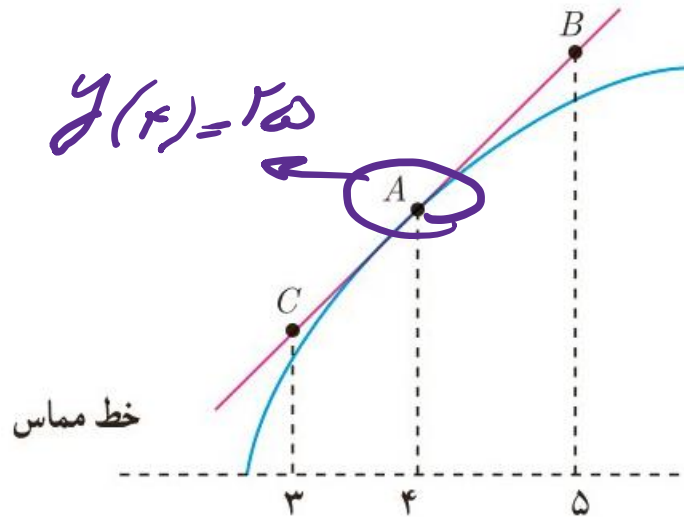
ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$

درست

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۸ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$ با توجه به شکل مختصات نقاط A , B و C را بیابید.



$$m_{AC} = \frac{25 - y_C}{4 - 3} = 1/5 \rightarrow y_C = 23/5$$

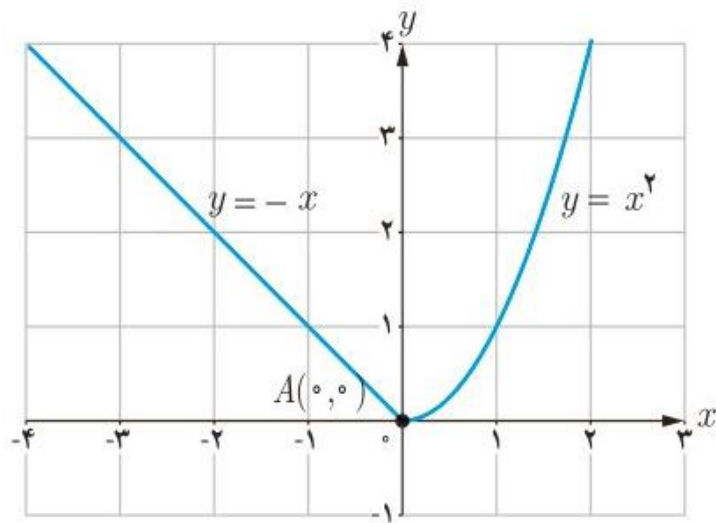
$$m_{AB} = \frac{y_A - 25}{5 - 4} = 1/5 \rightarrow y_A = 25/5$$

۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x = 2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشند.

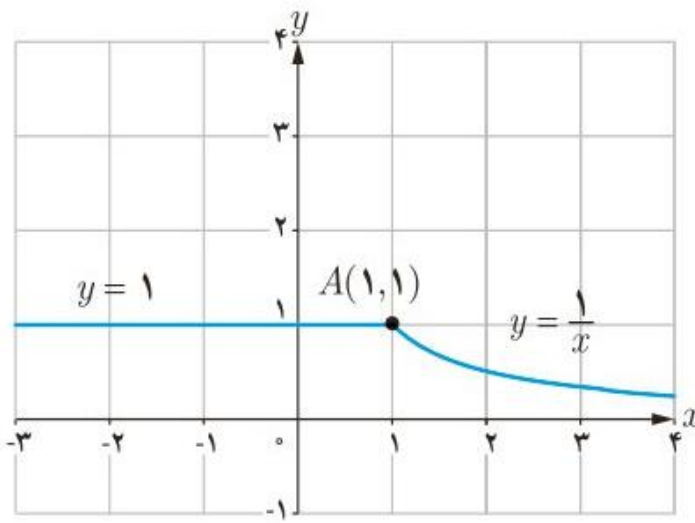
$$f(x) = |x - 2|$$

$$g(x) = |x(x - 2)| \quad g(x) = 2/|x - 2|$$

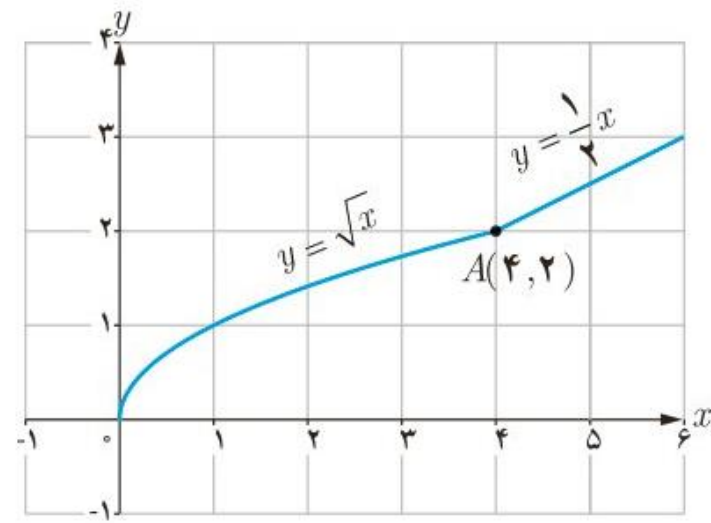
با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق پذیر نیستند.



(الف)



(ب)



(پ)

$$\begin{aligned}
 f'_+(x) = 2x &\rightarrow f'_+(0) = 0 & f'_+(x) = \frac{-1}{x^2} &\rightarrow f'_+(1) = -1 & f'_+(x) = \frac{1}{x} &\rightarrow f'_+(4) = \frac{1}{4} \\
 f'_-(x) = -1 &\rightarrow f'_-(0) = -1 & f'_-(x) = 0 &\rightarrow f'_-(1) = 0 & f'_-(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} &\rightarrow f'_-(4) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

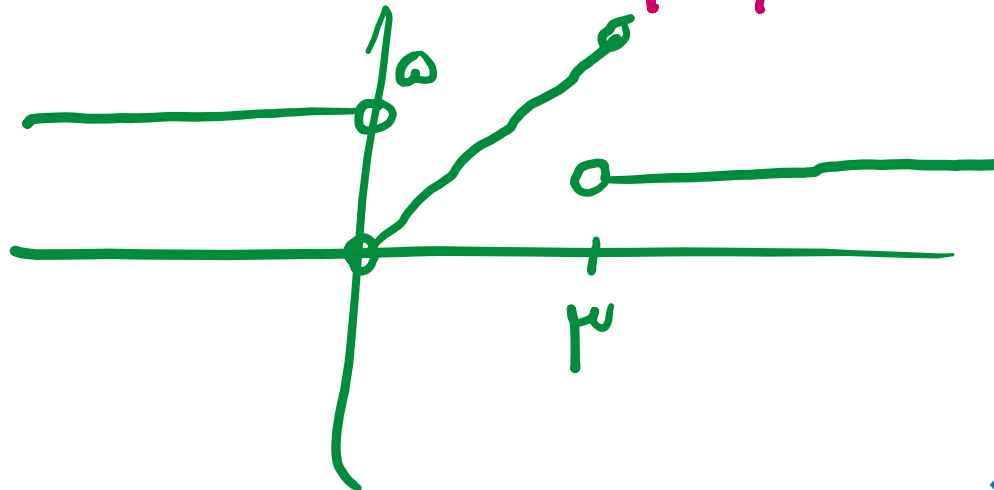
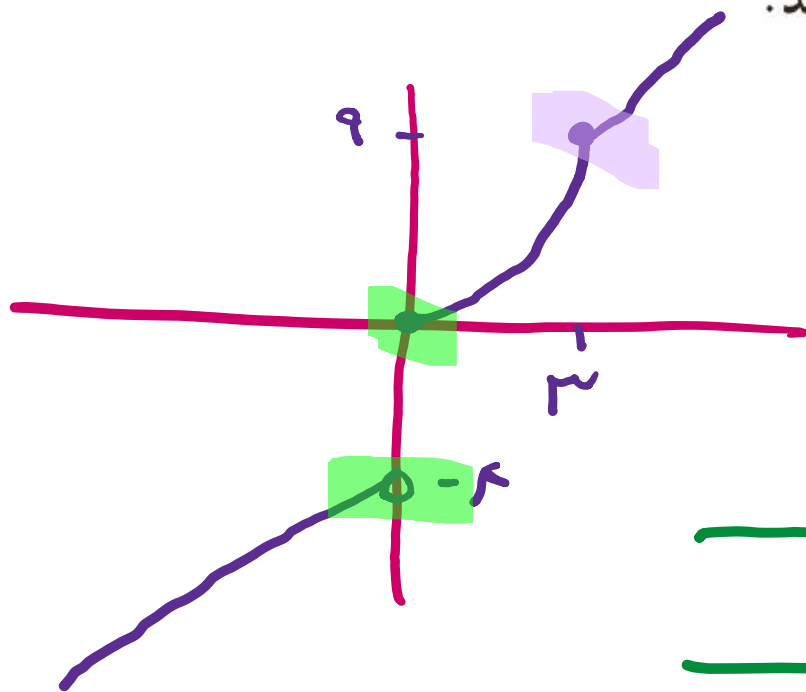
۳ تابع $f(x) = \begin{cases} 5x - 4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x + 6 & x > 3 \end{cases}$ داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.
 ب) با توجه به نمودار تابع f بگویید که چرا $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند؟
 ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$



ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

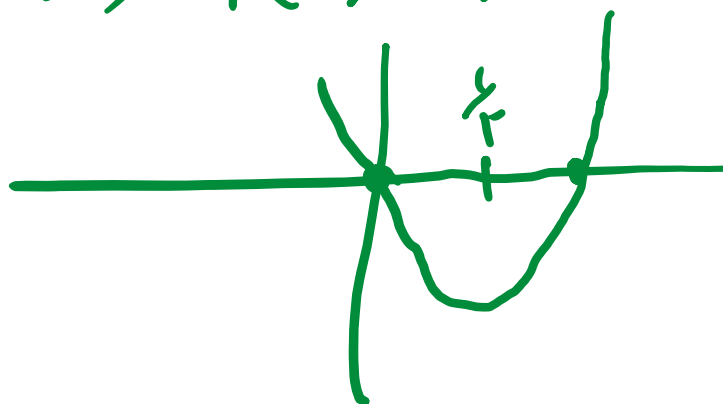
(الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

(پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

(ث) در تمام نقاط منفی باشد.

ب) $f(x) = x^2 - x \rightarrow f'(x) = 2x - 1$

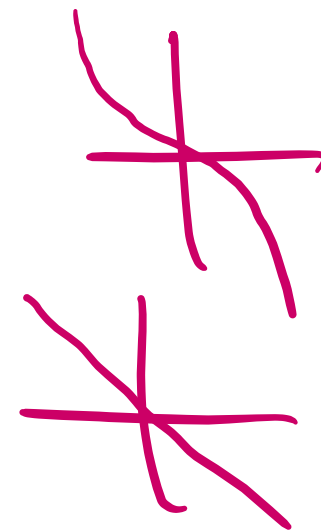
$f'(x) = 2$



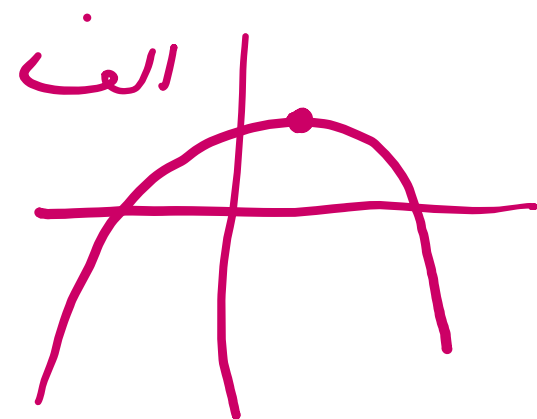
و)

$y = -x^3$

$y = -x$



ج)

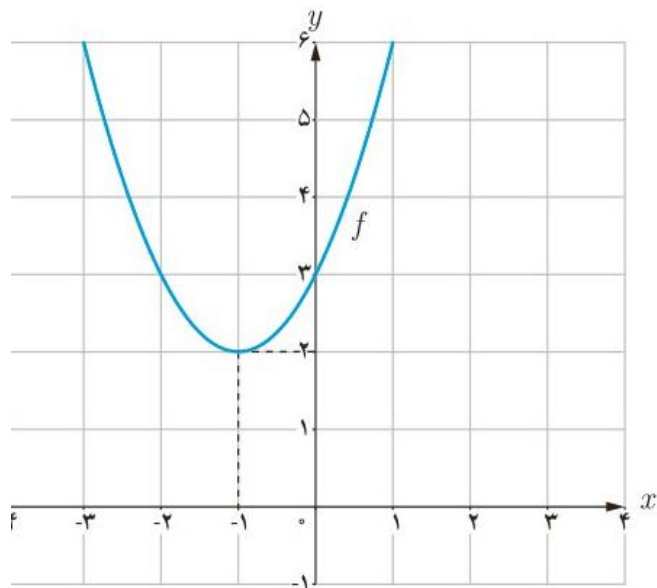


د) $y = x^3$



(ب) در $x = 2$ برابر ۳ شود.

(ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

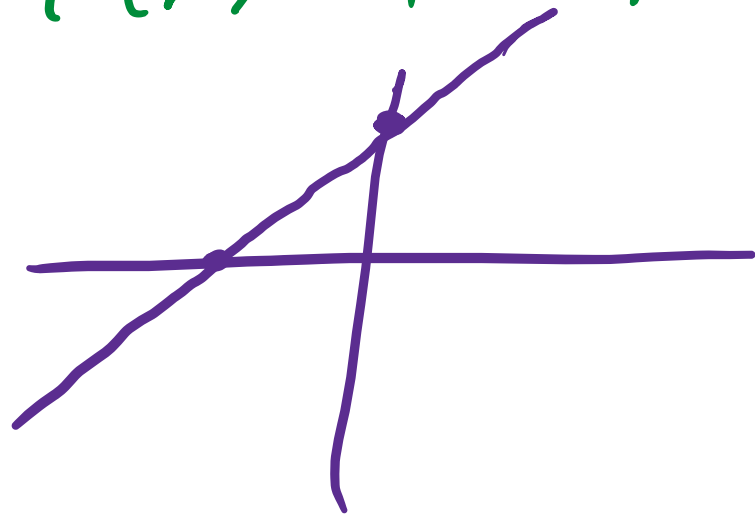


الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.
 $f'(3)$ و $f'(-1)$ و $f'(0)$ و $f'(2)$

ب) صحت ادعای خود در الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ بررسی کنید.
 پ) تابع مشتق را رسم کنید.

$$f'(3) > f'(2) > f'(0) > f'(-1)$$

$$f'(x) = 2x + 2 \rightarrow f'(3) = 8$$



$$f'(2) = 6$$

$$f'(0) = 2$$

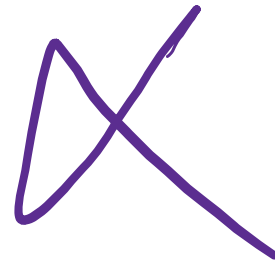
$$f'(-1) = 0$$

۶ مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

$$f(1) = 4$$



۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

$$f(x) = 1x$$

$$g(x) = 1x + 1$$

$$h(x) = 1x - 1$$

اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری f را در نقاط به طول های ۲ و -۲ بررسی کنید.

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 4|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 2 \quad X$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -2$$

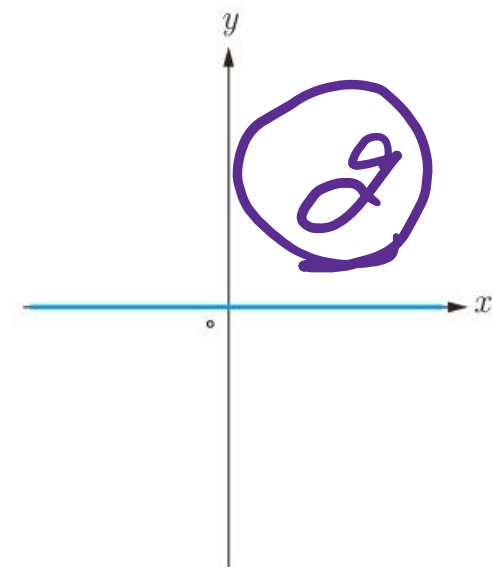
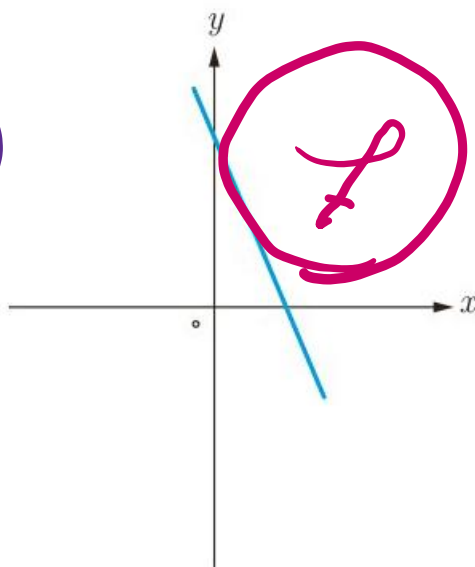
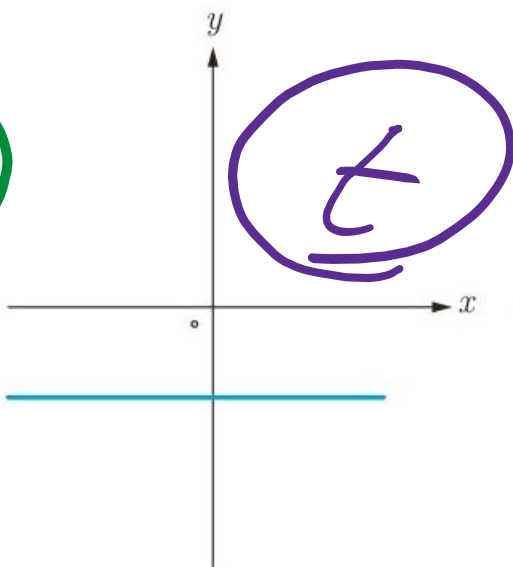
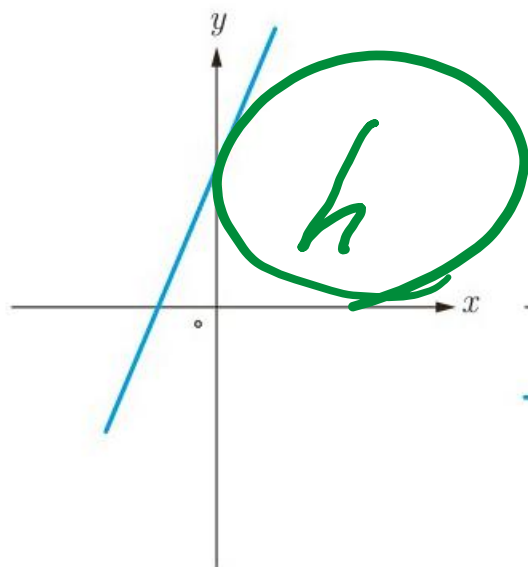
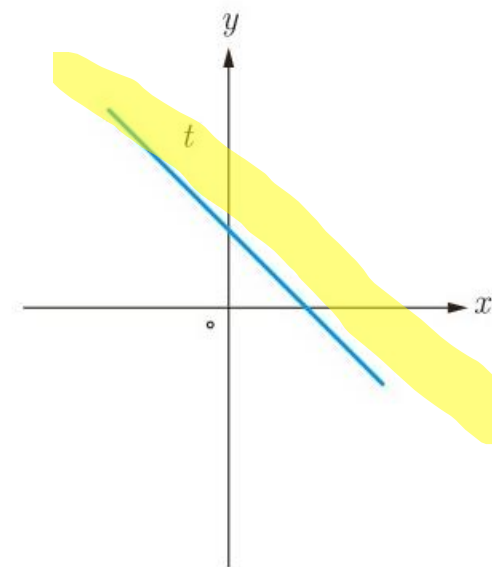
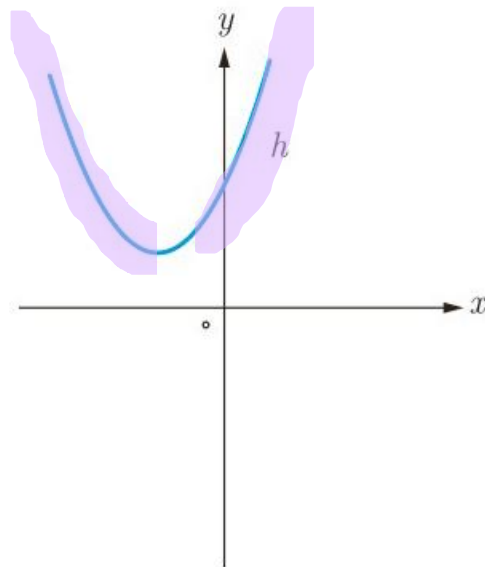
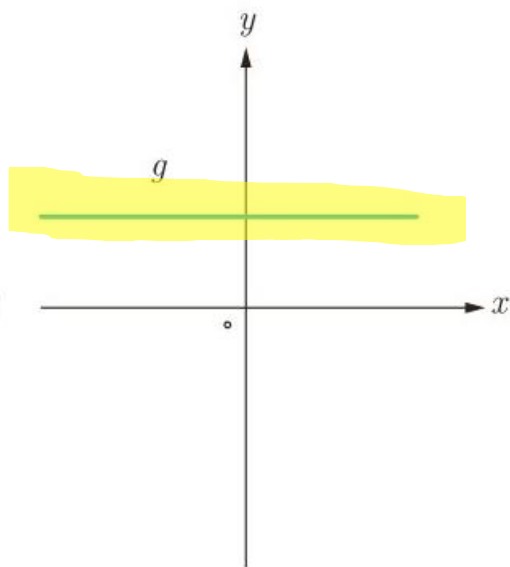
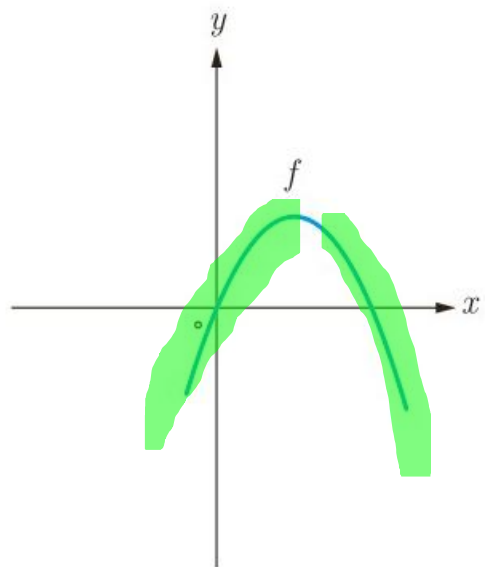
$$f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x^2 - 4|}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-(x+2)(x-2)}{x+2} = -2 \quad X$$

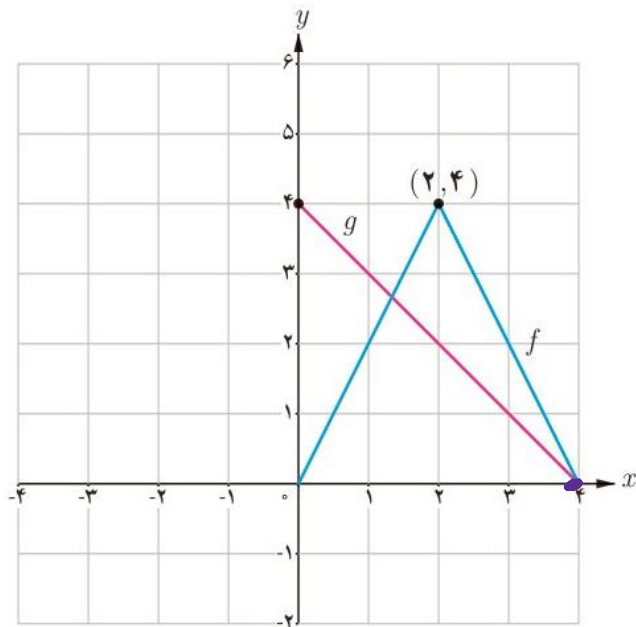
$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x^2 - 4|}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = 2$$

۹ مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ را به دست آورده و مشخص کنید در چه نقطه‌ای مماس قائم دارد؟

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \rightarrow x = 0$$





۱۱ نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

الف) اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ ، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است $k'(1)$ ، $k'(2)$ و $k'(3)$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 2 \\ -2x + 4 & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 2$$

$$2 < x \leq 4 \quad g = -x + 4$$

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

$$h'(1) = f'(1) \cdot g(1) + g'(1) \cdot f(1) = 2 \times 3 + (-1) \times 2 = 6 - 2 = 4$$

$$h'(2) = f'(2) \cdot g(2) + g'(2) \cdot f(2) = \text{X} = -2$$

$$h'(3) = f'(3) \cdot g(3) + g'(3) \cdot f(3) = (-2)(1) + (-1)(2)$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

$$K'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^r}$$

$$K'(1) = \frac{1}{9}$$

$$K'(r) = X$$

$$K'(r) = 0$$

۱۲ اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است، $(f + g)'(1)$ و $(3f + 2g)'(1)$

$$f'(1) + g'(1) = 3 + 5 = 8$$

$$3f'(1) + 2g'(1) = 3(3) + 2(5) = 19$$

۱۳ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

$$x < 0$$

$$x > 0$$

$$f'_+(0) = 1 \neq f'_-(0) = 0$$

مشتق توابع داده شده را به دست آورید.

پ) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3+1)$

الف) $f(x) = (3x^2-4)(2x-5)^3$

$$f'(x) = 9x(2x-5)^3 + 3(2x-5)^2(2)(3x^2-4)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^3+1) + 3x^2 \cdot \sqrt{3x+2}$$

ب) $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{-3x+2}$

ت) $f(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(-3x+2) - (-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{9(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2}$$

۱۵ اگر $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x$ ، مقدار $f''(-1)$ را به دست آورید.

$$f'(x) = 15x^2 - 8x - 3$$

$$f''(x) = 30x - 8$$

$$\rightarrow f''(-1) = -30 - 8 = -38$$

۱ جدول زیر درجه حرارت T (سائتی گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.

پ) پاسخ ها را تفسیر کنید.

$$\text{الف) متوسط} = \frac{19 - 11}{12 - 8} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\text{ب) متوسط} = \frac{9 - 19}{18 - 12} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3}$$

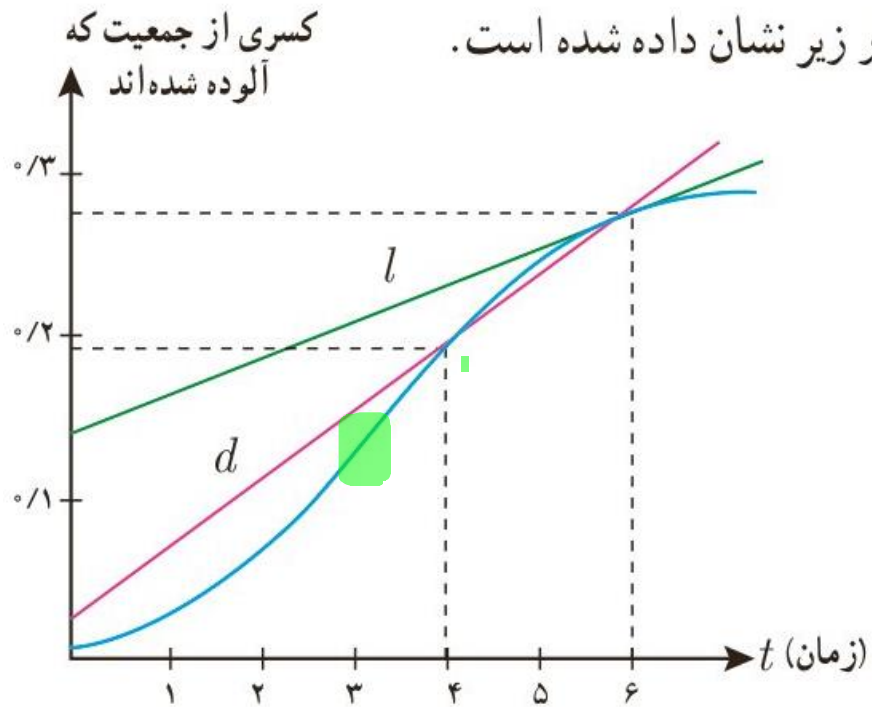
ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار زیر نشان داده شده است.
 الف) شیب‌های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می‌دهند.

ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ یا $t=3$ بیشتر است؟

پ) قسمت ب را برای $t=4$ ، $t=5$ و $t=6$ بررسی کنید.



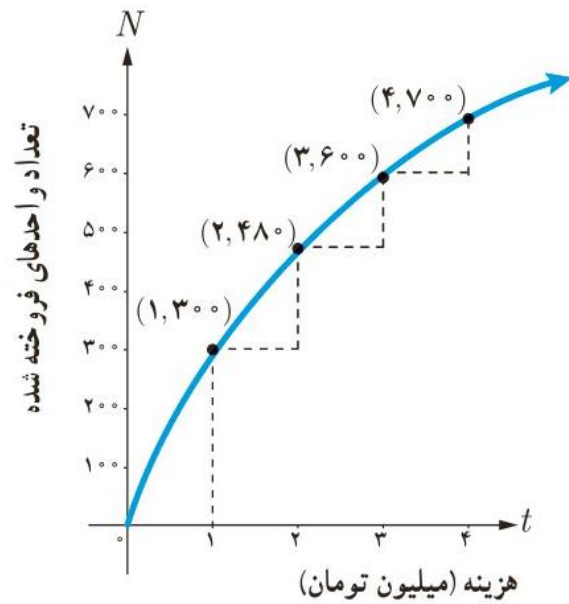
الف) شیب خط l و خط مماس در $t=3$

ب) $m_3 > m_2 > m_1$

ج) $m_4 > m_5 > m_6$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۳ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N بر حسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

الف) ① $300 - 0 = 300$

② $480 - 300 = 180$

③ $600 - 480 = 120$

④ $700 - 600 = 100$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۴ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 1$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ t (بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

$$\text{متوسط} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{10 - 1}{5} = 2$$

$$f'(t) = 2t - 1 = 2 \rightarrow t = \frac{3}{2}$$

t	ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$	متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

۵) تویی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می شود.
 $f(t)$ نشان دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است.
 برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول روبه رو نمایش داده شده است.

بر اساس جدول کدام یک از مقادیر زیر می تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

ت) $۱۶/۰۳ \text{ m/s}$

پ) $۱۱/۵ \text{ m/s}$

ب) $۱۴/۹۱ \text{ m/s}$

الف) $۱/۲۳ \text{ m/s}$

$$\frac{f(0,3) - f(0,2)}{0,3 - 0,2} = \frac{16,3 - 15,1}{0,1} = 12$$

$$\frac{f(0,5) - f(0,4)}{0,5 - 0,4} = \frac{17,2 - 16,3}{0,1} = 11$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۶ کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است :

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0, 1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است. ^{نکته}

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است. ^{نکته}

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a) = 0$ و هم $f(a) = 0$ ^{نکته}

$$[0, 1] \quad f(x) = x^2 \quad \text{(الف)}$$

$$\text{ب) } f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{پ) } f(x) = x^3 \quad x=0$$

۷ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

$$\text{الف) } \frac{m(4) - m(3)}{4 - 3} = \sqrt{4}, 3$$

$$\text{ب) } m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \rightarrow m'(3) = 54, 29$$

۸ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$ به دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می‌شود؟

$$\text{متوسط (الف)} = \frac{V(1) - V(0)}{1 - 0} = 40 \left(1 - \frac{1}{100}\right)^2 - 40 = -0.1796$$

$$\text{متوسط (ب)} = \frac{V(100) - V(0)}{100 - 0} = \frac{0 - 40}{100} = \frac{-40}{100}$$

$$V' = 40 \left(1 - \frac{t}{100}\right) \left(\frac{-1}{100}\right) = \frac{-40}{100} \rightarrow t = 100$$

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.