

آموزش ریاضی

عبارت های جبری

علی هاشمی

$$P(x) = x^{\nu} + \mu x$$

$$P(\nu) = \nu^{\nu} + \mu(\nu) = \nu + \nu = 10 \quad \checkmark$$

$$\underline{\underline{K(P)}} = P^{\mu} + \nu P$$

$$\underline{\underline{K(1)}} = (1)^{\mu} + \nu(1) = \mu \quad \checkmark$$



اگر $P(x) = x(x - 1)(x - 2)$ ، آنگاه حاصل هریک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } P(0) = 0(0-1)(0-2) = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{ب) } P(1) = 1(1-1)(1-2) = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{ج) } P(2) = 2(2-1)(2-2) = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{د) } P(3) = 3(3-1)(3-2) = 6 \quad \checkmark$$



$$(x+y)(x+y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(a-b)(a-b) = (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(x-a)^2 = x^2 + a^2 - 2(x)(a) = x^2 + a^2 - 2ax$$

$$(x+a)^2 = x^2 + a^2 + 2(x)(a) = x^2 + a^2 + 2ax$$



$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(x-3)(x+3) = x^2 - 9$$

$$(y+2)(y-2) = y^2 - 4$$



$$(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c) \cdot a + bc$$

$$(x+1)(x+2) = x^2 + 1x + 2$$

$$(x-1)(x-2) = x^2 - 2x + 2$$

$$(x+3)(x-2) = x^2 - 1x - 6$$



۱- حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

$$\text{الف) } \left(\frac{1}{4} - x\right) \left(\frac{1}{4} + x\right) = \frac{1}{16} - x^2$$

$$\text{ب) } (5x + \underline{4})(5x + \underline{3}) = 25x^2 + 35x + 12$$



$$د) \underline{(x + y - z)} \underline{(x + y + z)} = (x + y)^r - z^r = x^r + y^r + yx + xy - z^r$$

$$ه) \underline{(x - 1)(x + 1)}(x^r + 1) = (x^r - 1)(x^r + 1) = x^{2r} - 1$$



$$a^r - b^r = (a-b)(a+b)$$

$$x^r - y^r = (x-y)(x+y)$$

$$x^r - 11 = (x-9)(x+9)$$

$$x^r - 1^r = (x - \sqrt{r})(x + \sqrt{r})$$

$$x^r - y^r = \frac{(x-y)}{y} (x+y) = (\sqrt{x-y})(\sqrt{x+y})(x+y)$$



نویس: $x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4)$

نویس: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

نویس: $x^2 + 5x + 9 = (x + 2)(x + 3)$



۲- عبارات زیر را به کمک اتحادها تجزیه کنید.

$$\text{الف) } a^2 - 8a + 15 = (a - 3)(a - 5)$$

$$\text{ج) } x^2 + 10x + 24 = (x + 4)(x + 6)$$

$$\text{د) } x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$$

$$\text{ه) } 4ax^2 - a = a(4x^2 - 1) = a(2x - 1)(2x + 1)$$



$$و) \underline{x^2} - 13x + 36 = (\underline{x} - 9)(\underline{x} - 4)$$

$$ز) \underline{x^2} - 12x + 36 = (x - 6)(x - 6) = (x - 6)^2$$

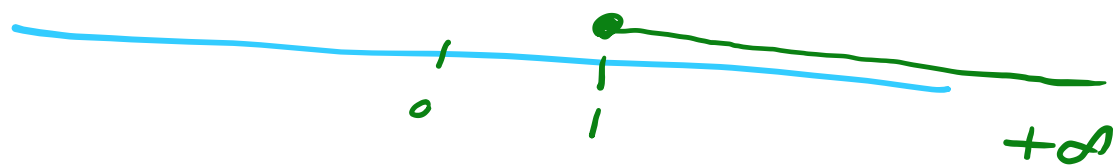
$$ح) (x + y)^2 - 9 = (x + y + 3)(x + y - 3)$$

$$س) \underline{x^4} - 5x^2 + 4 = (x^2 - 4)(x^2 - 1) = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$$



$$2x + 1 \geq \sqrt{x + 1}$$

$$2x - \sqrt{x} \geq 1 - 1 \rightarrow \sqrt{x} \geq 1 \rightarrow x \geq 1$$



۳- مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} \text{الف) } 2(x-3) + 5 < 5-x &\rightarrow 2x - 6 + 5 < 5 - x \rightarrow 2x - 1 < 5 - x \\ &\rightarrow 2x + x < 5 + 1 \rightarrow 3x < 6 \rightarrow x < 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } 3 - 2x \geq 5(3 - 2x) &\rightarrow 3 - 2x \geq 15 - 10x \rightarrow -2x + 10x \geq 15 - 3 \\ &\rightarrow 8x \geq 12 \rightarrow x \geq \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$



$$ج) \frac{y-3}{4} - 1 \geq \frac{y}{2}$$

$\times 4$

$$y-3-4 \geq 2y$$

\rightarrow

$$y-7 \geq 2y$$

$$y-2y \geq 7$$

$$\rightarrow -y \geq 7$$

$\times (-1)$
عقب

$$y \leq -7$$



۴- عبارتهای کلامی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) اگر پول علی را سه برابر کنیم حداقل ۳۰۰ تومان از دو برابر پولش بیش تر می شود.

$$3x > 2x + 300$$

ب) مجموع نصف عدد a و چهار برابر عدد b حداکثر ۶ واحد است.

$$\frac{1}{2}a + 4b \leq 6$$



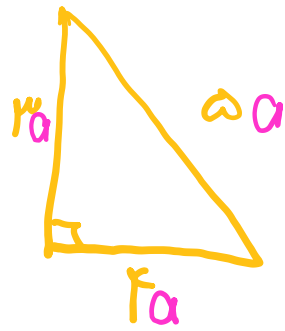
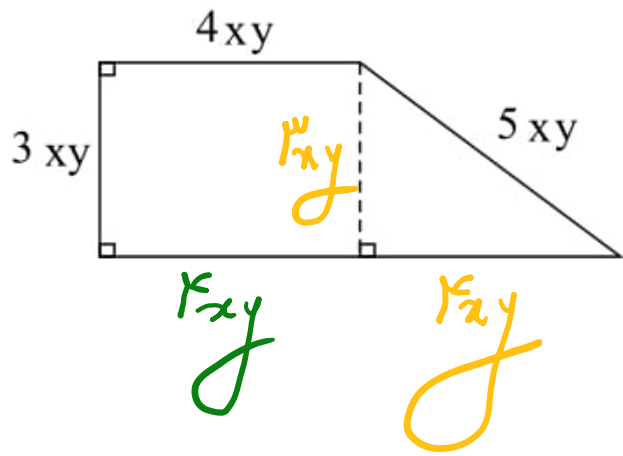
۵- اگر $A = 2x^3 - 1$ و $B = \underline{\underline{2x^3 + 1}}$ باشد، آن گاه حاصل عبارت $3A^2 + 3B^2 - 6AB$ چه قدر است؟

$$3A^2 + 3B^2 - 6AB = 3(A^2 + B^2 - 2AB) = 3(A - B)^2$$

$$\rightarrow 3\left(\cancel{2x^3} - 1 - \cancel{2x^3} - 1\right)^2 = 3(-2)^2 = 3 \times 4 = 12$$



۶- محیط و مساحت هر شکل را بیابید.



$$P = 3xy + 4xy + 5xy + 1xy = 13xy$$

$$S = 3xy \cdot 4xy + \frac{1}{2} \times 3xy \cdot 4xy = 12x^2y^2 + 6x^2y^2 = 18x^2y^2$$

۷- عبارتهای جبری زیر را تجزیه کنید.

$$a^r - 2a^r + a = a(a^r - 2a^{r-1} + a^{r-2}) = a(a-1)(a-1) = a(a-1)^2$$

$$2x^r + 4x^r + 2x = 2x(x^r + 2x^{r-1} + 1) = 2x(x+1)(x+1) = 2x(x+1)^2$$

$$20x^r + 30x^r + 9x^r = x^r(20x^r + 30x^{r-1} + 9x^{r-2}) = x^r(20x+30+9/x)$$

$$(20x+30) = 20x^r + 30x^{r-1} + 9x^{r-2}$$



$$\left(\frac{b}{r}\right)^r$$

۸- با افزودن کدام عدد به عبارت $\frac{1}{4}x^2 - 6x + \frac{1}{4}$ مربع یک دو جمله ای حاصل می شود؟

$$\underline{1}x^r + \underline{4}x \quad \left(\frac{4}{r}\right)^r = 4 \quad x^r + 4x + 4 - 4 = (x+2)^r - 4$$

$$\underline{1}x^r + \underline{4}x + \underline{1} \quad \left(\frac{4}{r}\right)^r = 9 \quad x^r + 4x + 9 - 1 = (x+3)^r - 1$$

$$\rightarrow \left(\frac{b}{r\sqrt{a}}\right)^r$$

$$\underline{1}x^r - \underline{4}x + \frac{1}{4} \quad \left(\frac{-4}{r\sqrt{4}}\right)^r = \frac{9}{4} \quad 1x^r - 4x + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^r - \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} = 2$$



$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$



۹- حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحادها بدست آورید.

$$\begin{aligned}(2x + y - 3z)^2 &= 4x^2 + y^2 + 9z^2 + 2(2xy) + 2((2x)(-3z)) + 2(y(-3z)) \\ &= 4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy - 12xz - 6yz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{x} + 2\right)^2 &= x^2 + \frac{1}{x^2} + 4 + 2\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) + 2(x \cdot 2) + 2\left(\frac{1}{x} \cdot 2\right) \\ &= x^2 + \frac{1}{x^2} + \underbrace{4 + 2}_{6} + 4x + \frac{4}{x}\end{aligned}$$



۱۰- اگر $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 27$ ، مقدار $\underbrace{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}}_B$ کدام است؟

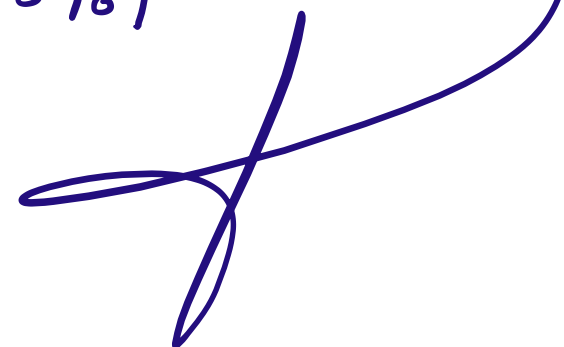
$$A \cdot B = \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} \right) \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} \right) = (x+1) - (x-2)$$

$$\rightarrow 27 \times B = \cancel{x+1} - \cancel{x-2} = -1$$

$$\rightarrow B = \frac{-1}{27}$$



$$101^r = (100 + 1)^r = 10000 + 1 + 100 = 10100$$



۱۱- حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید. (با استفاده از اتحاد)

$$97 \times 103 = (100 - 3)(100 + 3) = 10000 - 9 = 9991$$

$$125^2 - 25^2 = (120 - 20)(120 + 20) = 100 \times 140 = 14000$$

$$105^2 = (100 + 5)^2 = 10000 + 20 + 100 = 11020$$



۱۲- محاسبات زیر را به کمک اتحادها انجام دهید.

$$10^2 - 79^2 = (10 - 79)(10 + 79) = 1 \times 159 = 159$$

$$375^2 - 300^2 - 75^2 = (300 + 75)^2 - 300^2 - 75^2 = \cancel{300^2} + \cancel{75^2} + 42000 - \cancel{300^2} - \cancel{75^2}$$

$\rightarrow 42000$

$$41 \times 52 = (50 - 9)(50 + 9) = 2500 - 81 = 2419$$



۱۳- حاصل عبارتهای زیر را به کمک اتحادها بدست آورید.

$$(x + \delta)(x^3 - 12\delta)(x^2 - \overset{\delta^3}{\delta}x + 2\delta)$$

$$\underbrace{(x + \delta)(x - \delta)}_{x^2 - \delta^2} \underbrace{(x^2 + \delta x + 2\delta)(x^2 - \delta x + 2\delta)}_{x^4 - \delta^4} = (x^2 - \delta^2)(x^2 + \delta^2)$$

$$= x^4 - \delta^4$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$



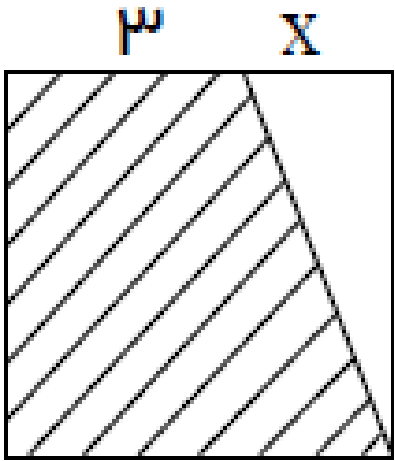
$$\sqrt{(\sqrt{x}-1)^x} \sqrt{x+\sqrt{x}} = \sqrt{(\sqrt{x}-1)} \cdot \sqrt{(\sqrt{x}+1)^x}$$

$$\sqrt[x]{\sqrt{x}-1} \cdot \sqrt[x]{\sqrt{x}+1} = \sqrt[x]{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \sqrt[x]{x-1} = 1$$

$$\underline{x+\sqrt{x}} = 1+x+\sqrt{x} = (\underline{1+\sqrt{x}})^x = (\sqrt{x+1})^x$$



۱۵- در مربع زیر، اگر مساحت قسمت هاشورخورده ۲۰ باشد، x کدام است؟



$x + 3$

$$\text{مربع} = (x+3)^2$$

$$\text{مربع} = \frac{1}{2} x(x+3)$$

$$x+3$$

$$(x+3)^2 - \frac{1}{2} x(x+3) = 20 \rightarrow x^2 + 6x + 9 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x = 20$$

$$\rightarrow 2x^2 + 12x + 18 - x^2 - 3x = 40 \rightarrow x^2 + 9x - 22 = 0$$

$$\rightarrow (x+11)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -11 \times \\ x = 2 \checkmark \end{cases}$$



$$\underline{2x^5 + 2x^4 + 2x^3} + x^2 + x + 1 = 2x^3 \left(\underline{x^2 + x + 1} \right) + \underline{x^2 + x + 1}$$

$$\rightarrow (x^2 + x + 1) (2x^3 + 1)$$

$$x^2 + x + 2y^2 + 2y + 2xy - 2 = \underline{x^2 + 2y^2 + 2xy} + \underline{x + 2y - 2}$$

$$\underline{(x + 2y)^2} + \underline{(x + 2y) - 2}$$

$$\rightarrow (x + 2y + 1)(x + 2y - 1)$$



۱۷- حداقل مقدار n که:

$$\frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{n \times (n+2)} > \frac{100}{1397}$$

فرد

$n=3$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} > \frac{100}{1397}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} > \frac{100}{1397} \rightarrow \frac{n+2-3}{3(n+2)} > \frac{100}{1397}$$

$$\frac{n-1}{3(n+2)} > \frac{100}{1397} \rightarrow 1397(n-1) > 300(n+2) \rightarrow 1097n > 1998 \rightarrow n > \frac{1998}{1097}$$

$$n > \frac{1998}{1097} \rightarrow n > 1.82 \rightarrow n \geq 2$$



$$\frac{a}{\sqrt{r}} \times \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r}} = \frac{a\sqrt{r}}{r}$$

$$\frac{\frac{a}{\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} \times \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r}} = \frac{a\sqrt{r}}{r}$$

$$\frac{a}{\sqrt{r-1}} \times \frac{\sqrt{r+1}}{\sqrt{r+1}} = \frac{a(\sqrt{r+1})}{r-1} = a(\sqrt{r+1})$$



$$\frac{1}{\sqrt{\mu} - \sqrt{\nu} + \sqrt{\lambda}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu} - \sqrt{\nu} + \sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\mu} - \sqrt{\nu} + \sqrt{\lambda}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu}} \times \frac{\sqrt{\mu} - \sqrt{\nu}}{\sqrt{\mu} - \sqrt{\nu}} = \frac{\sqrt{\mu} - \sqrt{\nu}}{\mu - \nu} = \sqrt{\mu} - \sqrt{\nu}$$

✓



$$18 - \text{کوچک ترین مقدار } n \text{ که: } \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \geq 19$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} - 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\cancel{\sqrt{2} - 1} - \cancel{\sqrt{2}} + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{3}} + \cancel{\sqrt{4}} + \dots - \cancel{\sqrt{n}} + \sqrt{n+1} \geq 19$$

$$\rightarrow -1 + \sqrt{n+1} \geq 19 \rightarrow \sqrt{n+1} \geq 20 \rightarrow n+1 \geq 400$$

$$\rightarrow n \geq 399$$

$$\frac{5x-2}{4} - \frac{x-1}{12} > \frac{x-1}{3}$$

$$\times 12 \rightarrow 3(5x-2) - (x-1) > 4(x-1)$$

$$\rightarrow 15x - 6 - x + 1 > 4x - 4$$

$$\rightarrow 14x - 5 > 4x - 4 \rightarrow 14x - 4x > -4 + 5$$

$$\rightarrow 10x > 1$$

$$\rightarrow x > \frac{1}{10}$$



$$(x - 5)^2 - 7 > (x + 2)^2$$

$$\rightarrow x^2 - 10x + 25 - 7 > x^2 + 4x + 4$$

$$\rightarrow -10x - 4x > 4 - 11 \rightarrow -14x > -7$$

$$\div (-14)$$
$$x < 1/2$$



۲۱- حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

$$\cancel{-1} + \cancel{\sqrt{2}} - \cancel{\sqrt{2}} + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{3}} + \cancel{\sqrt{4}} - \cancel{\sqrt{4}} + \dots - \cancel{\sqrt{99}} + \sqrt{100}$$

$$= -1 + 10 = 9$$



۲۲- اگر $a + \frac{1}{a} = 3$ باشد حاصل $a^r + \frac{1}{a^r}$ کدام است؟

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = (3)^2 \rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\left(\cancel{a \cdot \frac{1}{a}}\right) = 9$$

$$\rightarrow \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 = (7)^2$$

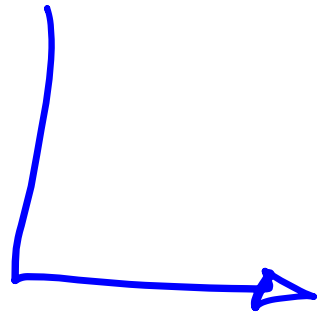
$$\rightarrow a^4 + \frac{1}{a^4} + 2 \cdot \cancel{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}} = 49$$

$$\rightarrow a^4 + \frac{1}{a^4} = 47$$

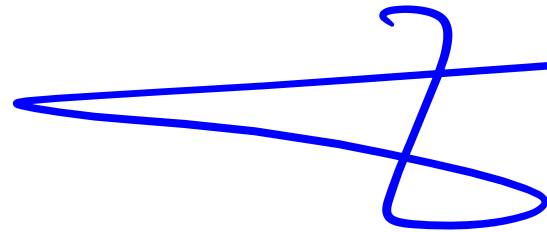


۲۳- ساده شده عبارت $\underline{\underline{(x+3)^2 - 2(x+3) + 1}}$ کدام است؟

$$(x+3-1)(x+3-1)$$



$$(x+2)(x+2) = (x+2)^2$$



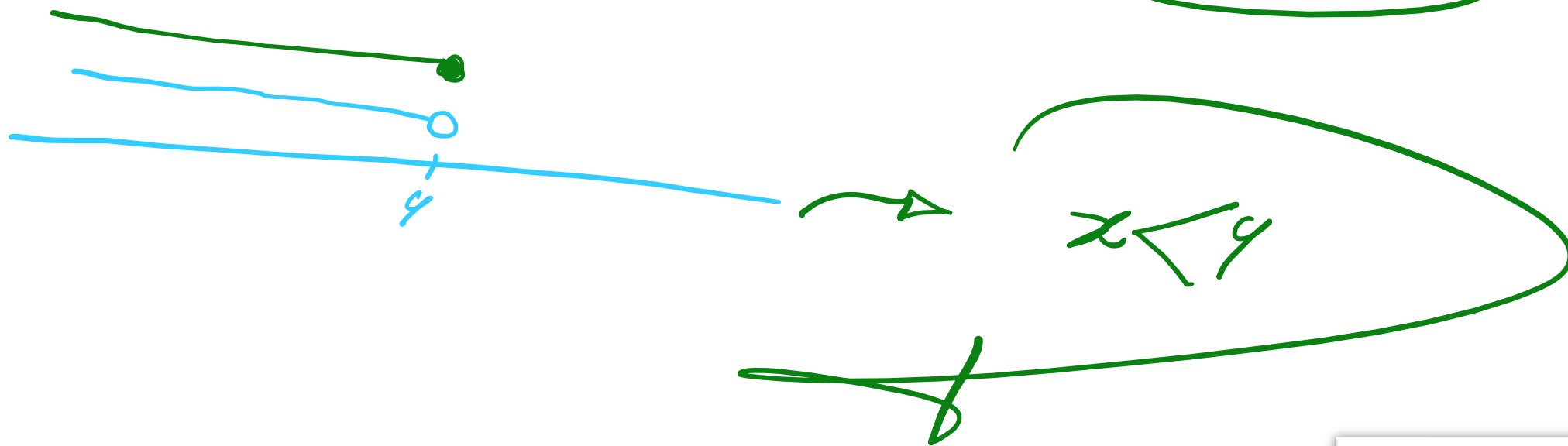
$$\sqrt{x^2-2x+1} = (x-1)(x-1)$$



۲۴- نامعادله‌ی $4x - 7 \leq 3x - 1 < 2x + 5$ را حل کنید.

$$1) 4x - 7 \leq 3x - 1 \rightarrow 4x - 3x \leq -1 + 7 \rightarrow x \leq 6$$

$$2) 3x - 1 < 2x + 5 \rightarrow 3x - 2x < 5 + 1 \rightarrow x < 6$$



۲۵- حاصل عبارت زیر را به دست آورید

$$\frac{5}{x(x+1)} - \frac{3x}{x+1} = \frac{5 - 3x(x)}{x(x+1)} = \frac{5 - 3x^2}{x^2 + x}$$

$$\frac{x-1}{x^2 - 4x + 3} \times \frac{x^2 - 9}{x} = \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x-3)} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{x} = \frac{x+3}{x}$$



خانه ریاضی علی هاشمی

Alihashemi-math.com



Freemath



Alihashemi_math