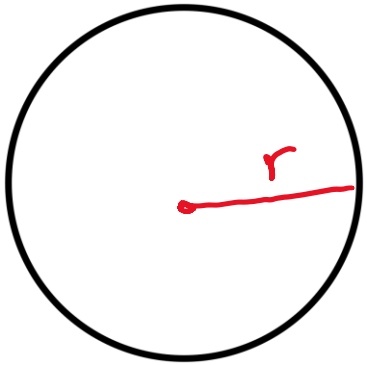


آموزش ریاضی

حجم و مساحت

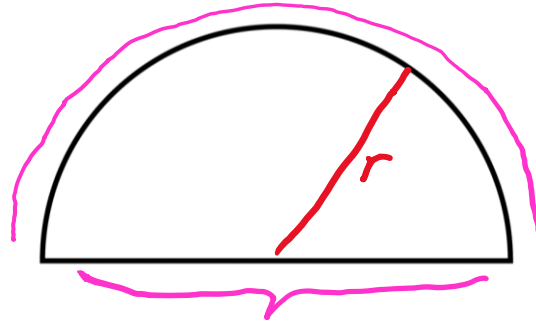
علی هاشمی

## فرمول های حجم و مساحت کره و نیم کره



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

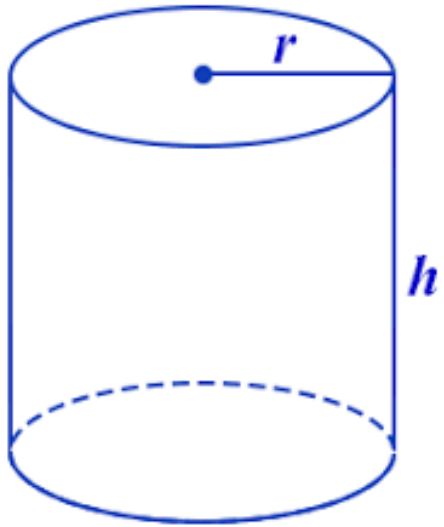
$$S = 4\pi r^2$$



$$V = \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$S = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$$





$$V = \underline{\underline{\pi r^2}} h = \underline{\underline{S}} \cdot h$$

$$S = \underline{\underline{2\pi r}} h = \underline{\underline{P}} \cdot h$$

$$\begin{cases} \text{مساحت دایره} S = \pi r^2 \\ \text{محیط دایره} P = 2\pi r \end{cases}$$



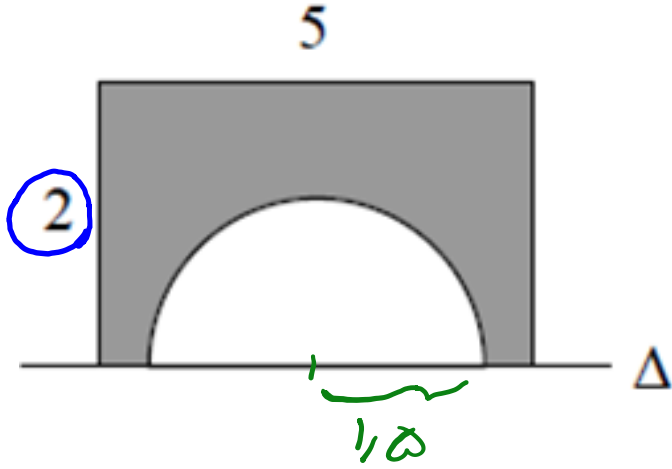
۱- مستطایم الزائره ← مخروط

۲- مسطح ← استوانه

۳- دایره ← کره



۱ - سطح محدود به مستطیل  $۲ \times ۵$  و نیم‌دایره به قطر ۳ واحد، حول خط  $\Delta$  دوران می‌کند. حجم جسم حاصل، چند برابر  $\pi$  است؟



استوانه  $r=۲$   
 $h=۵$

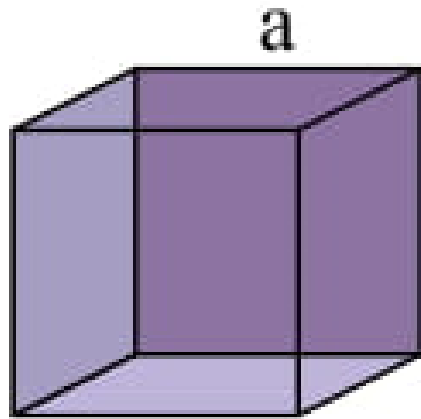
$$V = \pi r^2 h = \pi \times 4 \times 5 = 20\pi$$

کره  $r = \frac{۳}{۲}$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{27}{8} = \frac{9}{2} \pi$$

$$حجم = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = 20\pi - \frac{9}{2}\pi = 15,5\pi \rightarrow 15,5$$



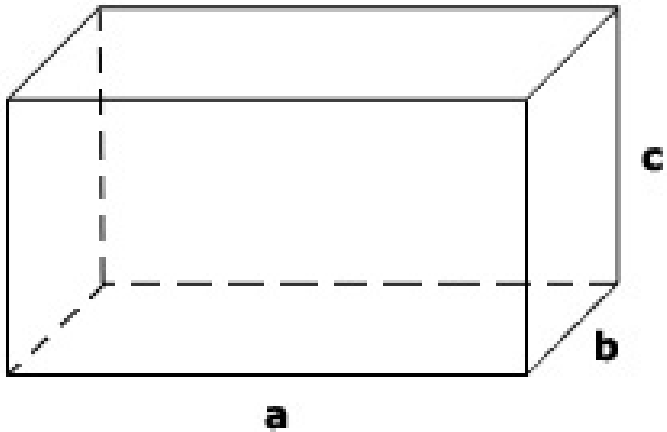


$$V = a^3$$

$$S = 6a^2$$

$$\text{قطر} = a\sqrt{3}$$





$$V = a \cdot b \cdot c$$

→ قطر وجه

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{a^2 + b^2} \\ \sqrt{a^2 + c^2} \\ \sqrt{b^2 + c^2} \end{array} \right.$$

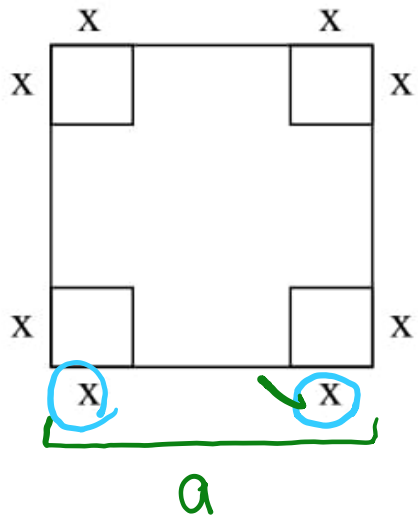
$$\rightarrow \text{قطر اصلی} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



۲- از یک مقوا به ضلع  $a$  گوشه‌های مربع شکل به ضلع  $x$  را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده‌ایم.

چه رابطه‌ای باید بین  $a$  و  $x$  باشد تا بتوان چهار کره به شعاع  $x$  را داخل این جعبه جای داد به طوری که هر کره به کره‌ی مجاورش و به

دیواره‌ی جعبه مماس باشد؟



$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi x^3$$

$$\text{حجم مکعب مستطیل} = a \cdot b \cdot c = (a - 2x)(a - 2x)x = (a - 2x)^2 \cdot x$$

$$(a - 2x)^2 \cdot x > 4x \cdot \frac{4}{3} \pi x^3 \rightarrow (a - 2x)^2 > \frac{16}{3} \pi x^2$$

$$\rightarrow a - 2x > \sqrt{\frac{16}{3} \pi x^2} = 2x \rightarrow a > 4x$$





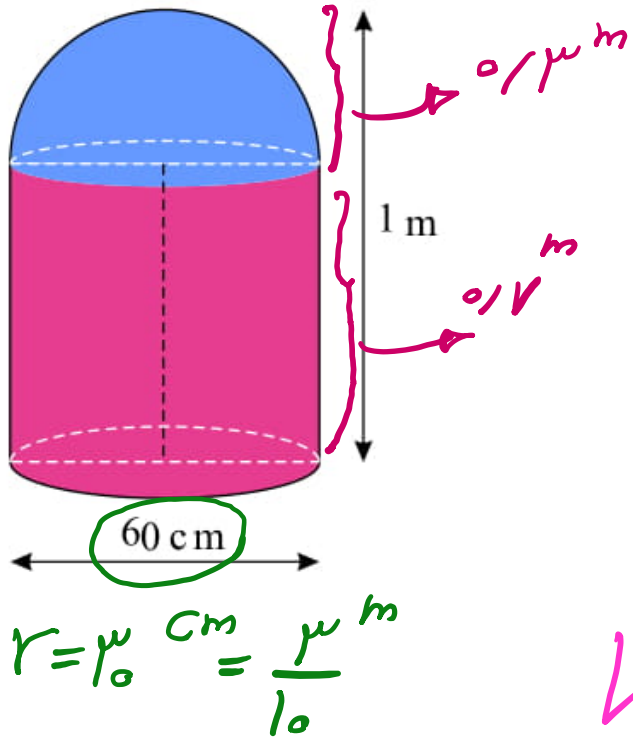
سطح نیم کره‌ای برابر با  $12\pi$  است. حجم آن چقدر است؟

$$S = 4\pi r^2 = 12\pi \rightarrow r^2 = 3 \rightarrow r = \sqrt{3}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3 = 4\pi$$



۴- یک کپسول گاز از قرار گرفتن یک نیم کره روی یک استوانه به صورت زیر درست شده است. اگر قطر دایره‌ی قاعده‌ی کپسول ۶۰ سانتی‌متر و ارتفاع آن یک متر باشد، حجم کپسول را بر حسب متر مکعب به دست آورید.



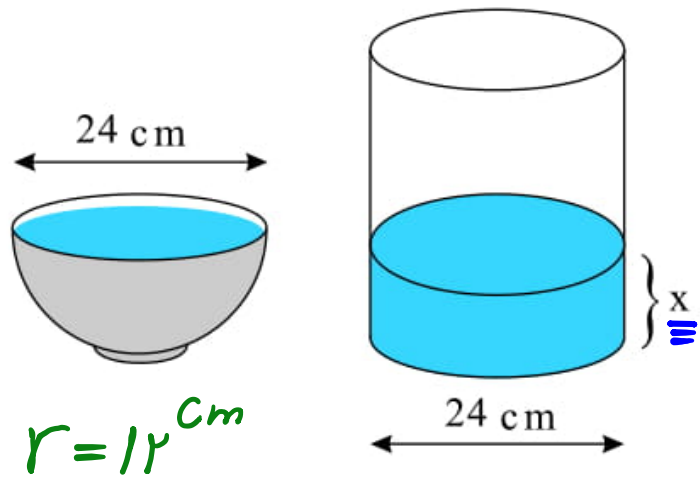
حجم کپسول = حجم استوانه + حجم نیم کره

$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h = \pi \times \left(\frac{30}{100}\right)^2 \times \frac{1}{100} = \frac{9\pi}{1000}$$

$$V_{\text{نیم کره}} = \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times \left(\frac{30}{100}\right)^3 = \frac{11\pi}{1000}$$

$$V_{\text{کپسول}} = \frac{9\pi}{1000} + \frac{11\pi}{1000} = \frac{20\pi}{1000} = \frac{2\pi}{100}$$

۵- پیمانه‌ای به شکل نیم کره و به قطر دهانه‌ای ۲۴ سانتی‌متر را از آب و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای با همان قطر خالی می‌کنیم. آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

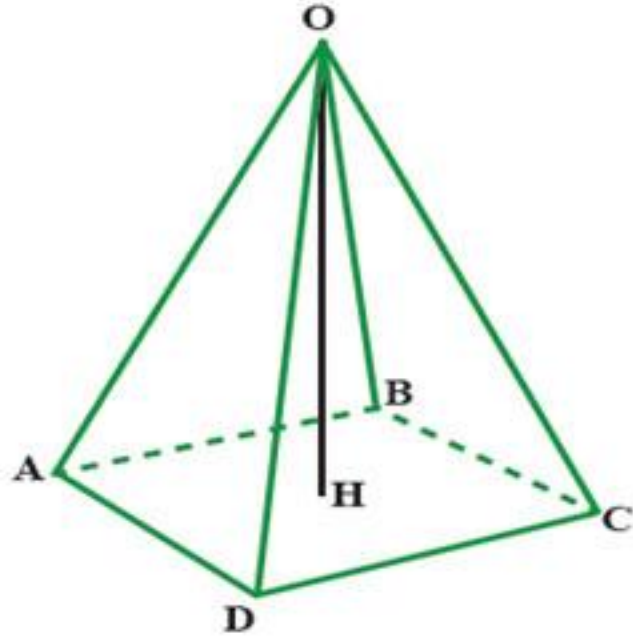


حجم استوانه = حجم نیم کره

$$\frac{2}{3} \times \pi \times 12 \times 12 \times 12 = \pi \times 12 \times 12 \times h$$

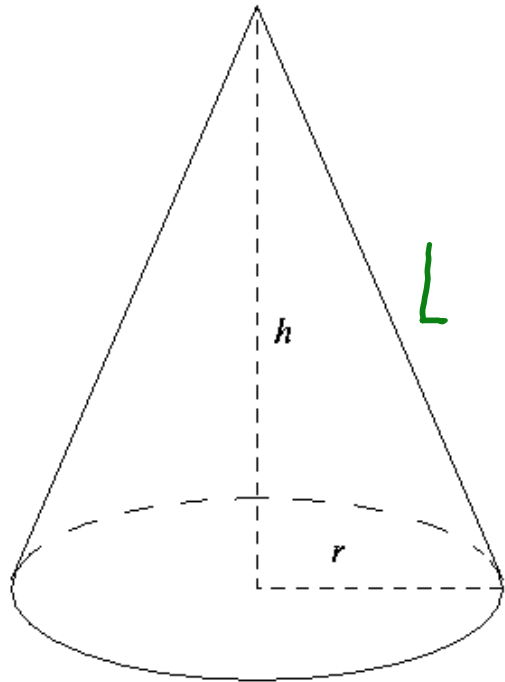
$$\rightarrow h = \frac{2}{3} \times 12 = 8 \rightarrow h = 8$$





$$V = \frac{1}{3} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot h$$





$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$$

$$S = \pi r L = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$$



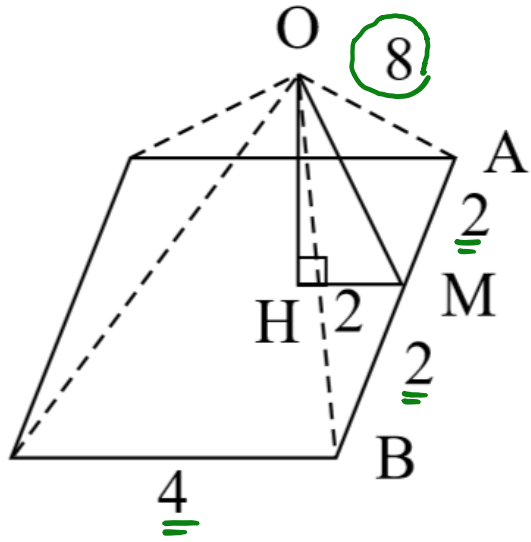
۶- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده‌ی آن مستطیلی به ابعاد ۶ و ۵ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۱۰ سانتی‌متر است.

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \times 10 \times 10 = 100 \text{ cm}^3$$

$$S = a \cdot b = 5 \times 2 = 10$$



۷- حجم هرمی با قاعده‌ی مربع را به دست آورید که ضلع قاعده‌ی آن ۴cm باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الساقینی به ساق‌های ۸cm باشد.



$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$$

$$OA^2 = AM^2 + OM^2 \rightarrow 4^2 = 2^2 + OM^2$$

$$\rightarrow OM = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$$

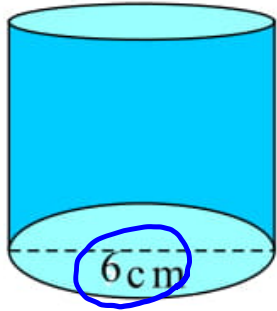
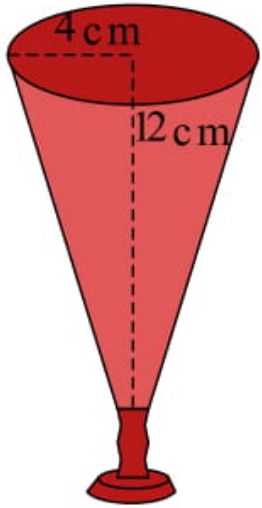
$$OM^2 = HM^2 + OH^2 \rightarrow 12 = 2^2 + OH^2$$

$$\rightarrow OH = \sqrt{12 - 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\rightarrow V = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times \sqrt{8} = \frac{16\sqrt{8}}{3}$$



۸- ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه‌ی  $4\text{cm}$  و به ارتفاع  $12\text{cm}$  را از آب پر می‌کنیم و در لیوانی استوانه‌ای شکل که شعاع قاعده‌ی آن  $6\text{cm}$  است، خالی می‌کنیم. آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می‌آید؟

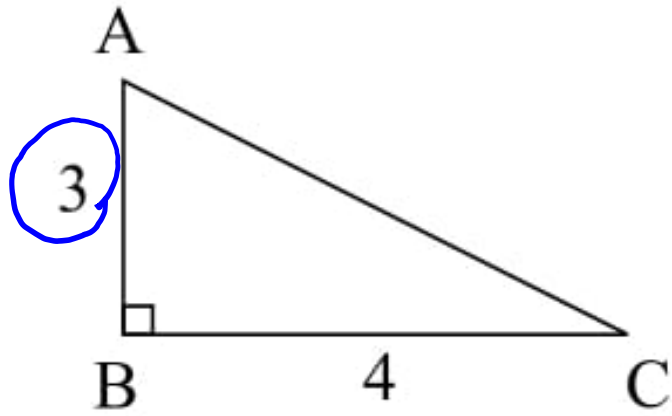


$$V_{\text{مخروط}} = V_{\text{استوانه}}$$

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 4 \times 4 \times 12 = \pi \times 6 \times 6 \times h$$

$$\rightarrow h = \frac{4 \times 4 \times 4}{6 \times 6} = \frac{64}{9} \rightarrow h = \frac{64}{9}$$





$$r = 3$$

$$h = 4$$

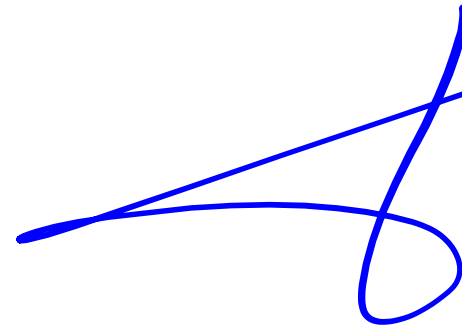
۹- مثلث قائم الزاویه  $ABC$  را حول ضلع  $BC$  دوران می دهیم.

مغزود

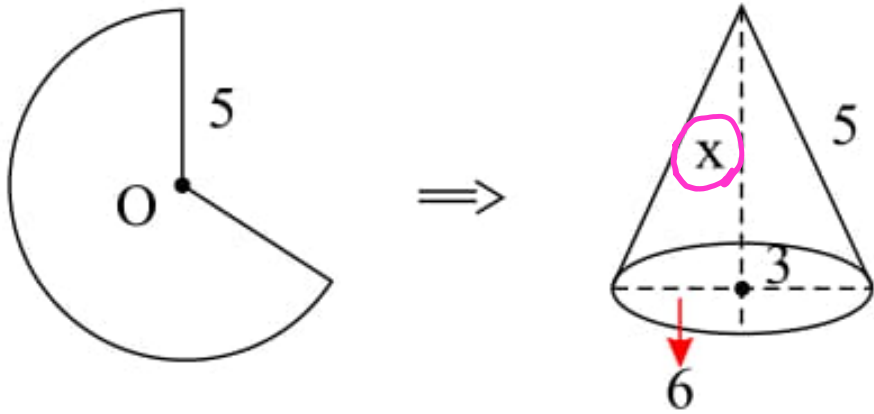
الف) شکل حاصل چه نام دارد؟

ب) حجم آن را بدست آورید.

$$V = \frac{1}{\mu} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{\mu} \times \pi \times 9 \times 4 = 12\pi$$



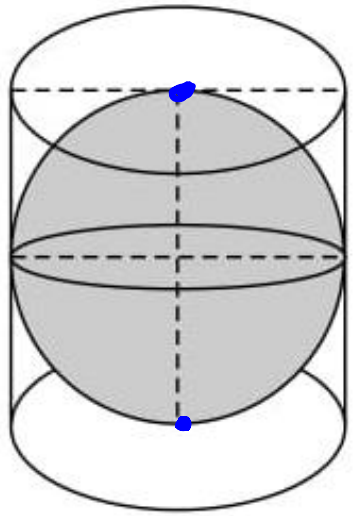
۱۰- با قسمتی از دایره‌ای به شعاع  $5\text{cm}$  مخروطی به قطر قاعده‌ی  $6\text{cm}$  ساخته‌ایم. حجم این مخروط را به دست آورید.



$$x = h = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi$$

۱۱- کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع ۱۰ سانتی‌متر محاط شده است.



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = \frac{500}{3} \pi$$

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 250\pi$$

حجم کره را بدست آورید.

حجم استوانه را بدست آورید.

حجم فضای بین کره و استوانه را بدست آورید.

①  $h = 10 \text{ cm}$

②  $r_{\text{کره}} = r_{\text{استوانه}} = \frac{10}{2} = 5$

$$V = 250\pi - \frac{500}{3}\pi = \frac{250}{3}\pi$$

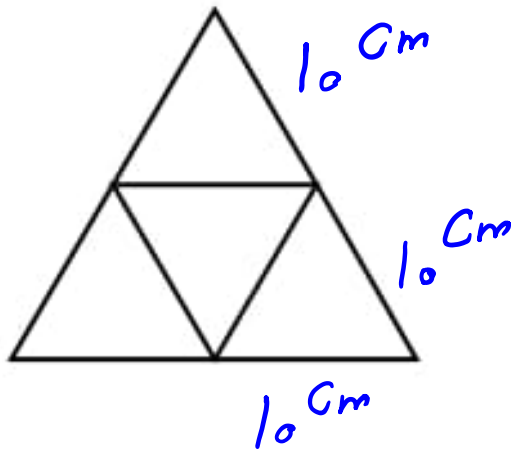


۱۲- مساحت یک کلاه (عرق چین) به شکل نیم کره و به شعاع ۱۰ سانتی متر را محاسبه کنید. ( $\pi = ۳$  و فرمول نوشته شود)

$$V = \frac{1}{3} \pi r^3 \rightarrow S = 2\pi r^2 + \underline{\underline{\pi r^2}} = 2\pi r^2$$

$$\rightarrow S = 2 \times 3 \times 10^2 = 600$$

۱۳- با سطح مثلث شکلی، به ضلع  $20\text{ cm}$  یک چهاروجهی منتظم ساخته‌ایم. مساحت جانبی آن کدام است؟

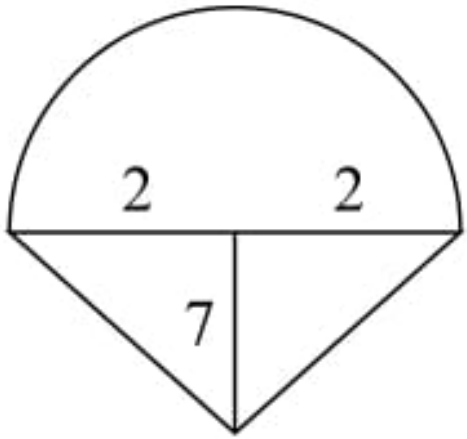


$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{10^2 \times \sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$$

$$S_{\text{جانبی}} = 3 \times 25\sqrt{3} = 75\sqrt{3}$$



۱۴- حجم بستنی قیفی شکل روبه‌رو را به دست آورید. ( $\pi = 3$ )



$$V_{\text{کل}} = V_{\text{مخروط}} + V_{\text{نیم‌کره}}$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 7 = 28$$

$$V_{\text{نیم‌کره}} = \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 2^3 = 16$$

$$V_{\text{کل}} = 28 + 16 = 44$$



$$h = 2a$$

$$r = 2a$$

۱۵- استوانه‌ای به ارتفاع  $2a$  و قطر  $4a$  داریم:

(الف) مساحت جانبی را به دست آورید.

(ب) مساحت کل را به دست آورید.

(ج) حجم را به دست آورید.

$$۱) S_{\text{جانبی}} = 2\pi r h = 2 \times \pi \times 2a \times 2a = 8a^2 \pi$$

$$۲) S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + 2\pi r^2 = 8a^2 \pi + 2\pi \cdot 4a^2 = 16a^2 \pi$$

$$۳) V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4a^2 \cdot 2a = 8a^3 \pi$$



۱۶- در یک مکعب مستطیل طول قطرهای وجه به ترتیب  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{7}$  و  $\sqrt{11}$  است. طول قطر اصلی را به دست آورید.

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2} \rightarrow a^2 + b^2 = 2$$

$$\sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{7} \rightarrow a^2 + c^2 = 7$$

$$\sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{11} \rightarrow b^2 + c^2 = 11$$

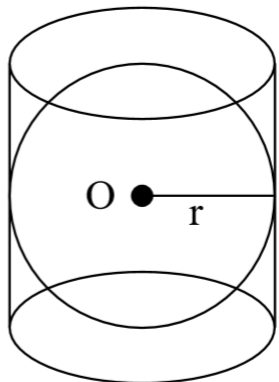
$$\rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 20 \rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 10$$

$$\text{قطر اصلی} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{10} = \sqrt{10}$$





۱۷- کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده ۶ و ارتفاع ۱۵ محاط شده است، حجم فضای این کره و استوانه چقدر است؟ ( $\pi = ۳$ )



$$\text{کره } r = ۳ \rightarrow V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot ۳ \times ۳^3 = ۱۰۸ \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{l} r = ۳ \text{ استوانه} \\ h = ۱۵ \text{ استوانه} \end{array} \rightarrow V = \pi r^2 h = ۳ \times ۹ \times ۱۵ = ۴۰۵ \quad \checkmark$$

$$\text{فضای خالی} \rightarrow V = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = ۴۰۵ - ۱۰۸ = ۲۹۷$$



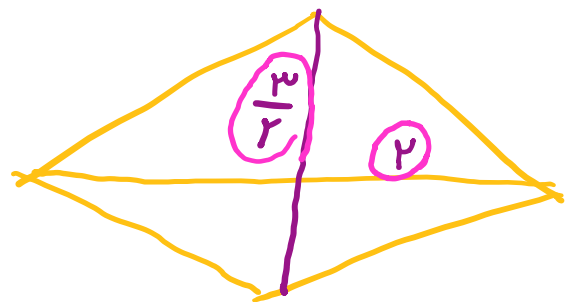
۱۸- شعاع قاعده مخروطی را دو برابر و ارتفاع آن را نصف می‌کنیم، حجم مخروط جدید چند برابر مخروط اولیه است؟

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{\mu} \pi r_2^2 h_2}{\frac{1}{\mu} \pi r_1^2 h_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \times \frac{h_2}{h_1} = \mu^2 \times \frac{1}{\mu} = \mu$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \cdot \frac{h_2}{h_1} = \mu^2 \times \frac{1}{\mu} = \mu$$



۱۹- اگر یک لوزی به قطرهای ۳ و ۴ را حول قطر بزرگ آن دوران می‌دهیم، حجم شکل حاصل را به دست آورید.

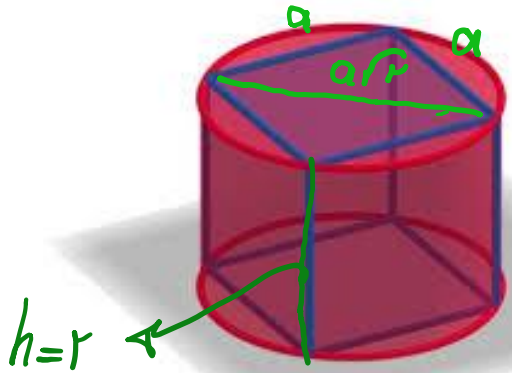


$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 1^2 \times \frac{9}{4} \times 2 = \frac{9}{2} = \underline{\underline{\frac{4}{1} 5}}$$

$$\text{حجم کل} = 2V_{\text{مخروط}} = 2 \times \frac{9}{2} = 9$$



۲۰- مکعبی به قطر  $\sqrt{12}$  را درون استوانه‌ای محاط کرده‌ایم. حجم استوانه کدام است؟



$$\begin{aligned} \text{قطر مکعب} &= a\sqrt{3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \rightarrow a = 2 \quad \checkmark \\ \text{قطر استوانه} &= a\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \rightarrow r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

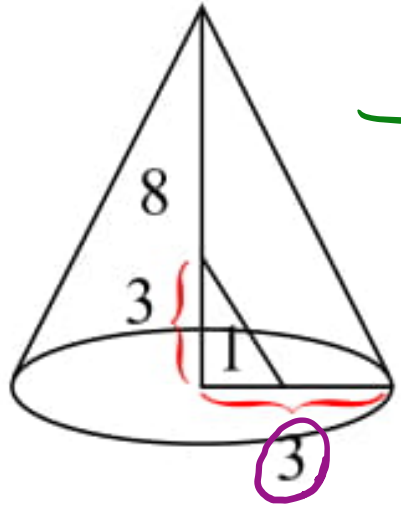
$$\begin{aligned} h &= 2 \\ r &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$V = \pi r^2 h = \pi \times (\sqrt{2})^2 \times 2 = 4\pi$$



۲۱- مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع ۳ و ارتفاع ۸ و مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگری به ضلع ۱ و ارتفاع ۳ که داخل آن قرار دارد را حول ضلع ۸

دوران داده‌ایم. حجم بین دو شکل برابر است با



مخروط بزرگ  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 8 = 24\pi$  ✓

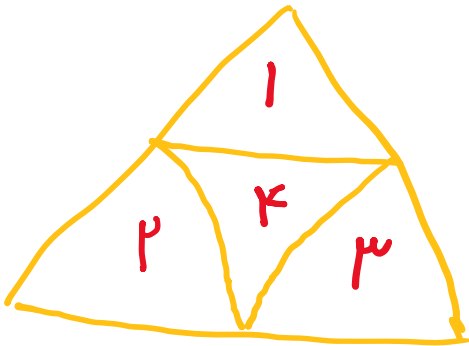
مخروط کوچک  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 1 \times 3 = \pi$  ✓

حجم خالی  $V = 24\pi - \pi = 23\pi$

۲۲- مساحت کل هرم منتظمی که قاعده آن مثلث و طول هر یال آن ۶ سانتی متر است، چند سانتی متر مربع است؟

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \times \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \quad \checkmark$$

$$S_{\text{کل}} = \underline{\underline{4}} \times 9\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$



۲۳- حجم کره‌ای به شعاع  $R$  برابر با حجم مخروطی به شعاع قاعده‌ی  $R$  است. ارتفاع مخروط چند برابر شعاع کره است؟

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot h \rightarrow R = h$$

$$\rightarrow \frac{h}{R} = \frac{4}{3}$$



۲۴- اگر مساحت کره‌ای  $16\pi$  باشد، حجم آن کره کدام است؟

$$S = 4\pi r^2 = 16\pi \rightarrow r^2 = 4 \rightarrow r = 2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3 = \frac{32\pi}{3}$$





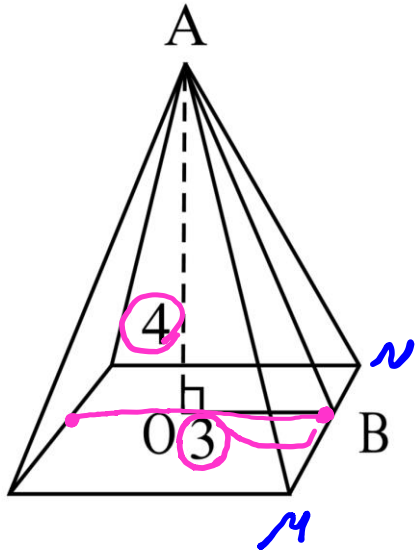
۲۵- شعاع قاعده‌ی استوانه‌ای برابر با شعاع یک کره و ارتفاع آن  $\frac{3}{4}$  قطر همان کره است. حجم استوانه چه کسری از حجم کره

$$\frac{\text{حجم استوانه}}{\text{حجم کره}} = \frac{\pi r^2 h}{\frac{4}{3} \pi r^3} \rightarrow \begin{cases} r = \text{شعاع استوانه} \\ h = \frac{3}{4} \cdot 2r = \frac{3}{2} r \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\cancel{\pi} \times \cancel{r^2} \times \frac{3}{2} \cancel{r}}{\frac{4}{3} \times \cancel{\pi} \times \cancel{r^3}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{8}$$



۲۶- یک هرم منتظم با قاعدهٔ چهارضلعی و مساحت قاعدهٔ ۳۶ سانتی متر مربع داریم. اگر ارتفاع هرم ۴ سانتی متر باشد، مساحت جانبی هرم چند سانتی متر مربع است؟



$$S = a^2 = 36 \rightarrow \underline{\underline{a = 6}}$$

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} \times \underbrace{AB}_6 \times \underbrace{MN}_6 = 15$$

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 \rightarrow AB = \sqrt{14 + 9} = 5$$

$$S_{\text{جانبی}} = 4 \times 15 = 60$$

۲۷- ارتفاع مخروطی سه برابر شعاع قاعده آن است اگر حجم مخروط  $128\pi$  باشد ارتفاع آن کدام است؟

$$h = 3r$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \rightarrow 128\pi = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times 3r$$

$$\rightarrow r^3 = 128 \rightarrow r = \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{64 \times 2} = 4\sqrt[3]{2}$$

$$\rightarrow h = 3\sqrt[3]{128} = 12\sqrt[3]{2}$$



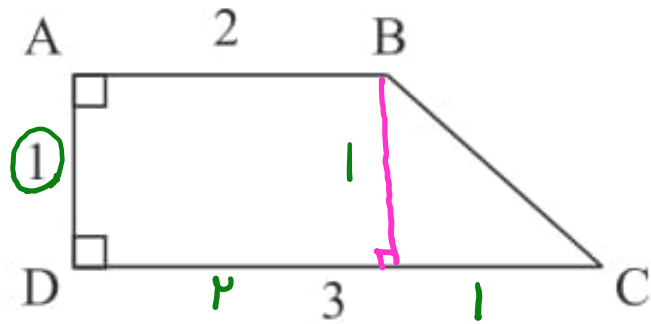
۲۸- مساحت جانبی هرم منتظمی که قاعده آن مثلث و طول هر یال آن ۴ سانتی متر می باشد، چند سانتی متر مربع است؟

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

$$S_{\text{جانبی}} = 3 \times 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$



۲۹- حجم حاصل از دوران ذوزنقه مقابل، حول ضلع  $DC$  چند سانتی متر مکعب است؟



$$\vec{V} = \vec{V}_{\text{استوانه}} + \vec{V}_{\text{مخروط}}$$

$$\vec{V}_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h = \pi \times 1 \times 2 = 2\pi$$

$$\vec{V}_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 1 \times 1 = \frac{1}{3} \pi$$

$$\vec{V} = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$$



۳۰- مساحت کل نیم کره‌ای توپُر به شعاع  $R$  چند برابر مساحت کره‌ای به شعاع  $R$  است؟

$$\frac{\text{گینیرین}}{\frac{S}{2}} = \frac{2\pi R^2 + \pi R^2}{\pi R^2} = \frac{3\pi R^2}{\pi R^2} = \frac{3}{1}$$



خانه ریاضی علی هاشمی

Alihashemi-math.com



Freemath



Alihashemi\_math