

آموزش ریاضی یازدهم تجربی

هندسه تحلیلی

(فصل اول - درس اول)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

محاسبه شیب خط با استفاده از دو نقطه

$$A \begin{array}{l} x_A \\ y_A \end{array} \quad B \begin{array}{l} x_B \\ y_B \end{array}$$

$$\rightarrow m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

محاسبه شیب خط با معادله

$$y = ax + b \rightarrow m = a$$

$$ay = px + q \xrightarrow{\div a} y = \frac{p}{a}x + \frac{q}{a} \rightarrow m = \frac{p}{a}$$

$$ax + by + c = 0 \rightarrow m = -\frac{a}{b}$$

$$px + ky = 10 \rightarrow m = -\frac{p}{k}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_0 = \checkmark \\ y_0 = \checkmark \\ m = \text{شیب} \end{cases}$$

رابطه بین دو خط موازی و عمود

موازی $m_1 = m_2$

عمود $m_1 \cdot m_2 = -1$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} & \text{متوازی} \\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} & \text{عمود} \end{cases}$$

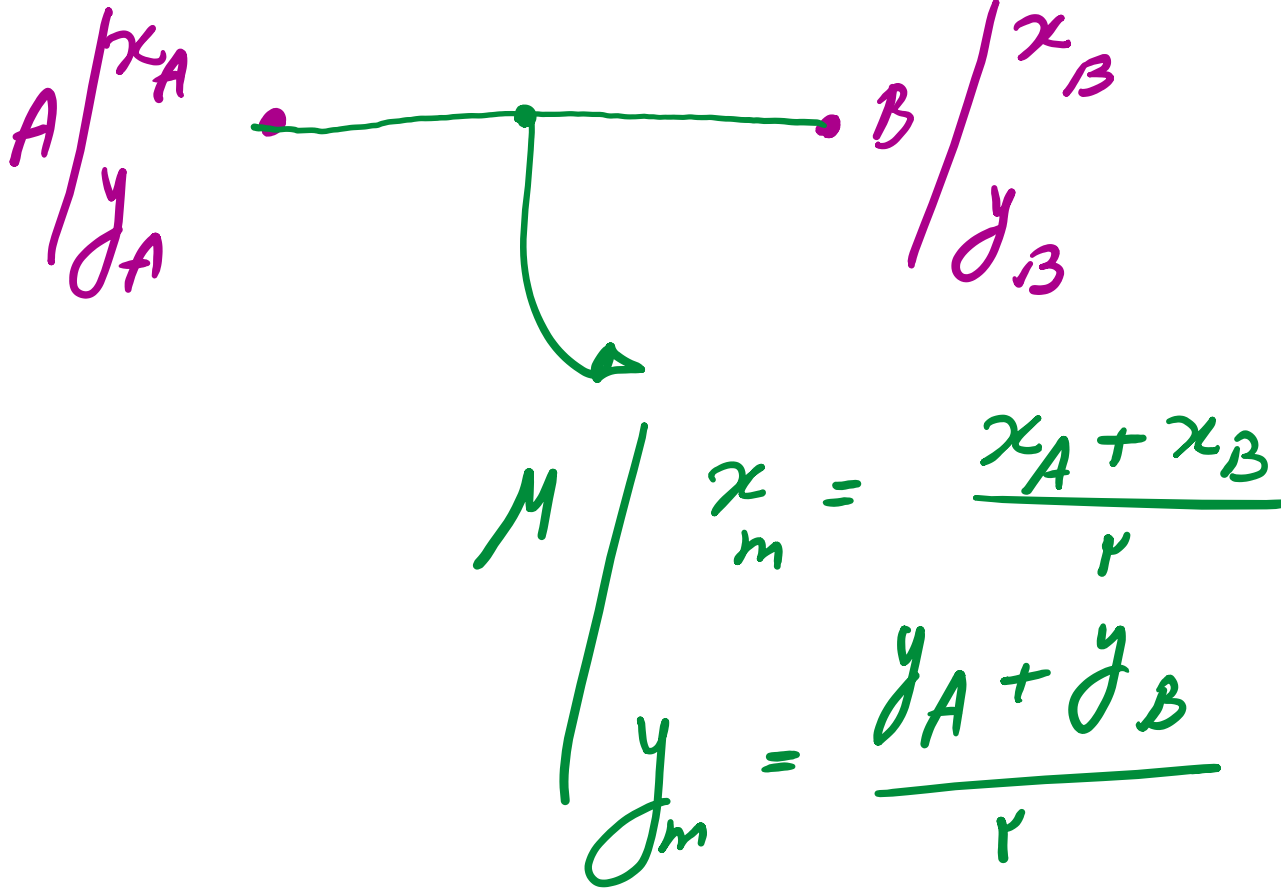
محاسبه فاصله دو نقطه

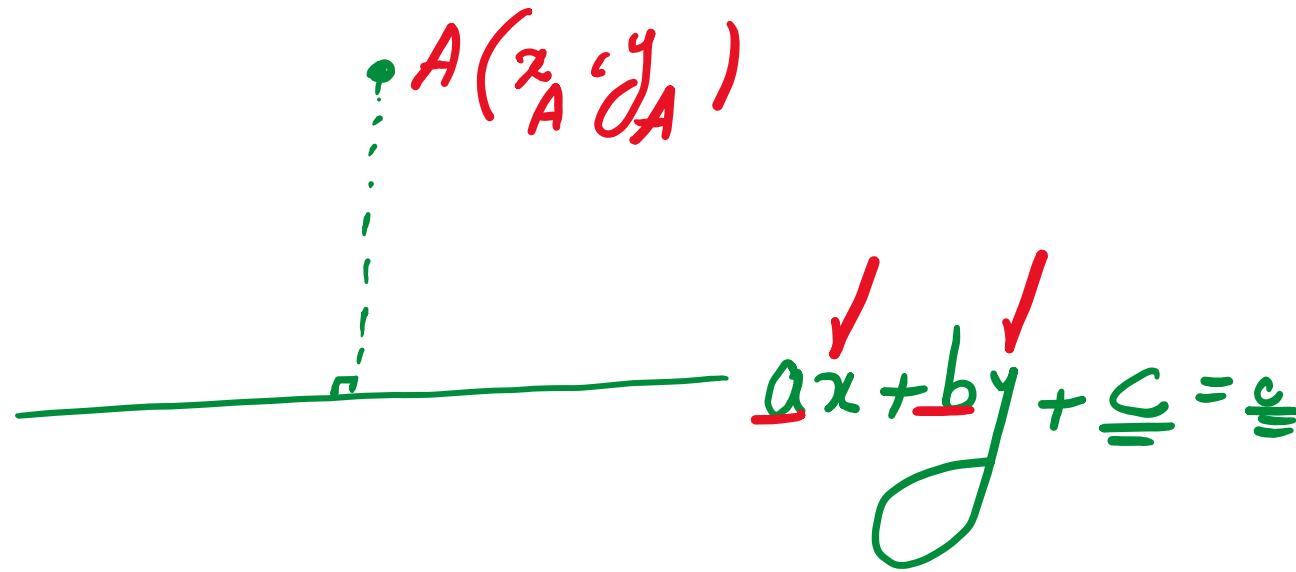
$$A \begin{array}{l} x_A \\ y_A \end{array}$$

$$B \begin{array}{l} x_B \\ y_B \end{array}$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

محاسبه مختصات نقطه وسط پاره خط





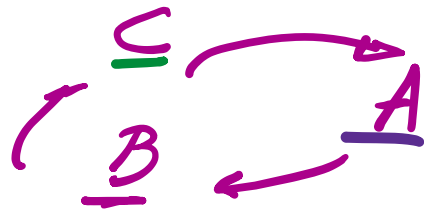
$$L = \frac{|a \cdot x_A + b \cdot y_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

محاسبه فاصله دو خط موازی

$$\begin{aligned} \underline{ax + by} &= c_1 \\ \underline{ax + by} &= c_2 \end{aligned} \rightarrow L = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 1 \\ 4x + 1y &= 2 \\ 4x + 1y &= 5 \end{aligned} \rightarrow L = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}$$

محاسبه مساحت مثلث با استفاده از سه راس

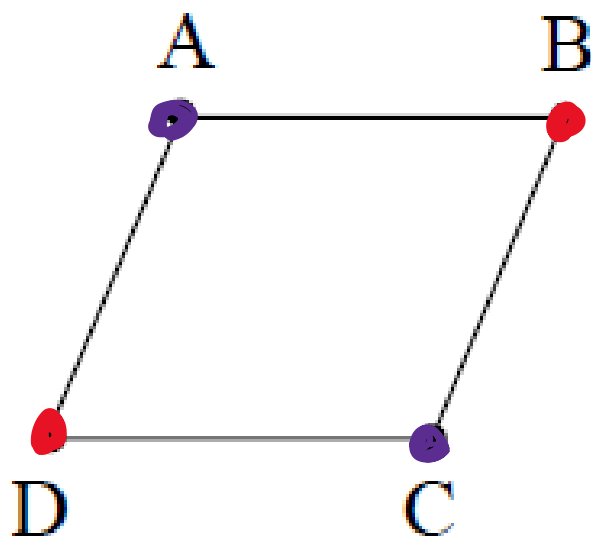


$$\underline{A} \left| \begin{array}{c} X_A \\ Y_A \end{array} \right.$$

$$\underline{B} \left| \begin{array}{c} X_B \\ Y_B \end{array} \right.$$

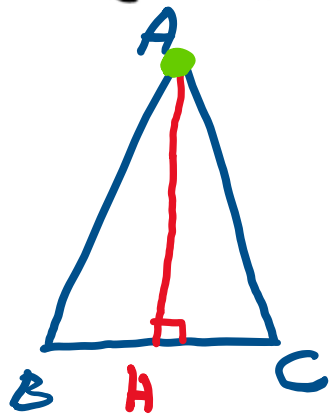
$$\underline{C} \left| \begin{array}{c} X_C \\ Y_C \end{array} \right.$$

$$S = \frac{1}{2} \left| x_A (y_B - y_C) + x_B (y_C - y_A) + x_C (y_A - y_B) \right| \quad \#$$



$$\begin{cases} \underline{x_A} + \underline{x_C} = \underline{x_B} + \underline{x_D} \\ \underline{y_A} + \underline{y_C} = \underline{y_B} + \underline{y_D} \end{cases}$$

سه ضلع مثلثی به معادلات $BC: 2y + 3x = 6$, $AC: y - 2x = 5$, $AB: 2y - x = 3$ هستند. معادله‌ی ارتفاع AH (1)



$$\begin{cases} x_0 = -\frac{1}{3} \\ y_0 = \frac{1}{3} \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \left(x + \frac{1}{3} \right)$$

$$\xrightarrow{\times 9} 9y - 3 = 4x + 12$$

$$9y - 4x = 15$$

$$m_{BC} = -\frac{2}{3} \rightarrow m_{AH} = +\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} (-1) \downarrow y - 2x = 5 \\ 2y - x = 3 \end{cases}$$

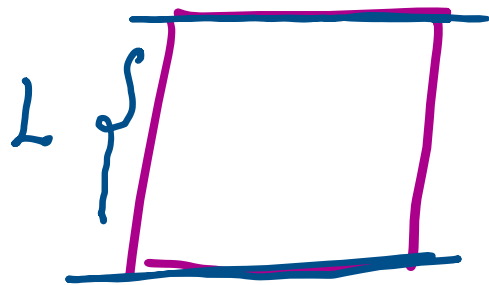
$$\begin{cases} \downarrow -2y + 1x = -10 \\ 2y - x = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow 3x = -7 \rightarrow x = -\frac{7}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}$$

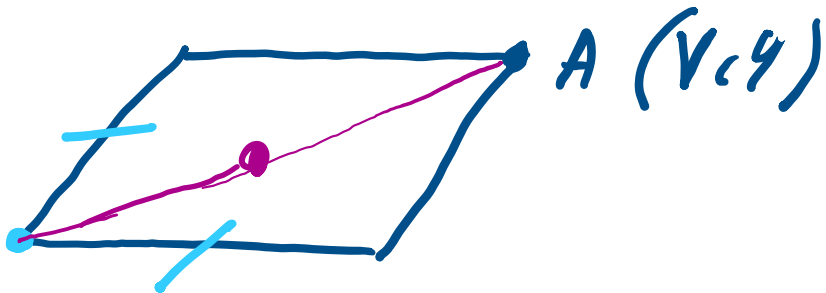
۲ دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

$$\begin{array}{l} 2x - 2y = 3 \\ x - y = -1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 2x - 2y = 3 \\ 2x - 2y = -2 \end{array} \rightarrow L = \frac{5}{\sqrt{4+4}} = \frac{5}{\sqrt{8}}$$



$$S = L^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{8}}\right)^2 = \frac{25}{8}$$

۳) نقطه‌ی $A(7, 6)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $3y + 4x = 8$ و $2y - 3x = 11$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟



$$(-3) \begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4y + 9x = -33 \\ 4y + 1x = 14 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4y + 9x = -33 \\ 4y + 1x = 14 \end{cases}$$

$$17x = -17 \rightarrow x = -1$$

$$y = 6$$

$$M \quad x_m = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7 + (-1)}{2} = 3 \quad \checkmark$$

$$y_m = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + 6}{2} = 6$$

۴) یک خط از دسته خطوط به معادله $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$ بر خط گذرنده بر دو نقطه $(2, -1)$ و $(8, 3)$ عمود است، معادله آن خط کدام است؟

$$m = -\frac{2k}{k+1}$$

$$m = \frac{3+1}{1-2} = \frac{4}{-1} = -4$$

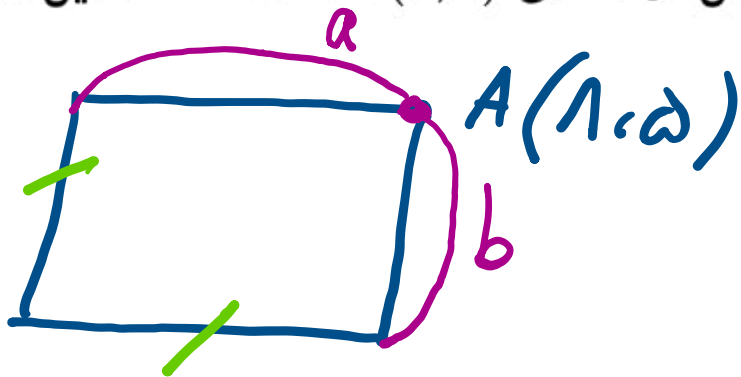
$$\frac{2}{-4} = +\frac{k+1}{2k}$$

$$\rightarrow 2k = 2k + 4$$

$$k = -2$$

$$k = -2 \rightarrow 4y + 2x - 1 = 0 \quad \div 2 \rightarrow 2y + x - 1 = 0$$

دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2x - y = 7$ و $2y + x = 6$ و یک رأس آن نقطه‌ی $A(1, 5)$ است. مساحت این مستطیل



$$\begin{aligned} 2x - y - 7 = 0 &\rightarrow L_1 = \frac{|14 - 5 - 7|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ x + 2y - 6 = 0 &\rightarrow L_2 = \frac{|1 + 10 - 6|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

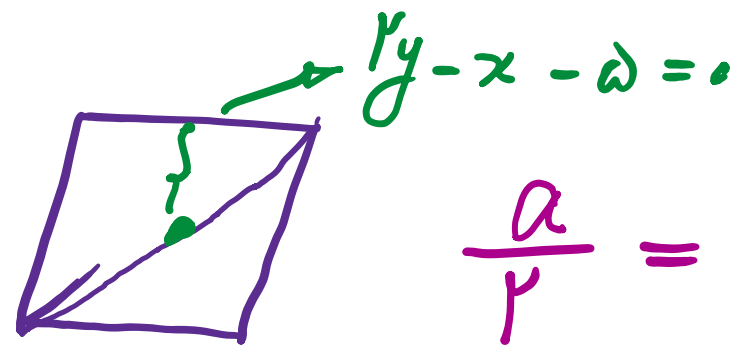
$$S = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{5}{\sqrt{5}} = 2$$

۶ مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(۲, ۵)$ ، $B(۳, ۰)$ و $C(۰, ۲)$ کدام است؟

$$S = \frac{1}{2} \left| x_A (y_B - y_C) + x_B (y_C - y_A) + x_C (y_A - y_B) \right|$$

$$\rightarrow S = \frac{1}{2} \left| ۲(۰ - ۲) + ۳(۲ - ۵) + ۰ \right| = \frac{1}{2} (۱۳) = \frac{۱۳}{۲}$$

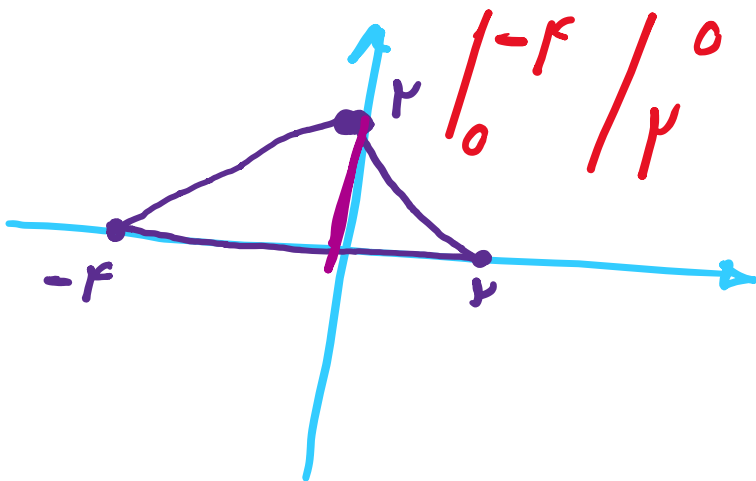
نقطه‌ی $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع، کدام است؟



$$\frac{a}{2} = \frac{|-2-3-5|}{\sqrt{1+4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \rightarrow a = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow s = a^2 = \left(\frac{10}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{10 \times 10}{5} = 10$$

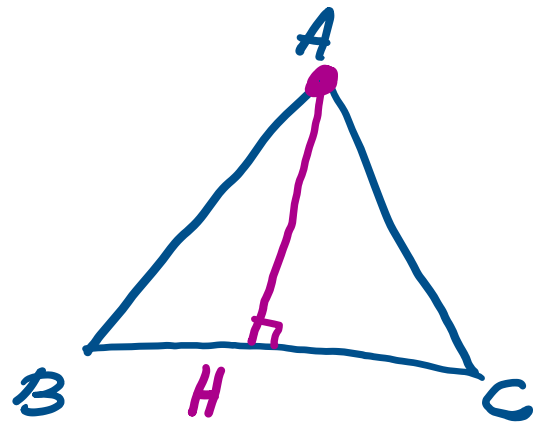
مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوطی به معادلات $y + x = 2$ و $2y - x = 4$ و ضلع دیگر آن بر محور x قرار دارد کدام است؟



$$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot a$$

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

۹ اگر $A(-1, 2)$ ، $B(3, 0)$ و $C(1, -2)$ سه راس مثلث ABC باشند، معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع BC از راس A کدام است؟



$$\begin{aligned} x_0 &= -1 \\ y_0 &= 2 \\ m &= -1 \end{aligned}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = -1(x + 1)$$

$$y - 2 = -x - 1 \rightarrow y = -x + 1$$

$$m_{BC} = \frac{0 + 2}{1 - 3} = \frac{2}{-2} = -1 \rightarrow m_{AH} = 1$$

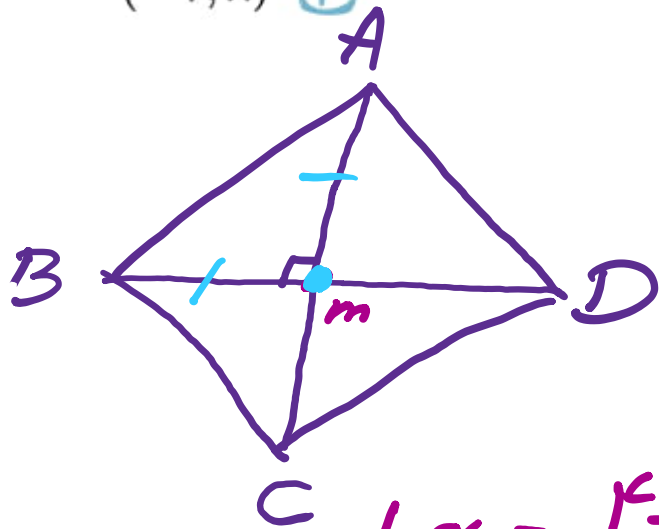
۱۰ در لوزی $ABCD$ دو رأس $A \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \end{vmatrix}$ مقابل هم هستند. کدام نقطه مختصات رأس B نمی تواند باشد؟

$(-1, 8)$ ۴

$(3, -4)$ ۳

$(2, -1)$ ۲

$(0, 4)$ ۱



$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \\ m = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

A, C خط،

$$\begin{cases} x = \frac{4 - 2}{2} = 1 \\ y = \frac{3 + 1}{2} = 2 \end{cases}$$

$$m_{AC} = \frac{3 - 1}{4 - 2} = \frac{2}{2} = 1$$

۱۱) مساحت مثلثی با رئوس $A(1, 1)$ و $B(2, 3)$ و $C(k, -1)$ برابر ۳ است. مقادیر k کدام اند؟

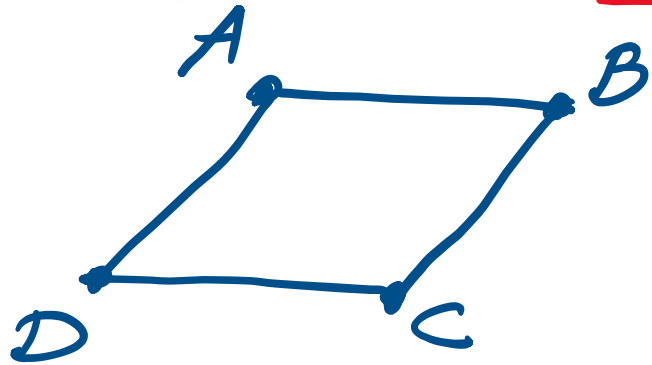
$$S = \frac{1}{2} |x_A (y_B - y_C) + x_B (y_C - y_A) + x_C (y_A - y_B)|$$

$$3 = \frac{1}{2} |1 + 2(-2) + k(-2)| \rightarrow |2k| = 4$$

$$|x| = a \rightarrow x = \pm a$$

$$2k = \pm 4 \rightarrow k = \pm 2$$

۱۲) نقاط $A \begin{vmatrix} ۳ \\ ۴ \end{vmatrix}$ ، $B \begin{vmatrix} -۲ \\ ۱ \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} -۳ \\ -۲ \end{vmatrix}$ سه رأس متوازی الاضلاع $ABCD$ هستند. مجموع طول و عرض مختصات رأس D آن کدام است؟



$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

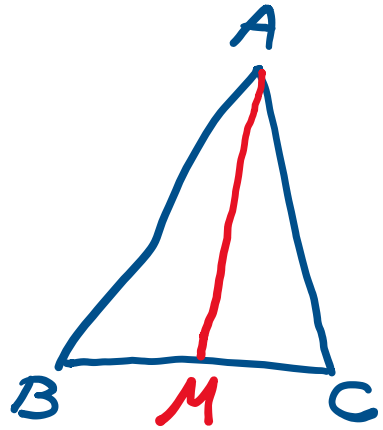
$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

$$3 - 3 = -2 + x_D \rightarrow x_D = 2$$

$$4 - 2 = 1 + y_D \rightarrow y_D = 1$$

$$x_D + y_D = 3$$

۱۳ در مثلث ABC به رئوس $A(1, 2)$ ، $B(1, 4)$ و $C(-1, 2)$ ، امتداد میانه AM محور طول‌ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟



$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= 2 \\ m &= -1 \end{aligned}$$

$$y - 2 = -1(x - 0)$$

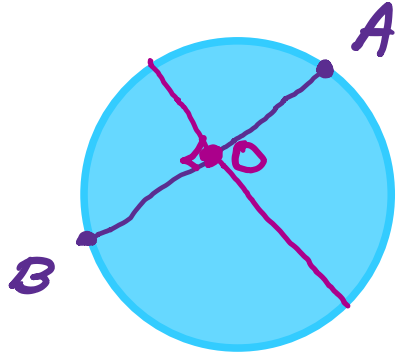
$$y = -x + 2$$

$x = 2$

$$\begin{aligned} M \quad x &= \frac{1 + (-1)}{2} = 0 \\ y &= \frac{2 + 2}{2} = 2 \end{aligned}$$

$$m_{AM} = \frac{2 - 2}{1 - 0} = \frac{0}{1} = 0$$

نقاط $A \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} -1 \\ -5 \end{vmatrix}$ روی محیط یک دایره واقع هستند. معادله قطری از دایره که بر پاره خط AB عمود است،



$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ y_0 = -1 \\ m = -\frac{3}{1} \end{cases}$$

$$y + 1 = -\frac{3}{1} \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

$$\xrightarrow{\times 14} 14x + 14y = -13$$

$$\begin{array}{l} O \\ \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{array}$$

$$m_{AB} = \frac{3+5}{2+1} = \frac{1}{3}$$

دو نقطه روی خط به معادله $x - y = 1$ قرار دارند که فاصله آن‌ها از خط به معادله $2x + 3y = 6$ برابر $\sqrt{13}$ است. مجموع عرض این دو نقطه کدام است؟

$$\begin{cases} x = a \\ y = a - 1 \end{cases}$$

$$2x + 3y - 6 = 0$$

$$L = \frac{|2a + 3(a-1) - 6|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|5a - 9|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$\rightarrow |5a - 9| = 13$$

$$\begin{cases} 5a - 9 = 13 \rightarrow a = \frac{22}{5} \rightarrow a - 1 = \frac{17}{5} \\ 5a - 9 = -13 \rightarrow a = \frac{-4}{5} \rightarrow a - 1 = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a - 9 = -13 \rightarrow a = \frac{-4}{5} \rightarrow a - 1 = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

$$\frac{17}{5} - \frac{9}{5} = \frac{8}{5}$$

فاصله دو خط موازی $y = \frac{a}{6}x + 4$ و $y = -\frac{b}{3}x - 1$ برابر ۳ است. حاصل ab کدام است؟

$$\frac{a}{6} = \frac{-b}{3} \rightarrow a = -2b \rightarrow b = -\frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{6}x - y + 4 = 0$$

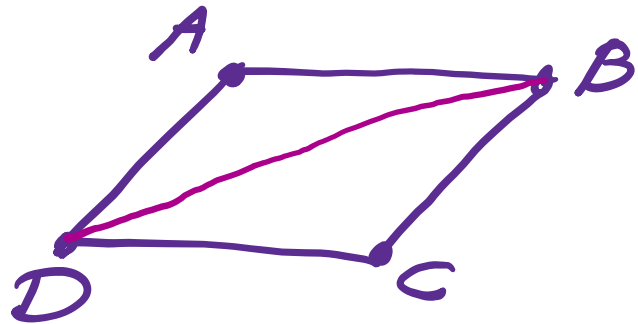
$$\frac{a}{6}x - y - 1 = 0$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{36} + 1} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{a^2}{36} + 1 = \frac{25}{9} \rightarrow \frac{a^2}{36} = \frac{14}{9} \rightarrow \frac{a}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow a = 4$$

$$ab = -12$$

نقاط $A(2, 3)$ ، $B(4, 1)$ و $C(8, 2)$ سه رأس متوازی الاضلاع $ABCD$ هستند، طول قطر BD کدام است؟ (۱۷)



$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

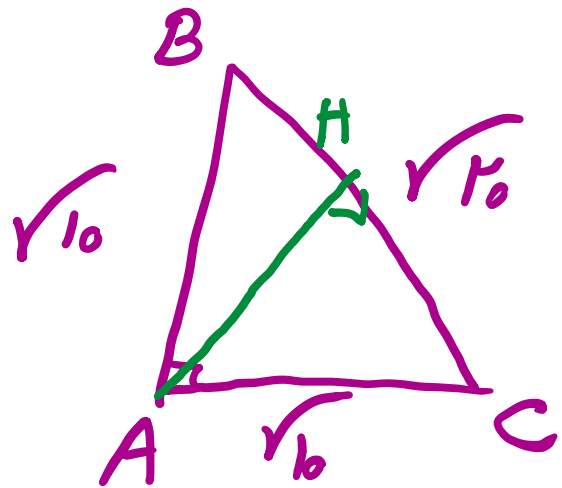
$$2 + 8 = 4 + x_D \rightarrow x_D = 6$$

$$3 + 2 = 1 + y_D \rightarrow y_D = 4$$

$$BD = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

۱۸ در مثلث بارئوس $A \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix}$ اندازه ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع کدام است؟

$$AB = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \quad AC = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \quad BC = \sqrt{4+14} = \sqrt{18}$$



$$S = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot \sqrt{18}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 5$$

$$\frac{1}{2} \cdot AH \cdot \sqrt{18} = 5 \rightarrow AH = \frac{10}{\sqrt{18}} \times \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{18}} = \frac{10\sqrt{18}}{18} = \sqrt{5}$$

مجموع طول نقاطی که روی خط $y = 2x - 3$ قرار دارند و فاصله آنها از خط $5x + 2y = 11$ برابر $\sqrt{29}$ باشد

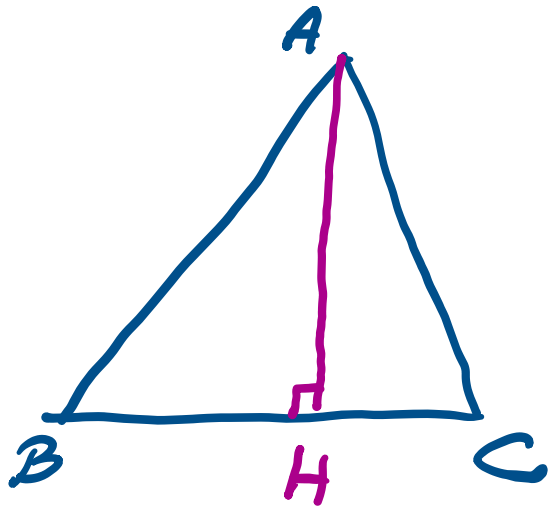
$$\begin{cases} x = a \\ y = 2a - 3 \end{cases} \quad 5x + 2y - 11 = 0$$

$$L = \frac{|5a + 2(2a - 3) - 11|}{\sqrt{25 + 4}} = \sqrt{29} \rightarrow |9a - 14| = 29$$

$$\begin{aligned} 9a - 14 &= 29 \rightarrow a_1 = \frac{43}{9} \\ 9a - 14 &= -29 \rightarrow a_2 = -\frac{15}{9} \end{aligned}$$

$$a_1 + a_2 = \frac{34}{9}$$

۲۰ اگر نقاط $A(2, 1)$ و $B(0, -1)$ و $C(4, -4)$ رئوس مثلث ABC باشند، مختصات محل برخورد ارتفاع AH و ضلع BC



معادله AH معادله
 مستقیم BC → دستگاه

$$x = \frac{1}{25}$$

$$y = -\frac{24}{25}$$