

آموزش ریاضی دهم

دنباله هندسی

(فصل اول – درس چهارم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$\underbrace{1, 2, 4, 8, 16, \dots}_{\times 2} \rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$$

حده عمومی $a_n = a_1 q^{n-1}$

مجموعه n جمله اول $S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$

$$a_{101} = a_1 \cdot q^{100} = 1 \times 2^{100} = 2^{100}$$

$$S_{10} = \frac{1(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 1024 - 1 = 1023$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \rightarrow q = \frac{1}{2} \text{ نزولی}$$

$$0 < q < 1$$

نزولی

$$q > 1$$

معدولی

$$q < 0$$

متناوب

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

حد مجموع

۱) حاصل عبارت $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ ، به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ، کدام است؟

$$| a_1 = 1$$

$$| q = t \rightarrow S_{11} = \frac{1(t^{11} - 1)}{t - 1}$$

$$| a_1 = 1$$

$$| q = t^3 \rightarrow S_4 = \frac{1(t^{12} - 1)}{t^3 - 1}$$

$$\frac{\frac{t^{11} - 1}{t - 1}}{\frac{t^{12} - 1}{t^3 - 1}} = \frac{t^{11} - 1}{t - 1} = \frac{(t - 1)(t^2 + t + 1)}{t - 1} = t^2 + t + 1$$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) + 1 = \frac{1 + 5 - 2\sqrt{5} - 2 + 2\sqrt{5} + 4}{4} = \frac{1}{4} = 2$$

۲ در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول آن ۱۵۳ می باشد. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟

$$S_4 = 153 \rightarrow \frac{a_1(q^4 - 1)}{q - 1} = 153$$

$$S_6 = 136 \rightarrow \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} = 136$$

$$\rightarrow \frac{S_4}{S_6} = \frac{153}{136} = \frac{q^4 - 1}{q^6 - 1}$$

$$\rightarrow \frac{(q^4 - 1)(q^2 + 1)}{q^6 - 1} = q^2 + 1 = \frac{153}{136} \rightarrow q^2 = \frac{1}{16} \rightarrow q = \frac{1}{4}$$

$$\frac{a_1}{a_5} = \frac{a_1}{a_1 q^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$$

۳ در یک دنباله هندسی مجموع ۸ جمله اول $\frac{5}{4}$ مجموع ۴ جمله اول آن است، جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟

$$S_1 = \frac{5}{4} \quad S_4 \rightarrow \frac{a_1(q^4 - 1)}{q - 1} = \frac{5}{4} \cdot \frac{a_1(q^4 - 1)}{q - 1}$$

$$\rightarrow \cancel{(q^4 - 1)}(q^4 + 1) = \frac{5}{4} \cancel{(q^4 - 1)} \rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \rightarrow q^2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_8}{a_1} = \frac{a_1 \cdot q^7}{a_1} = q^7 = (q^2)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

حاصل $(1+x+x^2+\dots+x^9)(1-x+x^2-\dots+x^9)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

$$x^2 = 2$$

$$a_1 = 1, q = x, S_9$$

$$a_1 = 1, q = -x, S_9$$

$$\left(\frac{1(x^9 - 1)}{x - 1} \right) \left(\frac{1(+x^9 + 1)}{+x + 1} \right) = \frac{x^{18} - 1}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{(x^2)^9 - 1}{x^2 - 1} = \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 2^9 - 1 = 512 - 1 = 511$$

۵ در یک دنباله هندسی صعودی به صورت $\dots, b, 9, a, 4$ مجموع شش جمله اول کدام است؟

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 4 \\ a_n = 9 \end{array} \right. \rightarrow \frac{a_n}{a_1} = \frac{9}{4} \rightarrow \frac{a_1 q^n}{a_1} = 9 = \frac{9}{4} \rightarrow q = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$q > 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 4 \\ q = \frac{3}{2} \end{array} \right. \rightarrow S_4 = \frac{4 \left(\left(\frac{3}{2} \right)^4 - 1 \right)}{\frac{3}{2} - 1} = 1 \left(\left(\frac{3}{2} \right)^4 - 1 \right)$$

۶ دنباله‌ی هندسی $2, x, \frac{1}{2}, \dots$ غیر نزولی است. مجموع شش جمله‌ی اول آن کدام است؟

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1 q^2}{a_1} = q^2 = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \rightarrow q = \pm \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow S_6 = \frac{2 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^6 - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-4}{\frac{1}{2}} \left(\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{21}{14}$$

۷ در یک دنباله‌ی هندسی نزولی، مجموع جملات پنجم و ششم برابر ۲ و تفاضل جمله‌ی هفتم از پنجم برابر ۱ است. جمله‌ی هفتم آن کدام است؟

۰۹۷۱

$$\begin{aligned}a_0 + a_4 &= 2 \rightarrow a_0 + a_0 q^4 = 2 \\a_0 - a_4 &= 1 \rightarrow a_0 - a_0 q^4 = 1\end{aligned} \rightarrow \frac{a_0(1+q^4)}{a_0(1-q^4)} = 2$$

$$\rightarrow \frac{1+q^4}{(1-q)(1+q)} = 2 \rightarrow 1-q = \frac{1}{2} \rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$a_1 q^4 + a_1 q^0 = 2 \rightarrow \frac{1}{16} a_1 + \frac{1}{16} a_1 = 2 \rightarrow a_1 = \frac{44}{16}$$

$$a_4 = a_1 q^4 = \frac{44}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۸ اگر در دنباله‌ای هندسی $S_n = 2 \times 5^n - 2$ باشد a_n کدام است؟

$$n=1 \rightarrow S_1 = a_1 = 10 - 2 = 8 \rightarrow a_1 = 8 \quad \checkmark$$

$$n=2 \rightarrow S_2 = a_1 + a_2 = 20 - 2 = 18 \rightarrow a_2 = 10 \quad \checkmark$$

$$a_2 = a_1 \cdot q \rightarrow 10 = 8 \times q \rightarrow q = \frac{5}{4} \quad \checkmark$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 8 \times \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}$$

در دنباله‌ای هندسی اگر جمله سوم برابر ۲ باشد حاصل ضرب ۵ جمله اول کدام است؟

$$a_3 = 2 \rightarrow \underline{a_1 q^2} = 2$$

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 = a_1 \times a_1 q \times a_1 q^2 \times a_1 q^3 \times a_1 q^4$$

$$= a_1^5 \times q^{10} = (a_1 q^2)^5 = (2)^5 = 32$$

۱۰ در یک دنباله‌ی هندسی صعودی جمله‌ی سوم ۱۰ و جمله‌ی هفتم ۴۰ است. جمله‌ی اول کدام است؟

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} a_v = 40 \\ a_{\text{پ}} = 10 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{a_v}{a_{\text{پ}}} = 4 \rightarrow \frac{a_1 q^4}{a_1 q^1} = q^3 = 4 \rightarrow q^3 = 4 \rightarrow q = \sqrt[3]{4} \\ & \rightarrow a_1 \times 4 = 10 \rightarrow a_1 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

مجموع جواب‌های معادله‌ی $\frac{1 - x + x^2 - \dots + x^6 - x^7 + x^8}{1 - x^3 + x^6} = 5$ کدام است؟

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ q = -x \end{array} \right\} \rightarrow S_9 = \frac{1(-x^9 - 1)}{-x - 1} = \frac{x^9 + 1}{x + 1} \\ & \left. \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ q = -x^3 \end{array} \right\} \rightarrow S_3 = \frac{1(-x^9 - 1)}{-x^3 - 1} = \frac{x^9 + 1}{x^3 + 1} \end{aligned}$$

$$\frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x+1} = 5 \rightarrow x^2 - x + 1 = 5 \rightarrow x^2 - x - 4 = 0$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{\pm 1}{1} = 1$$

۱۲ بین دو عدد ۱ و ۹ سه واسطه‌ی هندسی می‌نویسیم جمله‌ی وسط کدام است؟

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \frac{1}{a_5}$$

$$a_5 = 9 \rightarrow a_1 q^4 = 9 \rightarrow q^4 = 9 \rightarrow q^2 = 3$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 = 1 \times 3 = 3$$

۱۳ در یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $q = 2$ مجموع شش جمله‌ی اول چند برابر مجموع سه جمله‌ی اول است؟

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{\frac{a_1(q^6-1)}{q-1}}{\frac{a_1(q^3-1)}{q-1}} = \frac{(q^3-1)(q^3+1)}{q^3-1} = q^3 + 1$$

$$\frac{S_6}{S_3} = q^3 + 1 \xrightarrow{q=2} \frac{S_6}{S_3} = 1 + 1 = 2$$

در یک دنباله‌ی هندسی حاصل ضرب جملات سوم و پنجم، سه برابر جمله‌ی هفتم است. جمله‌ی اول کدام است؟

$$a_3 \cdot a_5 = 1a_7 \rightarrow a_1 q^2 \cdot a_1 q^4 = 1a_1 q^6$$

$$\rightarrow a_1 \cdot q^2 = 1a_1 \cdot q^4 \rightarrow a_1 = 1$$

۱۵ در یک دنباله هندسی نزولی مجموع جمله ی اول و دوم برابر حد مجموع جملات بعدی است. قدرنسبت کدام است؟

۰.۲۹۴۱

$$a_1 + a_r = \underbrace{a_r}_{a_1 q^{r-1}} + a_r + a_r + \dots$$

$$\rightarrow a_1 + a_1 q = \frac{a_1 q^r}{1-q} \rightarrow \cancel{a_1} (1+q)(1-q) = \cancel{a_1} q^r$$

$$\rightarrow 1-q = q^r \rightarrow 1 - q^r = 0 \rightarrow q^r = 1 \rightarrow q^r = \frac{1}{r} \rightarrow q = +\frac{1}{\sqrt{r}}$$

$$\rightarrow q = \sqrt[r]{\frac{1}{r}}$$

۱۶) توپی را از زمین تا ارتفاع ۱۰ متری پرتاب می کنیم. در هر بار برخورد به زمین توپ تا نصف ارتفاع قبلی بالا می آید. کل مسیری که توپ تا توقف خود می پیماید چقدر است؟

مسیر: ۱۰، ۵، ۲٫۵، ...

$$S_{\infty} = \frac{10}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$$

$$\text{مسافت} = 20 \times 2 = 40$$

۱۷ جمله‌ی عمومی یک دنباله $a_n = \frac{3^n + 4^n}{12^n}$ است، حد مجموع بی‌شمار جمله‌ی این دنباله کدام است؟

$$a_n = \left(\frac{3}{12}\right)^n + \left(\frac{4}{12}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{17}{6}$$

اگر حد مجموع جملات هندسی نزولی برابر ۳ و حد مجموع مربعات آن‌ها نیز برابر ۳ باشد، q (قدرنسبت) کدام است؟

$$a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots \rightarrow \sum_{\infty} = \frac{a_1}{1-q} = 3 \xrightarrow{q < 1} \frac{a_1^2}{(1-q)^2} = 9$$

$$a_1^2, a_1^2 q^2, a_1^2 q^4, \dots \rightarrow \sum_{\infty} = \frac{a_1^2}{1-q^2} = 3$$

$$\frac{\frac{a_1^2}{(1-q)^2}}{\frac{a_1^2}{1-q^2}} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{(1-q)(1+q)}{(1-q)(1-q)} = 3 \rightarrow 1+q = 3-3q$$

$$\rightarrow 4q = 2 \rightarrow q = \frac{1}{2}$$

۱۹ دنباله‌ی هندسی $\frac{1}{3}, \dots, x, 3$ غیرنزولی است. مجموع شش جمله‌ی اول آن کدام است؟

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \frac{a_n}{a_1} = \frac{a_1 q^{n-1}}{a_1} = q^{n-1} = \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{9} \rightarrow q = \frac{-1}{3}$$

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ q = \frac{-1}{3} \end{cases} \rightarrow S_6 = \frac{3 \left(\left(\frac{-1}{3} \right)^6 - 1 \right)}{\frac{-1}{3} - 1} = \frac{3}{4} \times \frac{721}{729} = \frac{112}{11}$$

۲۰ در دنباله ای، $t_n = \frac{5}{3^{n+1}}$ می باشد حد مجموع جملات این دنباله چیست؟

$$\begin{aligned} n=1 &\rightarrow t_1 = \frac{5}{9} \\ n=2 &\rightarrow t_2 = \frac{5}{27} \end{aligned} \rightarrow \frac{t_2}{t_1} = q = \frac{5/27}{5/9} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} t_1 &= 5/9 \\ q &= 1/3 \end{aligned} \rightarrow S_{\infty} = \frac{5/9}{1 - 1/3} = 5/4$$