آموزش ریاضی دهم

ریشه و توان

(فصل سوم – درس اول)

علی جبرا|سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

فرمول های ضرب و تقسیم

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$x^2 \times x^3 = x^5$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\frac{3^5}{3^3} = 3^2 = 9$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

$$5^2 \cdot 2^2 = 10^2 = 100$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$\frac{100^5}{10^5} = 10^5$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

$$(x^2)^5 = x^{10}$$

$$x^2 \cdot x^5 = x^7$$

توان منفی

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{+3} = \frac{8}{27}$$

$$\frac{2}{2^{-4}} = 2^1 \times 2^4 = 2^5 = 32$$

توان کسری

۱) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\qquad$ $۳^{۵/۲} = \sqrt{۳^۵}$

$\sqrt[۲]{x^۵} \times \sqrt[۳]{x^۱} = x^{۵/۲} \cdot x^{۱/۳} = x^{\frac{۱۵+۲}{۶}} = x^{۱۷/۶} = \sqrt[۶]{x^{۱۷}}$

$۸^{-۲/۳} = \frac{۱}{۸^{۲/۳}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۸^۲}} = \frac{۱}{۴^۲} = \frac{۱}{۱۶}$

۲) $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$ $\qquad$ ۳) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$۲\sqrt[۳]{۵} = \sqrt[۳]{۲^۳ \times ۵} = \sqrt[۳]{۴۰}$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{\sqrt{x}} = \sqrt[۶]{x}$

گویا کردن مخرج کسر

$$\frac{۵}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\frac{۵}{\sqrt{۲}-۱} \times \frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱} = \frac{۵(\sqrt{۲}+۱)}{۲-۱} = ۵(\sqrt{۲}+۱)$$

محاسبه رادیکال با قدر مطلق

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = +3$$

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$$

$$\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$$

$$\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |1-\sqrt{3}| = -1+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$$

$$\sqrt{\ominus 3^2} = X$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

۱ حاصل کسر $\frac{۱}{۳\sqrt{۸}-\sqrt{۵۰}+\sqrt{۳}}$ کدام است؟

$۸ = ۴\times۲$ ، $۵۰ = ۲\times۲۵$

$$\frac{۱}{۶\sqrt{۲}-۵\sqrt{۲}+\sqrt{۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{۳-۲} = \sqrt{۳}-\sqrt{۲}$$

گزینه ۱

$(a^m)^n = a^{mn}$

۲ ریشهٔ بیست و سوم عبارت $\dfrac{۲۴^{\frac{۲}{۳}} \times ۴^{\frac{۷}{۲}}}{۳۲^{۲} \times ۲۷^{-\frac{۱}{۳}} \times ۴۸^{-\frac{۱}{۴}}}$ کدام است؟

$۲۴^{\frac{۲}{۳}} = (\underline{۲}^{۳} \times \underline{۳}^{۱})^{\frac{۲}{۳}} = ۲^{۲} \times ۳^{\frac{۲}{۳}}$

$۴^{\frac{۷}{۲}} = (۲^{۲})^{\frac{۷}{۲}} = ۲^{۷}$

$۴۸^{-\frac{۱}{۴}} = (۳^{۱} \times ۲^{۴})^{-\frac{۱}{۴}} = ۳^{-\frac{۱}{۴}} \times ۲^{-۱}$

$۳۲^{۲} = (۲^{۵})^{۲} = ۲^{۱۰}$

$(۲۷)^{-\frac{۱}{۳}} = (۳^{۳})^{-\frac{۱}{۳}} = ۳^{-۱}$

$A = \dfrac{۲^{۲} \times ۳^{\frac{۲}{۳}} \times ۲^{۷}}{۲^{۱۰} \times ۳^{-۱} \times ۳^{-\frac{۱}{۴}} \times ۲^{-۱}} = \dfrac{۲^{۹} \times \underline{۳}^{\frac{۲}{۳}}}{۲^{۹} \times \underline{۳}^{-\frac{۹}{۴}}} = ۳^{\frac{۲}{۳}+\frac{۹}{۴}} = ۳^{\frac{۲۳}{۱۲}}$

$\sqrt[۲۳]{A} = A^{\frac{۱}{۲۳}} = \left(۳^{\frac{۲۳}{۱۲}}\right)^{\frac{۱}{۲۳}} = ۳^{\frac{۱}{۱۲}} = \sqrt[۱۲]{۳}$ ✓

۳ حاصل عبارت $A=\frac{۲}{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۱۳+۴\sqrt{۳}}$ کدام است؟

$$\frac{۲}{۲+\sqrt{۳}}\times\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۴-۲\sqrt{۳}}{۴-۳}=۴-۲\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{۱۳+۴\sqrt{۳}}=\sqrt{۱+۲(۲\sqrt{۳})+۱۲}=\sqrt{(۱+۲\sqrt{۳})^۲}=۱+۲\sqrt{۳}$$

$a^۲+۲(ab)+b^۲$

$$\rightarrow ۴-۲\sqrt{۳}+۱+۲\sqrt{۳}=۵$$

۴ حاصل $\sqrt[5]{(\sqrt{2}+1)^4} \times \sqrt[5]{(3-2\sqrt{2})^2}$ کدام است؟

$$\sqrt[5]{((\sqrt{2}+1)^2)^2} = \sqrt[5]{(2+1+2\sqrt{2})^2} = \sqrt[5]{(3+2\sqrt{2})^2}$$

$$\rightarrow (3+2\sqrt{2})^{\frac{2}{5}} \times (3-2\sqrt{2})^{\frac{2}{5}} = (9-8)^{\frac{2}{5}} = 1$$

$$\sqrt[5]{(\sqrt{2}+1)^4} \times \sqrt[5]{(\sqrt{2}-1)^4} = 1$$

۵ ساده شده‌ی عبارت $\left(\sqrt[3]{5+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4}+(-\sqrt{2})^{2}}\right)^{-\frac{3}{2}}+\left(\sqrt{2\frac{1}{4}}\right)^{3}$ ، کدام است؟

$$\left(\sqrt[3]{5+\frac{1}{9}+2}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(\sqrt[3]{\frac{64}{9}}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(\left(\frac{2^6}{3^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{2^{-3}}{3^{-1}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{9}{4}}\right)^3=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}$$

$$\frac{3}{8}$$

$$\rightarrow \frac{3}{8}+\frac{27}{8}=\frac{30}{8}=3\frac{3}{4}$$

۶ حاصل $\frac{۲}{\sqrt{۵}-۱} \div \left(\frac{۲\sqrt{۵}-۲}{۴}\right)^۲$ کدام است؟

$$\frac{۲}{\sqrt{۵}-۱} \times \frac{\sqrt{۵}+۱}{\sqrt{۵}+۱} = \frac{۲(\sqrt{۵}+۱)}{۵-۱} = \frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$$

$$\left(\frac{۲(\sqrt{۵}-۱)}{۴}\right)^۲ = \frac{۵+۱-۲\sqrt{۵}}{۴} = \frac{۶-۲\sqrt{۵}}{۴} = \frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲} \times \frac{۲}{۳-\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۵}+۱}{۳-\sqrt{۵}}$$

$$\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲} + \frac{۳-\sqrt{۵}}{۲} = ۲$$

۷ حاصل عبارت $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$ کدام است؟

$$\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{2})^2}{1-2} = -\left(\frac{1+2-2\sqrt{2}}{3}\right) = -3+2\sqrt{2}$$

$$\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{12}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\rightarrow -3+2\sqrt{2}-2\sqrt{2} = -3$$

۸ اگر $A = ۲\sqrt{\underbrace{۵۰}_{۲\times۲۵}} + ۴\sqrt{\underbrace{۷۵}_{۳\times۲۵}} - ۵\sqrt{\underbrace{۴۸}_{۱۶\times۳}} - ۳\sqrt{\underbrace{۸}_{۴\times۲}}$ باشد، $A^۲$ برابر کدام است؟

$A = ۱۰\sqrt{۲} + ۲۰\sqrt{۳} - ۲۰\sqrt{۳} - ۶\sqrt{۲}$

$A = ۴\sqrt{۲}$

$A^۲ = ۱۶ \times ۲ = ۳۲$

۹ حاصل عبارت $\sqrt[3]{24} \times \sqrt[3]{9} + \frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} - \sqrt{80}$ کدام است؟

$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \times 3}$

$2\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{27} = 2 \times 3 = 6$

$\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \times \frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} = \frac{(2-\sqrt{5})^2}{4-5} = -(4+5-4\sqrt{5}) = -9+4\sqrt{5}$

$\sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$

$6-9+4\sqrt{5}-4\sqrt{5} = -3$

۱۰ حاصل عبارت $\sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{40} + \frac{\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{72}$ کدام است؟

$\sqrt[3]{5^2} \times \sqrt[3]{2^3 \times 5} = \sqrt[3]{2^3 \times 5^3} = 2 \times 5 = 10$

$\frac{\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \times \frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}-4}{9-8} = 3\sqrt{2}-4$

$\frac{1}{2}\sqrt{72} = \frac{1}{2}\sqrt{4 \times 2 \times 9} = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow 10 + 3\sqrt{2} - 4 - 3\sqrt{2} = 6$

۱۱ حاصل $\frac{۲}{۲+\sqrt{۵}} - \sqrt{۲۰} + \sqrt{۴۸} \times \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ، کدام است؟

$$\frac{۲}{۲+\sqrt{۵}} \times \frac{۲-\sqrt{۵}}{۲-\sqrt{۵}} = \frac{۴-۲\sqrt{۵}}{۴-۵} = -۴+۲\sqrt{۵}$$

$$\sqrt{۲۰} = \sqrt{۴ \times ۵} = ۲\sqrt{۵}$$

$$\sqrt{۴۸} \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \sqrt{۱۶ \times ۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} = ۴ \times ۱ = ۴$$

$$\rightarrow -۴+۲\sqrt{۵}-۲\sqrt{۵}+۴ = ۰$$

۱۲ اگر $A = ۰/۲\sqrt[۳]{۱۲۵} + \sqrt[۳]{۵۶}$ باشد، حاصل $A^۳ - ۳A^۲ + ۳A$ کدام است؟

$$A^۳ - ۳A^۲ + ۳A - ۱ + ۱ = (A-۱)^۳ + ۱$$

$$A = ۰/۲\sqrt[۳]{۵^۳} + \sqrt[۳]{۲^۳ \times ۷} = ۱ + ۲\sqrt[۳]{۷}$$

$$\rightarrow (۱ + ۲\sqrt[۳]{۷} - ۱)^۳ + ۱ = ۸ \times ۷ + ۱ = ۵۷$$

۱۳ حاصل عبارت $(\sqrt{۳}+۱)^{\frac{۲}{۳}}(\sqrt[۳]{۲})(\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۳}})$ کدام است؟

$$\sqrt[۳]{(۲\sqrt{۳}+۱)^۲}\cdot\sqrt[۳]{(۲\sqrt{۳}-۱)^۲}$$

$$=\sqrt[۳]{(۳-۱)^۲}=\sqrt[۳]{۴}=\sqrt[۳]{۲^۲}=۲^{\frac{۲}{۳}}$$

$$\sqrt[۳]{۴-۲\sqrt{۳}}=\sqrt[۳]{۳+۱-۲\sqrt{۳}}=\sqrt[۳]{(\sqrt{۳}-۱)^۲}$$

۱۴ اگر $x = ۵ + \sqrt{۱۷}$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{\frac{x-۱}{۱۶} + \frac{۱}{۲x}}$، کدام است؟

$$\sqrt{\frac{x^۲-x+۸}{۱۶x}} = \frac{۱}{۴}\sqrt{x-۱+\frac{۸}{x}} = \frac{۱}{۴}\sqrt{۵+\sqrt{۱۷}-۱+\frac{۸}{۵+\sqrt{۱۷}}}$$

$$= \frac{۱}{۴}\sqrt{۵+\sqrt{۱۷}-۱+۵-\sqrt{۱۷}} = \frac{۱}{۴}\sqrt{۹} = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$

$$\frac{۸}{۵+\sqrt{۱۷}} \times \frac{۵-\sqrt{۱۷}}{۵-\sqrt{۱۷}} = \frac{۸(۵-\sqrt{۱۷})}{۲۵-۱۷} = ۵-\sqrt{۱۷}$$

۱۵ اگر $A=\frac{۲}{۳}\sqrt{۱۸}+۲\sqrt{۲۷}-\sqrt{۱۰۸}+۰/۳\sqrt{۲۰۰}$ باشد، $A^۲$ برابر کدام است؟

$\frac{۲}{۳}\sqrt{۹\times۲}=۲\sqrt{۲}$ $\quad$ $۲\sqrt{۹\times۳}=۶\sqrt{۳}$

$\sqrt{۱۰۸}=\sqrt{۹\times۳\times۴}=۶\sqrt{۳}$ $\quad$ $۰/۳\sqrt{۱۰۰\times۲}=۳\sqrt{۲}$

$\rightarrow ۲\sqrt{۲}+۶\sqrt{۳}-۶\sqrt{۳}+۳\sqrt{۲}=۵\sqrt{۲}$

$A^۲=(۵\sqrt{۲})^۲=۲۵\times۲=۵۰$

۱۶ حاصل $\frac{۲}{۲+\sqrt{۶}} + (۲\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۲})(\sqrt{۳} + \sqrt{۲})$ کدام است؟

$$\frac{۲}{۲+\sqrt{۶}} \times \frac{۲-\sqrt{۶}}{۲-\sqrt{۶}} = \frac{۲(۲-\sqrt{۶})}{۴-۶} = -۲+\sqrt{۶}$$

$$\rightarrow ۶+۲\sqrt{۶}-۳\sqrt{۶}-۶ = -\sqrt{۶}$$

$$\rightarrow -۲+\sqrt{۶}-\sqrt{۶} = -۲$$

$$۲\sqrt{۳}+\sqrt{۳}=۶$$
$$-۳\sqrt{۲}+\sqrt{۲}=-۶$$
$$۲\sqrt{۳}+\sqrt{۲}=۲\sqrt{۶}$$

۱۷ اگر $A=\sqrt[۳]{\frac{x-۱}{۳۶}-\frac{۱}{x}+\frac{\sqrt{۲}}{۳۶}}$ باشد، با فرض، $x=۱-\sqrt{۲}$ حاصل $A^{۳}$ کدام است؟

$$A^{۳}=\frac{x-۱}{۳۶}-\frac{۱}{x}+\frac{\sqrt{۲}}{۳۶}=\frac{-\sqrt{۲}}{۳۶}-\frac{۱}{۱-\sqrt{۲}}+\frac{\sqrt{۲}}{۳۶}$$

$$=۱+\sqrt{۲}$$

$$\frac{۱}{۱-\sqrt{۲}}\times\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}}=\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱-۲}=-(۱+\sqrt{۲})$$

۱۸ مقدار $\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}-۲\sqrt{۷+۴\sqrt{۳}}+\sqrt{۲۷}$ کدام است؟

$\sqrt{۴+۳-۴\sqrt{۳}}=\sqrt{(۲-\sqrt{۳})^۲}=|۲-\sqrt{۳}|=۲-\sqrt{۳}$

$\sqrt{۴+۳+۴\sqrt{۳}}=\sqrt{(۲+\sqrt{۳})^۲}=|۲+\sqrt{۳}|=۲+\sqrt{۳}$

$۲\sqrt{۷+۴\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۴+۳+۴\sqrt{۳}}$

$\sqrt{۲۷}=\sqrt{۹\times۳}$

$\rightarrow ۲-\sqrt{۳}=۴-۴\sqrt{۳}+۳\sqrt{۳}=-۲$

۱۹ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۶}}{\sqrt{۲}} - \frac{۱-\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}}$ ، کدام است؟

$\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۶}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{۲}} + \frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۴} + \sqrt{۳} = ۲+\sqrt{۳}$

$\frac{۱-\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}} \times \frac{۱-\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}} = \frac{(۱-\sqrt{۳})^۲}{۱-۳} = \frac{۱+۳-۲\sqrt{۳}}{-۲} = \frac{۴-۲\sqrt{۳}}{-۲}$

$\rightarrow \frac{۴}{-۲} - \frac{۲\sqrt{۳}}{-۲} = -۲+\sqrt{۳}$

$\rightarrow ۲+\sqrt{۳}+۲-\sqrt{۳} = ۴$

۲۰ خلاصه‌شده‌ی عبارت $\sqrt[۳]{۳\frac{۳}{۸}} \times (۱۸)^{-۲} \times (۱/۵)^{۴} \times (\frac{۱}{۴})^{-۳}$ کدام است؟

$\sqrt[۳]{۳\frac{۳}{۸}} = \sqrt[۳]{\frac{۲۷}{۸}} = \frac{۳}{۲}$

$(\frac{۳}{۲})^{۴}$

$(۱۸)^{-۲} = \frac{۱}{(۳^{۲} \times ۲)^{۲}} = \frac{۱}{۳^{۴} \times ۲^{۲}}$

$(\frac{۱}{۴})^{-۳} = ۴^{+۳} = (۲^{۲})^{۳} = ۲^{۶}$

$$\rightsquigarrow \frac{۳ \times ۳^{۴} \times ۲^{۶}}{۲ \times ۳^{۴} \times ۲^{۲} \times ۲^{۴}} = \frac{۳^{۵} \times ۲^{۶}}{۳^{۴} \times ۲^{۷}} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$