

آموزش ریاضی دهم

معادله درجه دوم

(فصل چهارم - درس اول)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

معادله درجه دوم - روش دلتا

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0 \xrightarrow{\text{دو ریشه}} x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0 \xrightarrow{\text{یک ریشه مضاعف}} x = \frac{-b}{2a}$$

$\Delta < 0 \rightarrow$ ریشه حقیقی ندارد

$$3x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 2 \end{array} \right.$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(3)(2) = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{6} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{6}{6} = 1 \\ x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۹

معادله درجه دوم - روش تجزیه

$\underline{\underline{x^2 - 5x + 6 = 0}}$ ^{ضرب} $\rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0$ \rightarrow

$x - 2 = 0$	\rightarrow	$x = 2$
$x - 3 = 0$	\rightarrow	$x = 3$

$\underline{\underline{x^2 + 5x + 6 = 0}}$ ^{ضرب} $\rightarrow (x + 2)(x + 3) = 0$ \rightarrow

$x + 2 = 0$	\rightarrow	$x = -2$
$x + 3 = 0$	\rightarrow	$x = -3$

$\underline{\underline{x^2 + 4x + 4 = 0}}$ ^{ضرب} $\rightarrow (x + 2)(x + 2) = 0$ $\rightarrow x + 2 = 0$ $\rightarrow x = -2$ ✓

$\underline{\underline{x^2 - x - 4 = 0}}$ ^{ضرب} $\rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$ \rightarrow

$x - 3 = 0$	\rightarrow	$x = 3$
$x + 1 = 0$	\rightarrow	$x = -1$

معادله درجه دوم - روش پیشرفته تجزیه

$$\underline{1}x^2 - 5x + 4 = 0 \xrightarrow{x^3} \underline{1}x^2 - 5(\underline{1}x) + \underline{4} = 0 \rightarrow (1x - 2)(1x - 3) = 0$$

\swarrow صفر
 \searrow صفر

$$\rightarrow \begin{cases} 1x - 2 = 0 & \rightarrow x = \frac{2}{1} \\ 1x - 3 = 0 & \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$\underline{5}x^2 - 4x + 1 = 0 \xrightarrow{x5} \underline{1}5x^2 - 4(5x) + 5 = 0 \rightarrow (5x - 5)(5x - 1) = 0$$

\swarrow صفر
 \searrow صفر

$$\rightarrow \begin{cases} 5x - 5 = 0 & \rightarrow x = 1 \\ 5x - 1 = 0 & \rightarrow x = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$ax'' + bx + c = 0$$

معادله درجه دوم - حالت خاص

✓ 1) $c = 0$

$$x'' + \omega x = 0 \rightarrow x(x + \omega) = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \underline{\underline{0}} \\ x + \omega = 0 \rightarrow x = -\omega \end{array} \right.$$

$$x'' - f x = 0 \rightarrow x(x - f) = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \underline{\underline{0}} \\ x - f = 0 \rightarrow x = f \end{array} \right.$$

✓ 2) $b = 0$

$$x'' - f = 0 \rightarrow x'' = f \rightarrow x = \pm \sqrt{f}$$

$$10x'' - 9 = 0 \rightarrow 10x'' = 9 \rightarrow x'' = \frac{9}{10} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{9}{10}}$$

$$x'' + f = 0 \rightarrow x'' = -f \rightarrow x$$

$$x'' + 10 = 0 \rightarrow x'' = -10 \rightarrow x$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۹

$$ax^2 + bx + c = 0$$

معادله درجه دوم - حالت خاص

$$1) a + b + c = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} \end{array} \right.$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right.$$

$$2) b = a + c \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{-c}{a} \end{array} \right.$$

$$3x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{-1}{3} \end{array} \right.$$

$$3x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$4x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{1}{4} \end{array} \right.$$

$$2x^2 + 1x - 1 = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$4x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۹

$$(x+3)^2 - \omega(x+3) + \varepsilon = 0 \quad A = x+3$$

$$A^2 - \omega A + \varepsilon = 0 \rightarrow \begin{cases} A=1 \rightarrow x+3=1 \rightarrow x=-2 \\ A=2 \rightarrow x+3=2 \rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$$(2x-3)^2 + 4(2x-3) + 4 = 0 \quad A = 2x-3$$

$$A^2 + 4A + 4 = 0 \rightarrow (A+2)^2 = 0 \rightarrow A = -2$$

$$2x-3 = -2 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\underline{x^2 + bx + c = 0} \rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$$

معادله درجه دوم - روش مربع کامل

$$x^2 + \underline{4}x = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 4 - 4 = 0 \rightarrow (x+2)^2 = 4 \rightarrow x+2 = \pm 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2=2 \rightarrow x=0 \\ x+2=-2 \rightarrow x=-4 \end{array} \right.$$

$$x^2 - 4x = 1 \rightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 = 1 \rightarrow (x-2)^2 = 5 \rightarrow x-2 = \pm \sqrt{5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-2 = \sqrt{5} \rightarrow x = \sqrt{5} + 2 \\ x-2 = -\sqrt{5} \rightarrow x = -\sqrt{5} + 2 \end{array} \right.$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

معادله درجه دوم - جمع و ضرب ریشه ها

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

$$\underline{1}x^2 - \underline{\omega}x + \underline{\Sigma} = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \omega \end{cases}$$

$$\alpha + \beta = +\omega$$

$$\alpha \cdot \beta = \Sigma$$

$$\underline{3}x^2 + \underline{1}x - \underline{\Sigma} = 0$$

$$\alpha + \beta = -\frac{1}{3}$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{-\Sigma}{3}$$

$$\underline{\underline{a \cdot c < 0}}$$

$$\Delta = \underline{\underline{b^2 - 4ac}} = +$$

معادلات زیر را با روش ریشه گیری حل کنید.

$$\text{الف) } 3x^2 = 27 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

$$\text{ب) } 4x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{پ) } t^2 + 10 = 0 \rightarrow t^2 = -10 \rightarrow t = \pm \sqrt{-10} \quad \times$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

معادلات زیر را با روش ریشه گیری حل کنید.

$$\text{ت) } (a-2)^2 = 0 \rightarrow a-2=0 \rightarrow a=2 \checkmark$$

$$\text{ث) } (x+3)^2 = 16 \rightarrow x+3 = \pm 4$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x+3=4 \rightarrow x=1 \checkmark \\ x+3=-4 \rightarrow x=-7 \checkmark \end{array} \right.$$

$$\text{ج) } (x-3)^2 = 5 \rightarrow x-3 = \pm\sqrt{5}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x-3=\sqrt{5} \rightarrow x=\sqrt{5}+3 \checkmark \\ x-3=-\sqrt{5} \rightarrow x=-\sqrt{5}+3 \checkmark \end{array} \right.$$

معادله ی $(x^2 - 1)^2 = 6$ را حل کنید و تعداد جواب های آن را تعیین کنید.

$$x^2 - 1 = \pm \sqrt{6}$$

$$1) \ x^2 - 1 = \sqrt{6} \rightarrow x^2 = \sqrt{6} + 1 \rightarrow x = \pm \sqrt{\sqrt{6} + 1} \quad \text{جواب}$$

$$2) \ x^2 - 1 = -\sqrt{6} \rightarrow x^2 = \ominus \sqrt{6} + 1 \rightarrow x = \text{X}$$

معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$$\text{الف) } x^2 - 10x + \underline{24} = 0$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-10}{2}\right)^2 = 25$$

$$x^2 - 10x + 25 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-5)^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-5)^2 = 1$$

$$x - 5 = 1 \quad \rightarrow \quad x = 6$$

$$x - 5 = -1 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

معادلات زیر را به روش کلی حل کنید.

$$\text{الف) } 3x^2 - 5x + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 7 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4(3)(7) = 25 - \underline{12 \times 7} < 0$$

مصادیق زندگی

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

مجموع مربعات سه عدد مثبت متوالی زوج، ۲۰۰ است؛ حاصل جمع آن سه عدد کدام است؟ $\sqrt{x} / \sqrt{x+2} / \sqrt{x+4}$

$$(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{x+2})^2 + (\sqrt{x+4})^2 = 200 \rightarrow x^2 + 4x^2 + 1x + 4 + x^2 + 4x + 4 = 200$$

$$\rightarrow 12x^2 + 4x - 192 = 0 \rightarrow x^2 + x - 16 = 0$$

$$(x + 5)(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 & \times \\ x = 3 & \checkmark \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{x+2} = 2 \\ \sqrt{x+4} = 2 \end{cases}$$

نتیجه

۲۴

اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر سه سال است؛ اگر سه سال دیگر، حاصل ضرب سن آنها برابر با ۲۷۰ باشد، نسبت سن کنونی آن ها به یکدیگر چقدر است؟

$$\underline{x} \rightarrow \underline{x+3}$$

$$x(x+3) = \underline{270} \rightarrow x^2 + 3x - 270 = 0 \rightarrow (x+18)(x-15) = 0$$

$$x+18=0 \rightarrow x=-18$$

$$x-15=0 \rightarrow x=\underline{15}$$

$$\text{کوچک} = 15 - 3 = \underline{12}$$

$$\text{بزرگ} = 12 + 3 = \underline{15}$$

$$\text{نسبت} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

$$x^{\gamma} - \gamma x^{\gamma} + \gamma = 0$$

$$A = x^{\gamma}$$

$$A^{\gamma} - \gamma A + \gamma = 0$$

$$| A=1 \rightarrow x^{\gamma}=1 \rightarrow$$

$$x = \pm 1$$

$$| A=\gamma \rightarrow x^{\gamma}=\gamma \rightarrow$$

$$x = \pm \sqrt{\gamma}$$

$$\left(\frac{x^r}{\mu} - \nu\right)^2 - \gamma\left(\frac{x^r}{\mu} - \nu\right) + \epsilon = 0$$

$$A = \frac{x^r}{\mu} - \nu$$

$$A^2 - \gamma A + \epsilon = 0 \quad \left| \begin{array}{l} A=1 \\ A=4 \end{array} \right.$$

$$1) \frac{x^r}{\mu} - \nu = 1 \rightarrow \frac{x^r}{\mu} = \mu \rightarrow x^r = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

$$2) \frac{x^r}{\mu} - \nu = 4 \rightarrow \frac{x^r}{\mu} = 1 \rightarrow x^r = 25 \rightarrow x = \pm \sqrt{25}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 \quad A = x + \frac{1}{x}$$

$$A^2 - 2A = 0 \rightarrow A(A-2) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} A=0 \\ A=2 \end{array} \right.$$

$$1) \quad x + \frac{1}{x} = 0 \xrightarrow{\times x} x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow X$$

$$2) \quad x + \frac{1}{x} = 2 \xrightarrow{\times x} x^2 + 1 = 2x \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

به ازای کدام مقادیر a ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $\underline{3}x^2 + \underline{a}x - \underline{3} = 0$ دو جواب حقیقی و متمایز دارد؟

$$\Delta > 0 \rightarrow a^2 - 4(3)(-3) > 0 \rightarrow \underline{\underline{a^2 + 36}} > \underline{\underline{0}}$$

$\rightarrow a \in \mathbb{R}$

معادله‌ی درجه‌ی دوم $x(2x - 5) = a$ به ازای یک مقدار a ریشه‌ی مضاعف دارد. مقدار ریشه‌ی مضاعف کدام است؟

$$2x^2 - 5x - a = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow 25 - 4(2)(-a) = 0 \rightarrow 25 + 8a = 0 \rightarrow a = \frac{-25}{8}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{4}$$

$$y = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

$$y = 0$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۹

یکی از جواب‌های معادله‌ی $3x^2 - 5x + c = 0$ برابر ۲ است. جواب دیگر معادله کدام است؟

$$x=2 \rightarrow 12 - 10 + c = 0 \rightarrow c = -2$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \rightarrow 2 \times \beta = \frac{-2}{3} \rightarrow \beta = -\frac{1}{3}$$

معادله‌ی $x^3 + x^2 - 18x - 18 = 0$ چند ریشه دارد؟

$$x^2(\underline{x+1}) - 18(\underline{x+1}) = 0$$

$$\hookrightarrow (x+1)(x^2-18) = 0$$

$$1) x+1=0 \rightarrow x=-1 \quad \checkmark$$

$$2) x^2-18=0 \rightarrow x^2=18 \rightarrow x=\pm\sqrt{18}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

مجموع ریشه‌های معادله‌ی $-3x^2 + 4x + 5 = 0$ کدام است؟

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{5}{-3}$$

مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است؟

$$A = x^2 + x \rightarrow A^2 - 18A + 72 = 0 \rightarrow (A - 4)(A - 12) = 0$$

$$1) A = 4 \rightarrow x^2 + x = 4 \rightarrow x^2 + x - 4 = 0 \rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} = -1 \quad \checkmark$$

$$2) A = 12 \rightarrow x^2 + x = 12 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} = -1 \quad \checkmark$$

$$\text{مجموع} = -1 - 1 = -2$$