

آموزش ریاضی

الگو و دنباله

علی هاشمی



در دنباله اعداد $1, 2, 4, 7, 11, 16, \dots$ جمله دهم، کدام است؟

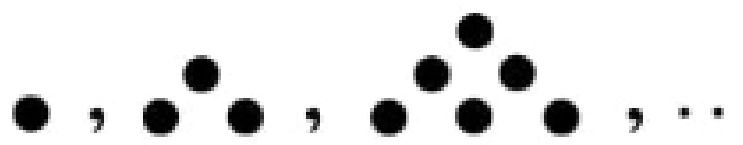
$$1, 2, 4, 7, 11, 16, \dots$$

$+1$ $+2$ $+3$ $+4$ $+5$

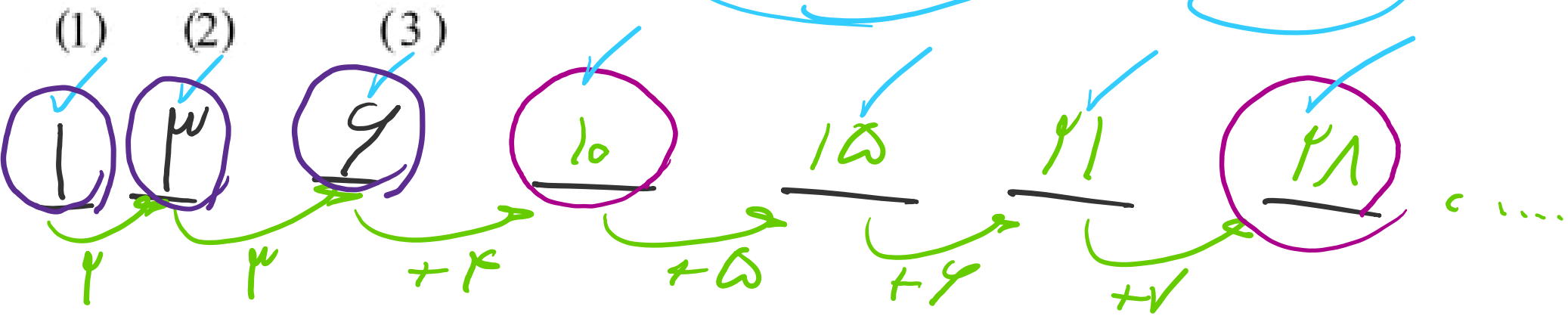
$$\begin{array}{r} 22 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{+4} \begin{array}{r} 26 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{+7} \begin{array}{r} 33 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{+8} \begin{array}{r} 41 \\ \hline \end{array}$$



مطابق شکل زیر، مجموع تعداد نقطه های شکل چهارم با تعداد نقطه های شکل چندم این دنباله برابر ۳۸ است؟

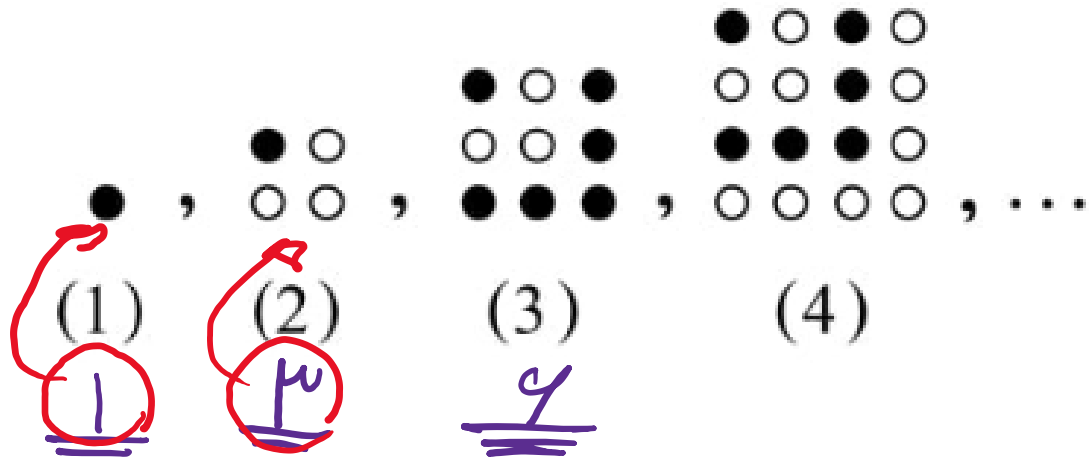


a_n $n = \sqrt{\quad}$



$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

در الگوی زیر تعداد دایره‌های توخالی در شکل چهاردهم کدام است؟



$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$a_{14} = \frac{14 \times 15}{2} = 105$$

n فرد \rightarrow 10

n زوج \rightarrow 105



$$a_n = \omega n + \gamma$$

خطی

$$f_n = n + \gamma n$$

عینگی

$$a_p = \omega(p) + \gamma = 1\gamma$$



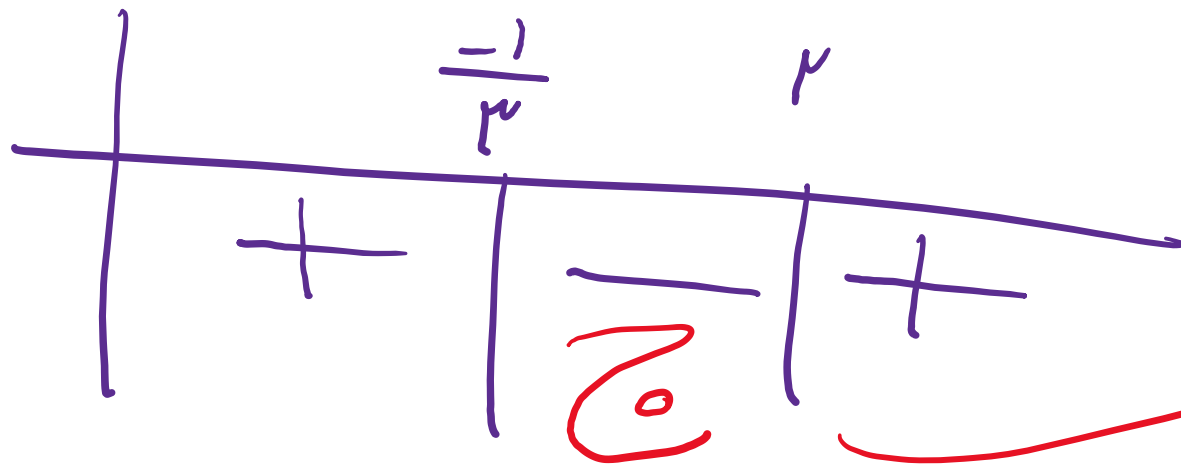
$$n = 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \dots$$

دنباله‌ی $tn = \frac{n-2}{3n+1}$ چند جمله‌ی منفی دارد؟

$$tn < 0$$

$$\frac{n-2}{3n+1} < 0$$

$$\begin{cases} n-2=0 \rightarrow n=2 \\ 3n+1=0 \rightarrow n=-\frac{1}{3} \end{cases}$$



$$n=1$$



کدام جمله از دنباله $t_n = \frac{2n^2 + 5n + 2}{n^2 + 16}$ برابر با ۲ است؟

$$\frac{2n^2 + 5n + 2}{n^2 + 16} = \frac{2}{1} \rightarrow \cancel{2n^2 + 5n + 2} = \cancel{2n^2} + 2$$

$$\rightarrow \underline{5n} = 2$$

$$\rightarrow \boxed{n = 4} \quad \checkmark \checkmark$$



چندمین جمله از دنباله‌ی $t_n = \frac{\mu^{2n-1} - 1}{n + 3}$ برابر با صفر است؟

فرض صحیح

$$\frac{\mu^{2n-1} - 1}{n + 3} = 0$$

$$\mu^{2n-1} - 1 = 0 \rightarrow \mu^{2n-1} = 1$$

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$\mu^{2n-1} = 0 \rightarrow \mu^{2n-1} = 1 \rightarrow n = \frac{1}{2} = \frac{\mu}{2} \quad \times$$

$$n \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

1, 2, 3, ...



اگر جمله ی $2n + 1$ یک دنباله به صورت $\frac{n+2}{n+4}$ باشد، جمله ی پانزدهم این دنباله کدام است؟

$$a_n = \frac{n+2}{n+4}$$

$$P_{n+1}$$

$$a_{15} = ?$$

$$P_{n+1} = 15 \rightarrow P_n = 14 \rightarrow n = 13$$

$$n = 13 \rightarrow a_{15} = \frac{13+2}{13+4} = \frac{15}{17}$$



مجموع پانزده جمله‌ی اول از دنباله‌ی $t_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ کدام است؟

$$\left(\frac{1}{1} \right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots - \frac{1}{15} + \left(\frac{1}{14} \right)$$

$$\rightarrow 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$$



اگر $b_n = \frac{1}{n}$ ، $a_n = \frac{n+3}{n^2+9}$ دو دنباله باشند، جمله چندم آن‌ها با هم برابر است؟

$$a_n = b_n \rightarrow \frac{n+3}{n^2+9} = \frac{1}{n}$$

$$\rightarrow \cancel{n} + \frac{3}{n} = \cancel{n} + 9 \rightarrow n = 3$$



در دنباله‌ی $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$ مجموع صد جمله‌ی اول کدام است؟

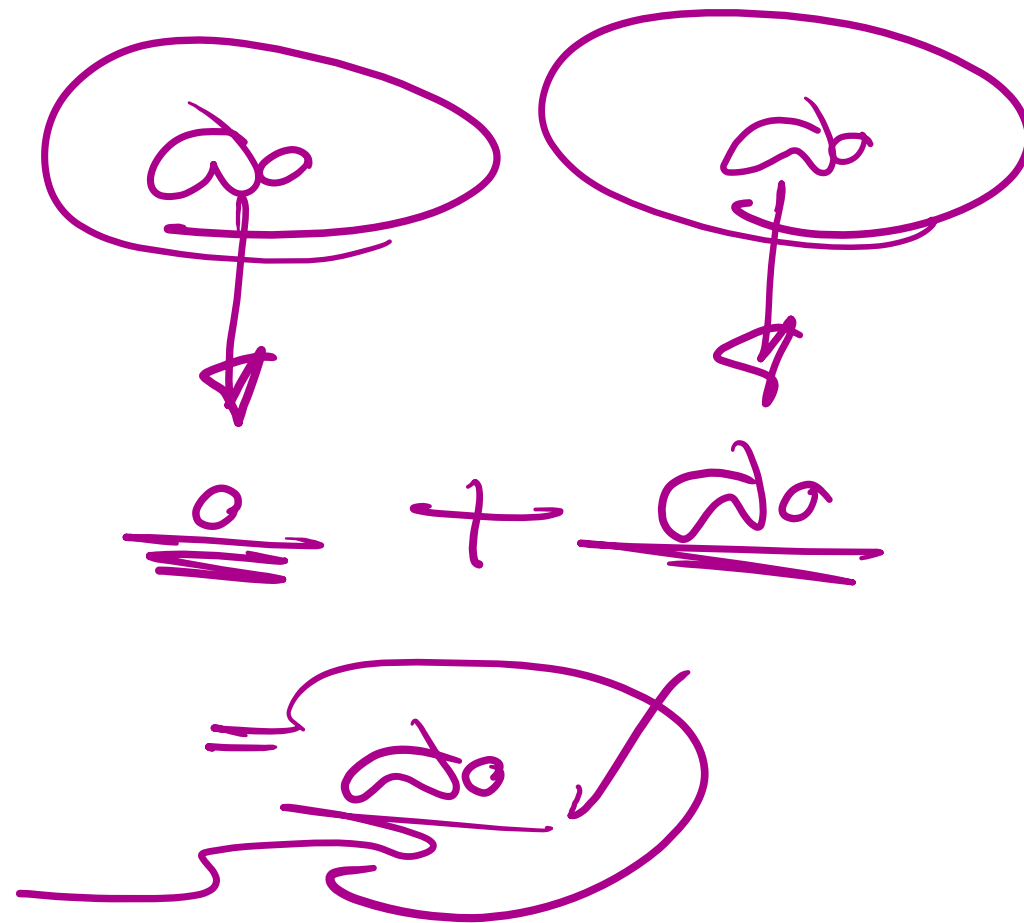
$n=1 \rightarrow a_1 = \frac{1-1}{2} = 0$

$n=2 \rightarrow a_2 = \frac{1+1}{2} = 1$

$n=3 \rightarrow a_3 = \frac{1-1}{2} = 0$

$n=4 \rightarrow a_4 = \frac{1+1}{2} = 1$

⋮



در دنباله $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ مجموع ۲۴ جمله اول را بیابید.

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{-1} = \underline{\underline{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}}$$

$$\cancel{\sqrt{1}(-1)} + \cancel{\sqrt{2} - \sqrt{1}} + \cancel{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \dots + \sqrt{24} - \sqrt{23}$$

$$= -1 + 24 = 23$$



جمله‌ی عمومی الگوی $3, 8, 15, 24, \dots$ کدام است؟

~~$$t_n = (-1)^n \times \frac{-1^n}{1}$$

$$n=1 \rightarrow (-1) \times \frac{-1^1}{1} = 1$$

$$n=2 \rightarrow (-1)^2 \times \frac{-1^2}{2} = +1$$~~

~~$$t_n = 2^n + 1 \quad (1)$$

$$n=1 \rightarrow 2 + 1 = 3$$

$$n=2 \rightarrow 2^2 + 1 = 5$$~~

~~$$t_n = \frac{2n+1}{n} \quad (2)$$

$$n=1 \rightarrow \frac{2+1}{1} = 3$$

$$n=2 \rightarrow \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$$~~

$$t_n = n^2 + 2n \quad (3)$$

$$n=1 \rightarrow 1 + 2 = 3$$

$$n=2 \rightarrow 4 + 4 = 8$$



جمله عمومی دنباله $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \dots$ کدام می تواند باشد؟

~~$$dn = \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (۴)$$

$$\frac{-1}{9}$$~~

~~$$cn = \frac{1 + (-1)^n}{n^2} \quad (۳)$$

$$\frac{1-1}{9} = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{1+1}{14} = \frac{1}{7}$$~~

~~$$bn = \frac{1 + (-1)^n}{2n} \quad (۲)$$

$$\frac{1-1}{9} = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{1+1}{8} = \frac{1}{4} \quad \checkmark$$~~

~~$$an = \frac{(-1)^n}{n^2 + n} \quad (۱)$$

$$n=3 \rightarrow \frac{-1}{9+3}$$~~



الگو خطی

$$a_n = an + b$$



در یک الگوی خطی جملات پنجم و هفتم به ترتیب برابر با ۲۳ و ۳۱ هستند. جمله عمومی آنرا بیابید.

$$\begin{cases} a_5 = 21 \\ a_7 = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7a + b = 21 \\ 5a + b = 23 \end{cases}$$

$$2a = 1$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$5a + b = 23$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$5a + b = 23$$

$$b = 22$$

$$a_n = an + b$$

$$a_n = \frac{1}{2}n + 22$$



در یک الگوی خطی جملات دهم و سیزدهم به ترتیب برابرند با $\frac{7}{2}$ ، $\underline{5}$. جمله نوزدهم این الگو را بیابید.

$$\begin{cases} a_{13} = 5 \\ a_{10} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13a + b = 5 \\ 10a + b = \frac{7}{2} = \underline{\underline{\frac{7}{2}}}$$

~~$$13a = \frac{7}{2}$$~~

$$a = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$$

$$\underline{\underline{10a + b}} = \frac{7}{2} \rightarrow 5 + b = \frac{7}{2} \rightarrow b = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$$

$$a_n = \frac{1}{5}n - \frac{3}{2} \rightarrow a_{19} = \frac{1}{5}(19) - \frac{3}{2} = \frac{19-3}{2} = \underline{\underline{8}}$$



اگر جملات سوم و هفتم یک الگوی خطی برابر با ۸ و ۲۸ باشند، چندمین جمله ی این الگو برابر با ۵۳ خواهد بود

$$\begin{cases} a_7 = 28 \\ a_3 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} va + b = 28 \\ \underline{\underline{3a + b = 8}} \end{cases}$$

$$a = 20$$

$$a = 8$$

$$b = -12$$

$$a_n = 8n - 12$$

$$\frac{a_n = 53}{n = ?} \rightarrow 8n - 12 = 53 \rightarrow \underline{\underline{8n = 65}} \rightarrow \underline{\underline{n = 8.125}}$$



در یک الگوی خطی، هر جمله از رابطه‌ی $tn = 2n + 5$ به دست می‌آید. فاصله‌ی دو جمله‌ی متوالی در این الگو چقدر است؟

$$a_1 = 2 \times 1 + 5 = \underline{\underline{7}}$$

$$a_2 = 2 \times 2 + 5 = \underline{\underline{9}}$$

+2 ✓



$$a_n = \underline{\underline{an + b}}$$

$$a_n = n^r + an$$

$$a_n = \frac{n+1}{n-p}$$

$$a_n = \sqrt{kn+a}$$



تفاضل دو جمله متوالی از الگوی غیر خطی زیر برابر ۲۸ است، آن دو جمله را بیابید؟

$$a_n = ۲n^۲ - ۱$$

$$n < n+1$$

$$a_{n+1} - a_n = ۲۸$$

$$(۲(n+1)^۲ - ۱) - (۲n^۲ - ۱) = ۲۸$$

$$۲(n^۲ + ۲n + ۱) - ۱ - ۲n^۲ + ۱ = ۲n + ۲n + ۲ - ۲n^۲ = ۴n + ۲ = ۲۸$$

$$۴n = ۲۶ \rightarrow n = \frac{۲۶}{۴} = ۶.۵$$

$$n+1 = ۷$$

$$a_۶ < a_۷$$



$$a_{n+1} = r a_n + r$$



در یک رابطه بازگشتی اگر $a_1 = 5$ ، $a_{n+1} = 2a_n + 1$ باشد، جمله پنجم دنباله کدام است؟

$$n=1 \rightarrow a_1 = 2a_1 + 1 = 2(5) + 1 = \underline{\underline{11}}$$

$$n=2 \rightarrow a_2 = 2a_1 + 1 = 2(11) + 1 = \underline{23}$$

$$n=3 \rightarrow a_3 = 2a_2 + 1 = 2(23) + 1 = \underline{47}$$

$$n=4 \rightarrow a_4 = 2a_3 + 1 = 2(47) + 1 = ?$$



در یک دنباله بازگشتی $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ است. اختلاف جمله دهم و جمله چهارم کدام است؟

$$n=1 \rightarrow a_1 = a_1 + 2 + 1 = 4$$

$$n=2 \rightarrow a_2 = a_1 + 4 + 1 = 9$$

$$n=3 \rightarrow a_3 = a_2 + 6 + 1 = 16$$

$$a_n = n^2$$

$$a_{10} = 10^2$$
$$a_{40} = 40^2$$
$$a_{40} - a_{10} = 40^2 - 10^2 = ?$$



در یک دنباله بازگشتی $a_1 = 2$ ، $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & , \text{زوج } n \\ 2a_n & , \text{فرد } n \end{cases}$ است. جمله چهارم دنباله کدام است؟

$$\underline{n=1} \rightarrow a_2 = 2a_1 = 2(2) = \underline{\underline{4}}$$

$$\underline{n=2} \rightarrow a_3 = a_2 + 1 = 4 + 1 = \underline{\underline{5}}$$

$$\underline{n=3} \rightarrow a_4 = 2a_3 = 2(5) = 10$$

$$a_4 = 10$$



اگر $a_1 = 7$ و $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{7}{a_n} \right)$ ، آنگاه a_n کدام است؟

$$n=1 \rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{7}{a_1} \right) = \frac{1}{2} (7+1) = \underline{\underline{4}}$$

$$n=2 \rightarrow a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{7}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left(4 + \frac{7}{4} \right) = ?$$



$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$



در دنباله فیبوناتچی $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ و $a_1 = a_2 = 1$ جمله یازدهم، کدام است؟

$$n=1 \rightarrow a_2 = 1 + 1 = 2$$

$$n=2 \rightarrow a_3 = 2 + 1 = 3$$

$$n=3 \rightarrow a_4 = 3 + 2 = 5$$

$$a_5 = 5 + 3 = 8$$

$$a_6 = 8 + 5 = 13$$

$$a_7 = 13 + 8 = 21$$

$$a_8 = 21 + 13 = 34$$

$$a_9 = 34 + 21 = 55$$

$$a_{10} =$$

$$a_{11} = ?$$



در دنباله فیبوناچی با فرمول بازگشتی $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ و $a_1 = a_2 = 1$ ، اگر جمله پانزدهم برابر ۶۱۰ و جمله هفدهم برابر ۱۵۹۷ باشد، آنگاه جمله هجدهم کدام است؟

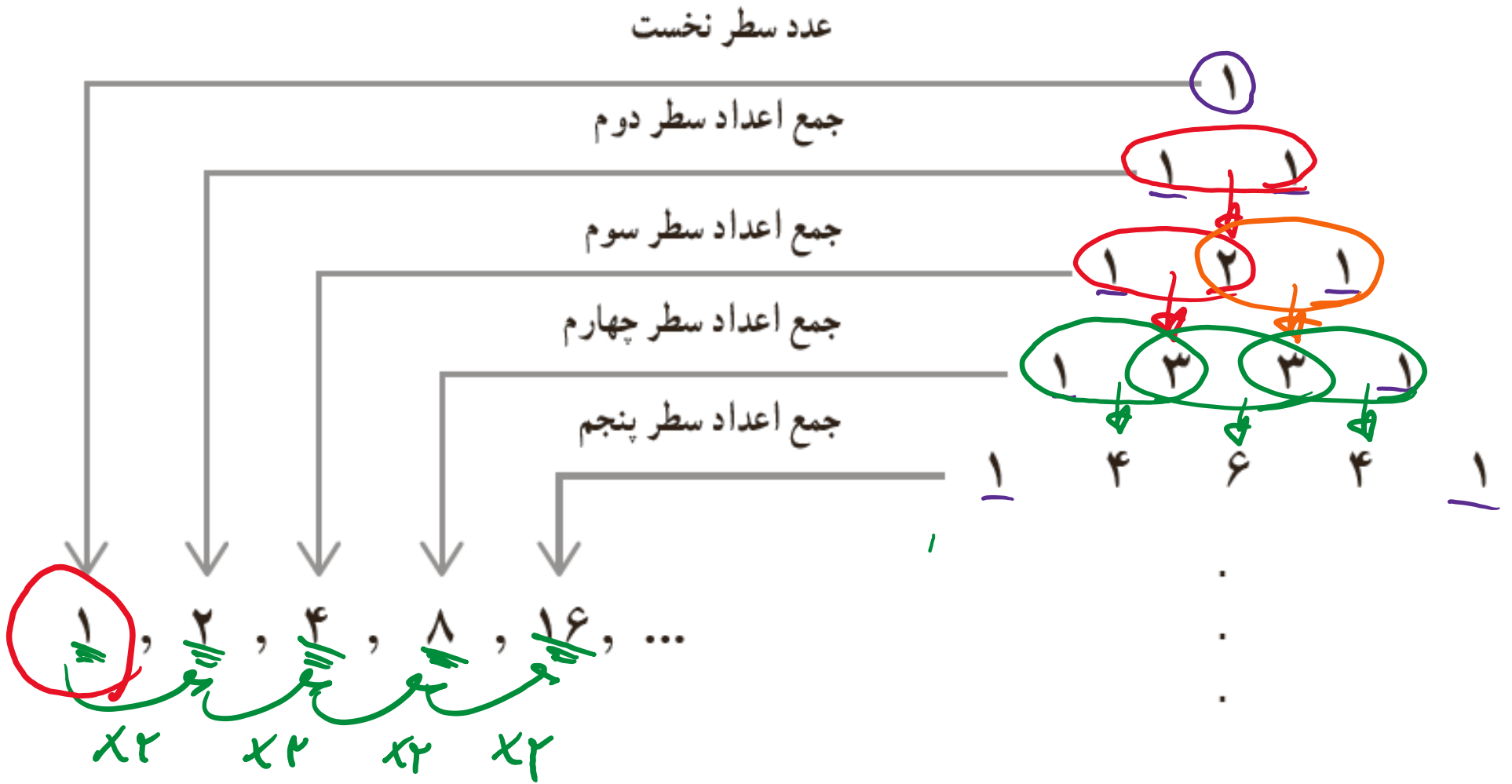
$$a_{15} = 610 \quad a_{17} = 1597 \quad a_{18} = ?$$

$$\rightarrow a_{18} = a_{17} + a_{16} = 1597 + 917 = 2514$$

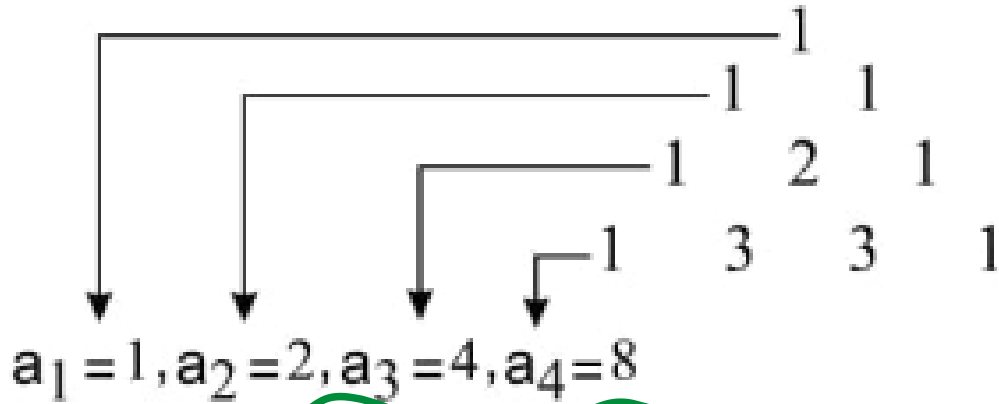
$$\underbrace{a_{17}}_{1597} = a_{16} + \underbrace{a_{15}}_{610} \rightarrow a_{16} = \underline{917}$$



الگو مثلث خیام



باتوجه به الگوی زیر، مجموع جمله های ششم و هفتم کدام است؟

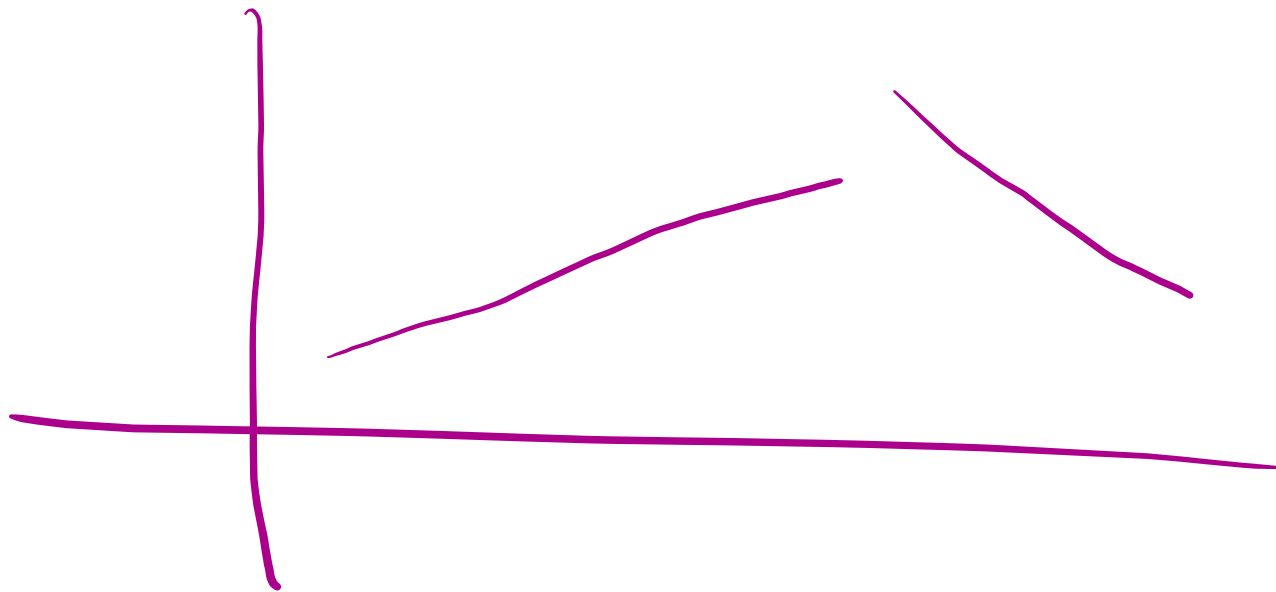


$$3 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 18 + 24 = 42$$



رسم نمودار دنباله

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

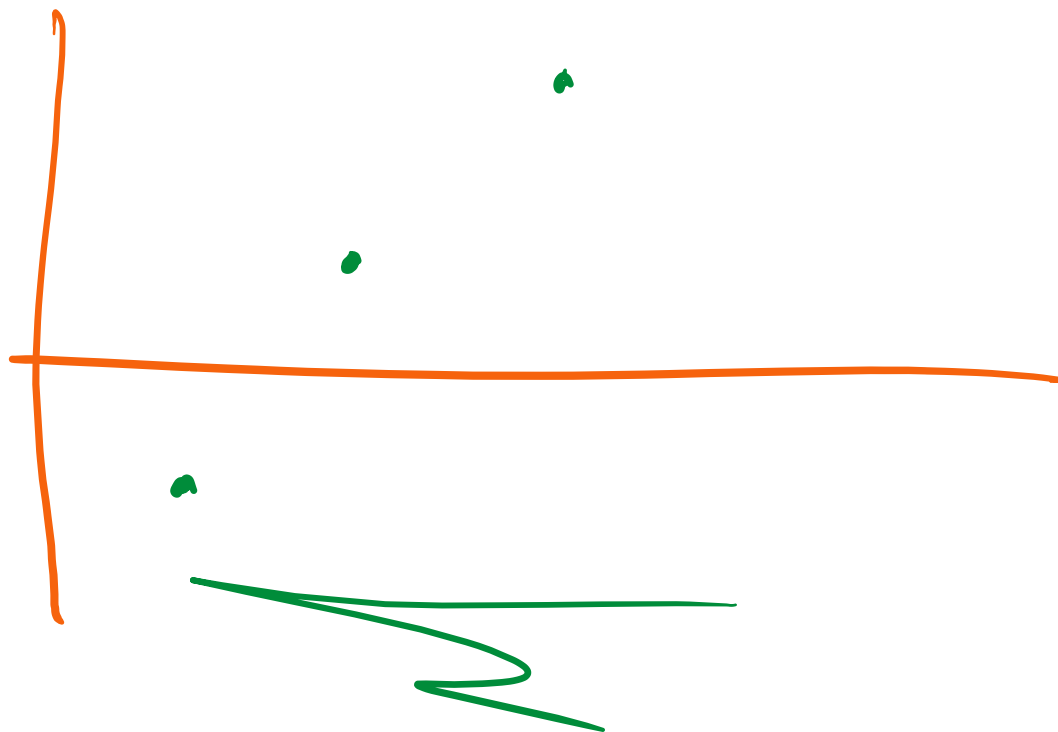
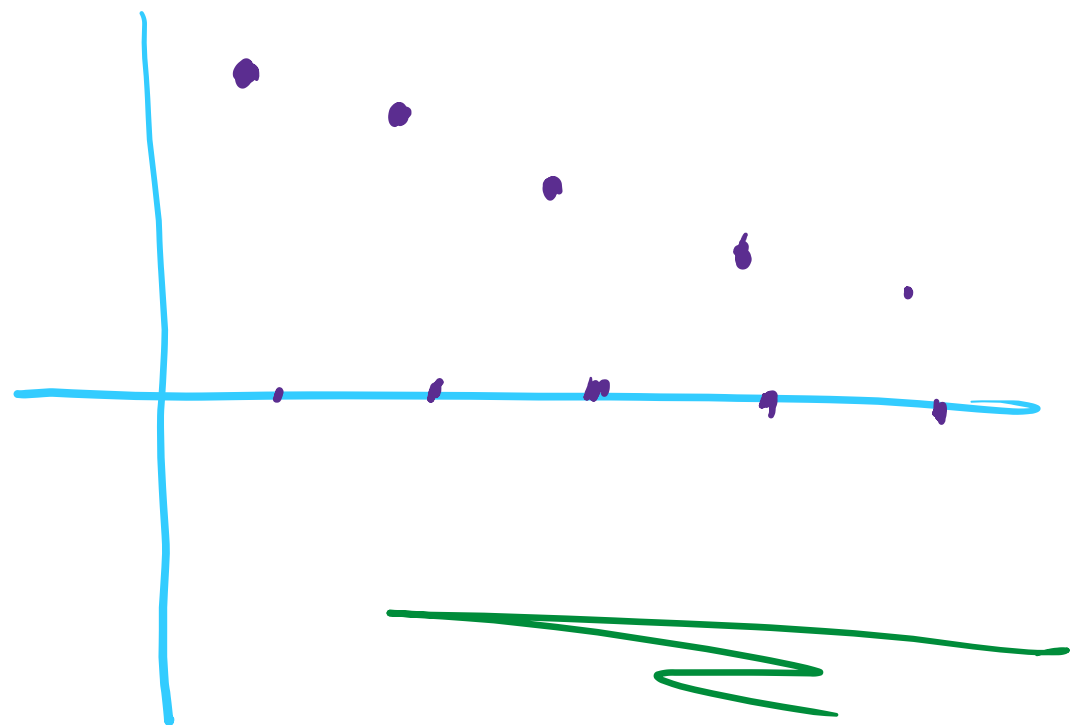


نمودار دنباله‌های زیر را به ازای $n \leq 6$ رسم کنید.

$$-\frac{1}{3} + 5 \quad \frac{-2}{3} + 5$$

الف) $a_n = \frac{-n}{3} + 5$

ب) $b_n = 2n - 3$



خانه ریاضی علی هاشمی

Alihashemi-math.com

