

رأس سهمی $y = -x^2 + ax + 1$ و صفرهای آن، رئوس مثلثی با مساحت $\frac{27}{64}$ است. اگر بخش بزرگ تری از مساحت

مثلث در ناحیه دوم باشد، مقدار a کدام است؟

(1) -2

(2) $4\sqrt{2}$

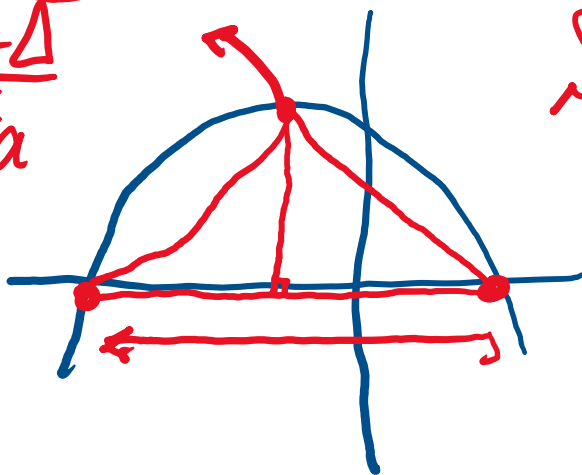
(3) 2

$$\frac{-a}{-14} = \frac{a}{14} < 0$$

(4) $-4\sqrt{2}$

$$\frac{-b}{2a} < 0$$

$$\frac{-\Delta}{4a}$$



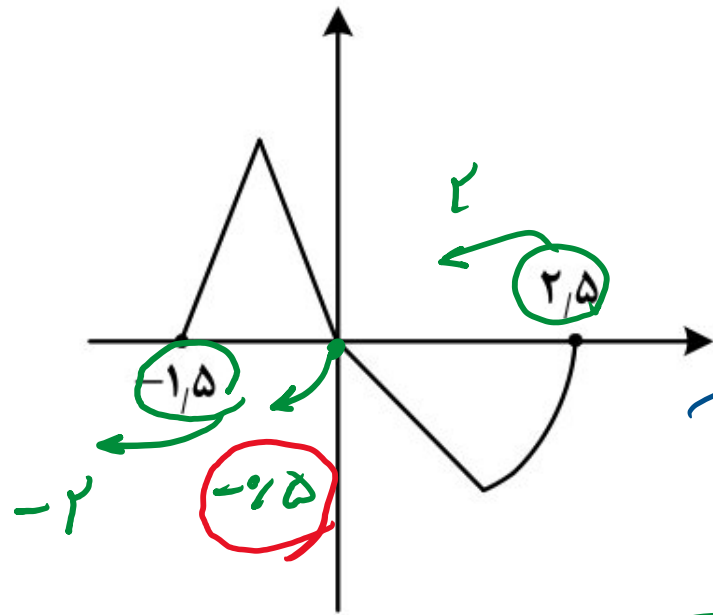
$$S = \frac{1}{2} \times \left| \frac{\Delta}{4a} \right| \times \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{27}{64}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{\Delta}{4 \times 1} \times \frac{\sqrt{\Delta}}{1} = \frac{27}{64} \Rightarrow \Delta \sqrt{\Delta} = 27 \times 1$$

$$\Delta \sqrt{\Delta} = 9 \times 1 \times 1 \times 1 = 27 \times 1 \Rightarrow \Delta = 27 \Rightarrow a^2 - 4(-1)(1)$$

$$a^2 + 4 = 27 \Rightarrow a^2 = 23 \Rightarrow a = \pm \sqrt{23} \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده و $g(x) = -f(x + \frac{1}{2})$ است. اگر $h = \frac{f}{g}$ باشد، دامنه h شامل چند عدد صحیح است؟



$$D_h = D_f \cap D_g - \{g=0\}$$

$$D_f = [-1.5, 1.5]$$

$$D_g = [-2, 2]$$

$$D_h = [-1.5, 1.5] \cap [-2, 2] - \{-1.5\} \rightarrow [-1, 1]$$

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳) ✓

۴ (۴)

هر کدام از ریشه‌های معادله‌ای α, β واحد از یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + 1,35x - 1,3 = 0$ کمتر است. حاصل ضرب ریشه‌های آن معادله کدام است؟

$$-1,375 \quad (4)$$

$$\alpha, \beta$$

$$-1,3 \quad (3)$$

$$\alpha - 0,5$$

$$\beta - 0,5$$

$$-0,3 \quad (2)$$

$$-0,375 \quad (1)$$

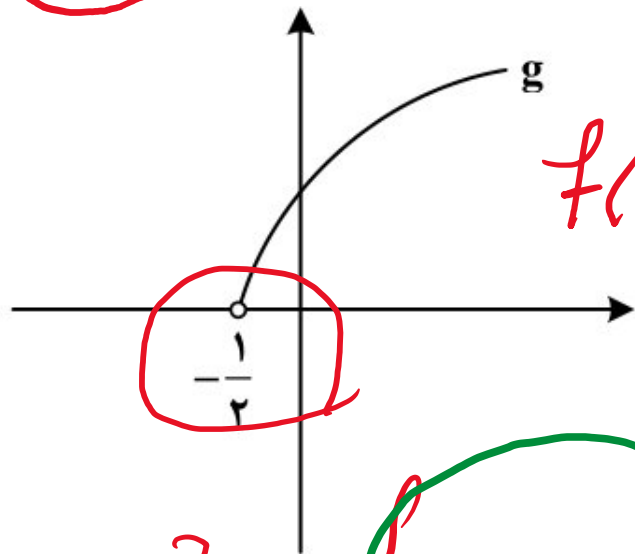
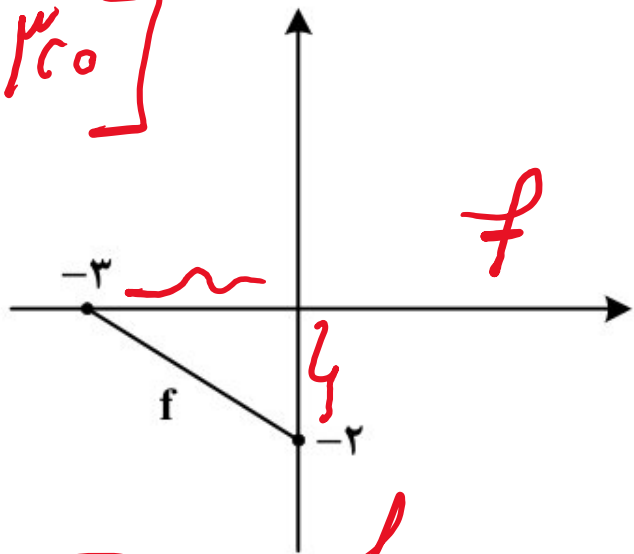
$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\beta - \frac{1}{2}\right) = \alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1,35 \\ \alpha\beta = -1,3 \end{cases}$$

$$-1,3 - \frac{1}{2}(-1,35) + 0,25 = -0,375$$

نمودارهای توابع f و g به صورت زیر رسم شده اند. اگر بازه I دامنه $\text{gof}(\frac{1}{2}x)$ باشد، طول بازه I کدام است؟

$[-150]$



$$f = ax + b = \frac{-2}{3}x + b$$

$$f(x) = \frac{-2}{3}x - 2$$

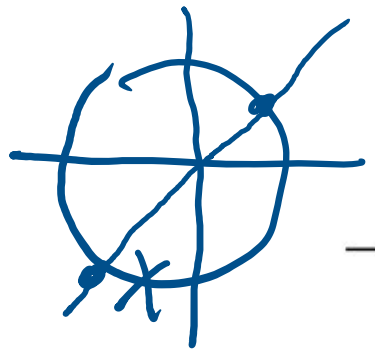
$$f(x_{1/2}) = \frac{-1}{3}x - 2$$

- (1) 0,5
- (2) 1
- (3) 1,5 ✓
- (4) 3

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{-4 \leq x \leq 0 \mid \frac{-1}{3}x - 2 > \frac{-1}{2}\}$$

$$\frac{-1}{3}x > \frac{3}{2} \Rightarrow x < -\frac{9}{2}$$

$$-4 \leq x < -\frac{9}{2} \Rightarrow 1 - \frac{9}{2} = \frac{-7}{2} = -3.5$$



اگر $\sqrt{\tan x} - \sqrt{\cot x} = \frac{2}{\sqrt{7}}$ و x در ربع سوم باشد، حاصل $\sin x - \cos x$ کدام است؟

$$-\frac{1}{3}\sqrt{2} \quad \text{✓✓}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{✗ (3)}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{(2)}$$

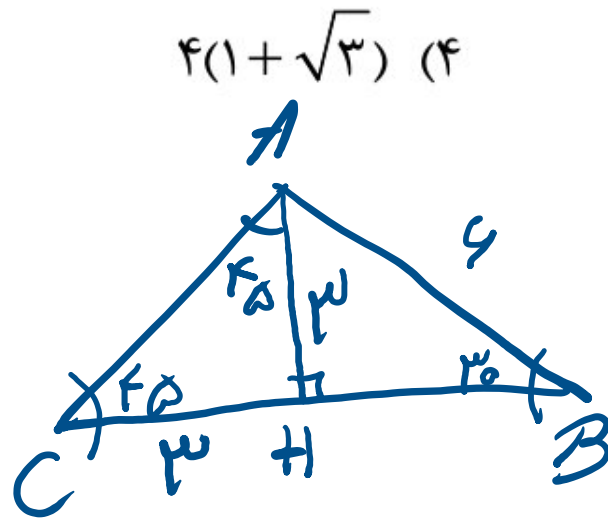
$$\frac{1}{3}\sqrt{2} \quad \text{(1) ✗}$$

$$\tan x + \cot x - 2 = \frac{4}{\sqrt{7}} \rightarrow \frac{1}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{11}{\sqrt{7}} \rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{7}}{11}$$

$$A' = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{7}}{11}\right) = 1 - \frac{2\sqrt{7}}{11} = \frac{11 - 2\sqrt{7}}{11}$$

$$A' = \frac{11 - 2\sqrt{7}}{11} \rightarrow A = \pm \frac{\sqrt{11 - 2\sqrt{7}}}{\sqrt{11}}$$

در مثلث ABC اندازه زوایای $\hat{A}BC$ و $\hat{A}CB$ به ترتیب 45° و 30° درجه است. اگر $AB = 6$ باشد، طول ضلع BC کدام است؟



$$4(1 + \sqrt{2}) \quad (3)$$

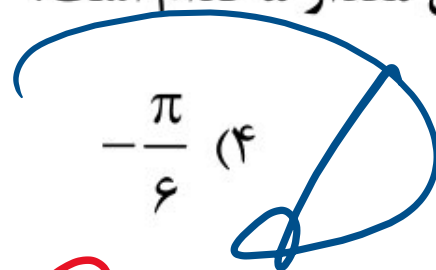
$$3(1 + \sqrt{3}) \quad (2) \quad \text{Red mark}$$

$$3(1 + \sqrt{2}) \quad (1)$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow BH = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$BC = CH + HB = 3 + \sqrt{3}$$

تابع $f(x) = -\frac{1}{2} \cos(\frac{3\pi}{2} + 3x)$ روی بازه $[a, 0]$ اکیداً نزولی است. کمترین مقدار a کدام است؟

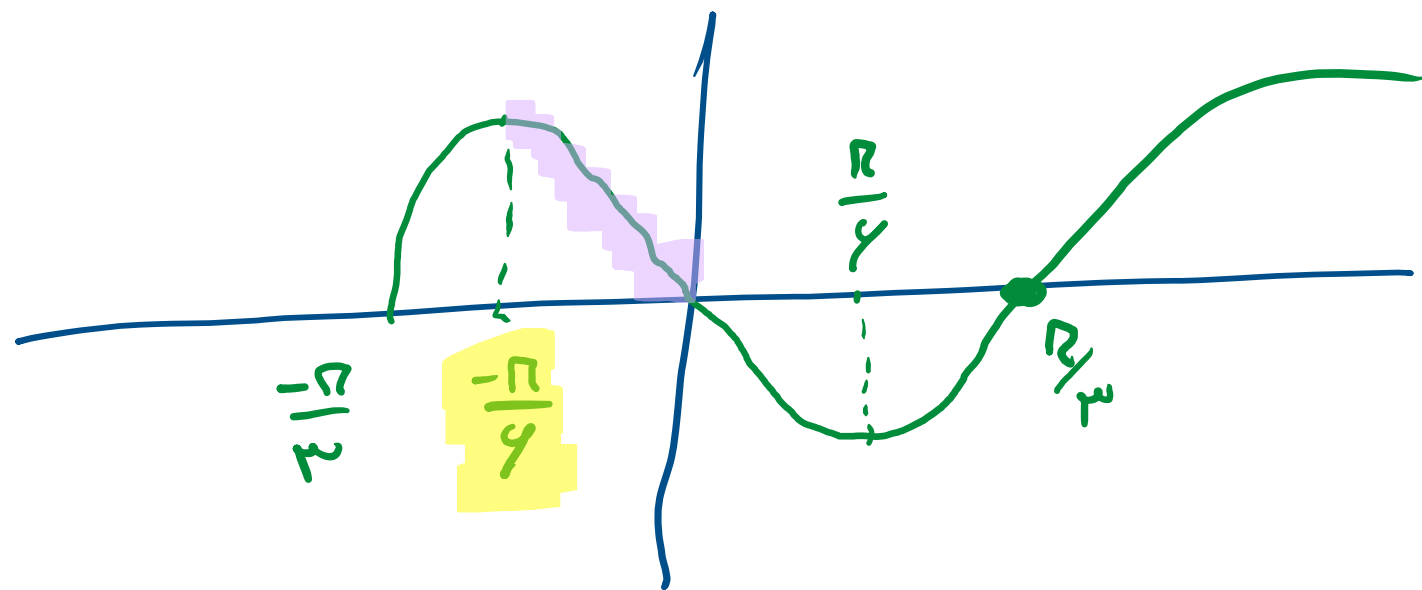


$$-\frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$-\frac{\pi}{8} \quad (2)$$

$$-\frac{\pi}{12} \quad (1)$$

$$f = \frac{-1}{2} \sin 3x \rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$



تعداد جواب‌های معادله $\sin(\pi + x)\cos(\frac{\pi}{2} + x) + 1 = 2\sin(\pi - x)$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$(-\sin x)(-\sin x) + 1 = 2\sin x \rightarrow \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$$

$$(\sin x - 1)^2 = 0 \rightarrow \sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$$

حاصل $(0,25)^{1-\log_4 10}$ کدام است؟

(1) 2,5

(2) 0,5

(3) 0,25

(4) 0,05

$$(0,25)^1 \times (0,25)^{-\log_4 10} = \frac{1}{4} \times 10 = \frac{10}{4} = 2,5$$

$$(4^{-1})^{-\log_4 10} = 4^{\log_4 10} = 10$$

اگر اعداد a و b به داده‌های زیر اضافه شوند، چارک اول و سوم داده‌ها تغییر نمی‌کند. میانگین a و b کدام است؟

~~۴۵, ۱۲, ۱۵, ۲۳, ۱۴, ۱۶, ۳۴, ۱۸, ۴۲, ۲۵, ۱۰~~

۲۰ (۴)

۲۴ (۲)

۲۸ (۲)

۳۰ (۱)

۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۸, ۲۳, ۲۵, ۳۴, ۴۲, ۴۵

↓

Q_۱

↓

Q_۲

↓

Q_۳

$$\frac{Q_1 + Q_3}{2} = \frac{14 + 34}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x+a}$ در دو نقطه نمودار تابع وارونش را قطع می کند. اگر اختلاف طول این نقاط $2\sqrt{10}$ باشد،

کدام مورد می تواند مقدار a باشد؟ ($a \neq 0$)

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

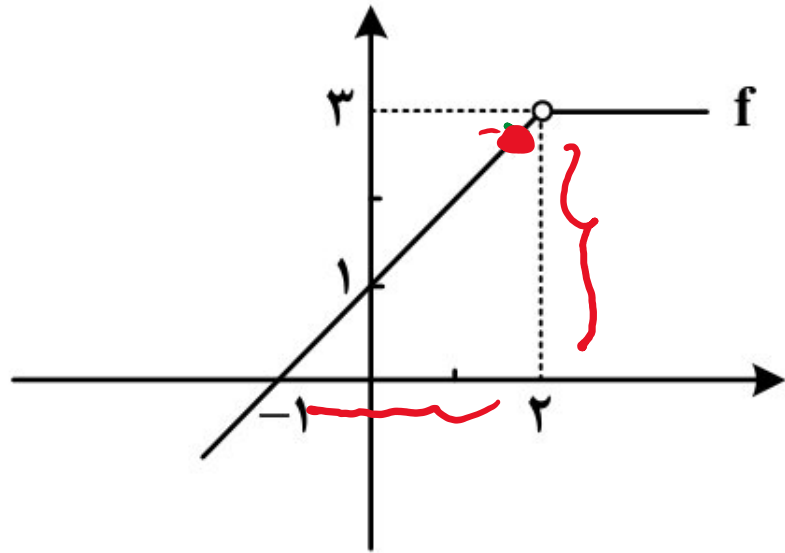
۲ (۱)

$$\frac{1}{x+a} = \frac{x}{1} \rightarrow x^2 + ax - 1 = 0 \rightarrow |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{10} \rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{40} \rightarrow \Delta = 40$$

$$a^2 + 4 = 40 \rightarrow a^2 = 36 \rightarrow a = \pm 6$$

نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3 - f(x)}{x^2 - 4}$ کدام است؟

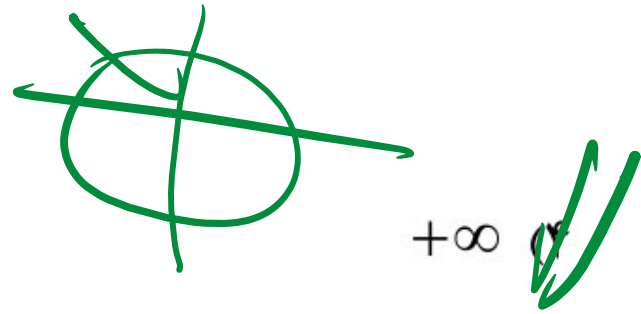


$$\frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \frac{-f'(x)}{2x}$$

$$\frac{-f'_-(2)}{4} = \frac{-\left(-\frac{4}{2}\right)}{4}$$

$$= -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4} \quad (\checkmark) \\ &-\frac{1}{2} \quad (\times) \\ &-\frac{1}{5} \quad (\times) \\ &-\frac{1}{3} \quad (\times) \end{aligned}$$



اگر $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x - |x||}{x^2 + 2x} = a$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(ax)$ کدام است؟

(1) 1 (2) صفر (3) $-\infty$ (4) $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x^2 + 2x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \frac{-1}{2x + 2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(-x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} -\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{0} = +\infty$$

تابع f با ضابطه $f(x) = 1 + \frac{2x}{a}$ است. اگر تابع $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq -1 \\ f^{-1}(x) & x < -1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد و محور x ها را در

سمت مثبت محور قطع کند، مقدار $g(-1)$ کدام است؟

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2x}{a} & x \geq -1 \\ \frac{a}{2}(x-1) & x < -1 \end{cases}$$

$$a + a - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$g(-1) = 1 + \frac{2(-1)}{-2} = 1 + 1 = 2$$

$$1 + \frac{2x}{a} = 0$$

$$x = \frac{-a}{2} > 0$$

اختلاف شیب نیم مماس‌های چپ و راست بر منحنی $y = |x^2 - 4|$ در $x = 2$ کدام است؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)

مشتق چپ: $x^2 - 4 \rightarrow 2x \rightarrow 4$

مشتق راست: $-(x^2 - 4) \rightarrow -2x \rightarrow -4$

$$4 - (-4) = +8$$

یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \frac{9t+3}{\sqrt{t}}$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه

$t=1$ چند گرم است؟

۱,۵ (۴)

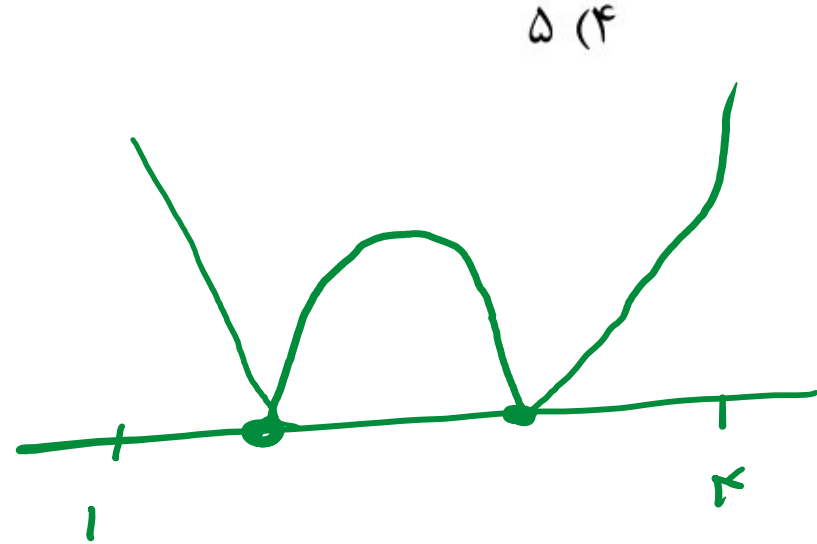
۳ (۳)

۷,۵ (۲)

۱۷ (۱)

$$m' = \frac{9\sqrt{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}}(9t+3)}{t} \quad t=1 \quad \Delta m' = \frac{9-6}{1} = 3$$

برای چند مقدار طبیعی a ، تابع $f(x) = |2x^2 - 9x + a|$ در بازه $[1, 4]$ دارای دو مینیمم نسبی است؟



دو مینیمم نسبی

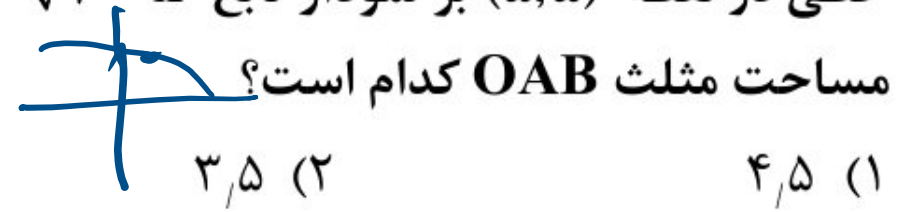
$$a > 1$$

$$a < 10$$

$$\begin{aligned} f(1) > 0 &\leadsto -1 + a > 0 \leadsto a > 1 \\ f(4) > 0 &\leadsto 32 - 36 + a > 0 \leadsto a > 4 \\ \Delta > 0 &\leadsto 1 - 1a > 0 \leadsto a < \frac{1}{1} \end{aligned}$$

$$1 < a < 10$$

خطی در نقطه (a, a) بر نمودار تابع $y = \sqrt{2-x}$ مماس شده و محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می کند.



۱,۷۵ (۴)

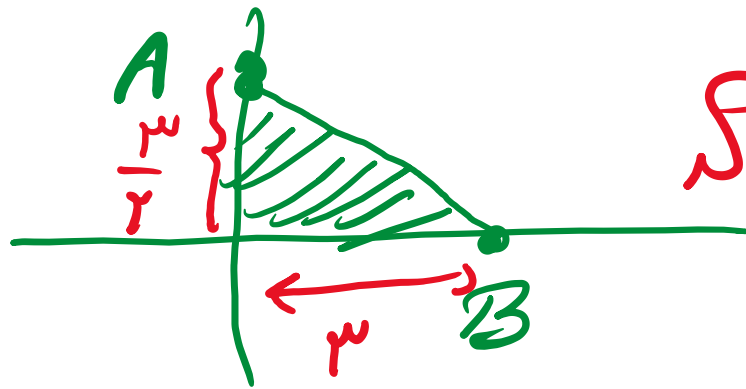
۲,۲۵ (۳)

۳,۵ (۲)

۴,۵ (۱)

$$y = \sqrt{2-x} \rightarrow a = \sqrt{2-a} \rightarrow a = 1 \rightarrow (1, 1)$$

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} \xrightarrow{x=1} m = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + b \xrightarrow{1,1} y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



$$S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{4} = 2,25$$

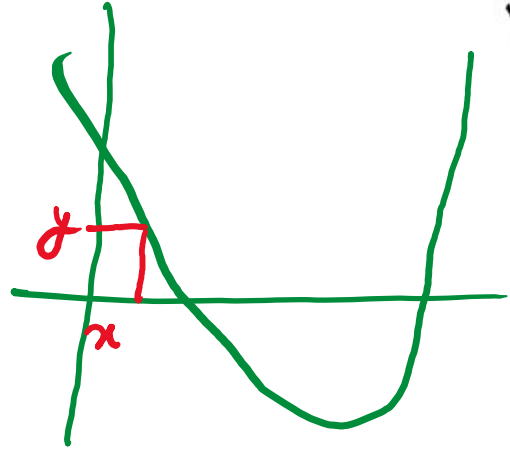
یک رأس مستطیلی واقع بر منحنی $y = 4x^2 - 12x + 9$ بوده و سه رأس دیگر، روی محورهای مختصات است. اگر این مستطیل بین محورها و نمودار منحنی محاط باشد، بیشترین مساحت این مستطیل کدام است؟

$3\sqrt{2}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)



$$S = x(4x^2 - 12x + 9) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$$

$$S' = 0 \rightarrow 12x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$\Delta = 12 \times 12 - 4 \times 9 = 144 - 36 = 108 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 10.39$$

$$x = \frac{12 \pm 10.39}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{12 + 10.39}{2} = 11.19 \\ x = \frac{12 - 10.39}{2} = 0.805 \end{cases}$$

$$S = 2$$

۷ نفر در خط شروع یک مسابقه ایستاده‌اند. به چند طریق ممکن است ۳ نفری که اشتباه در خط شروع ایستاده‌اند، مجاور هم باشند؟

۱۰ ✓

۱۲ (۳)

۳۵ (۲)

۴۲ (۱)

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷

x	y	z
y	z	x
z	x	y

$$2 \times 2 = 10$$

دو دانش آموز، هر کدام تابلوهایی با شماره‌های ۱ تا ۸ در اختیار دارند، هر کدام به تصادف یک تابلو را انتخاب کرده و به هم نشان می‌دهند. اگر عدد روی تابلوی یکی، مضرب دیگری باشد، هر دو برنده جایزه می‌شوند. چند درصد احتمال دارد که آنها برنده شوند؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{22}{1 \times 1} = \frac{22}{44} = \frac{1}{2} \rightarrow 50\%$$

۷۲,۵ (۴)
۵۰ (۵)
۶۲,۵ (۲)
۴۰ (۱)

✓ (۱,۱) (۱,۲) (۱,۳) (۱,۸)

(۲,۱) (۲,۲) (۲,۳) (۲,۴) (۲,۵) (۲,۶) (۲,۷) (۲,۸)

(۳,۱) (۳,۳) (۳,۶)

(۴,۱) (۴,۲) (۴,۴) (۴,۸)

(۵,۱) (۵,۵)

(۶,۱) (۶,۲) (۶,۳) (۶,۴)

(۷,۱) (۷,۷)

(۸,۱) (۸,۲) (۸,۴) (۸,۸)

هر یک از اعداد ۱ تا ۹ روی یک کارت نوشته شده است. سه کارت به تصادف انتخاب می شود. با کدام احتمال هر سه

عدد روی کارت فرد هستند به طوری که می دانیم مجموع آنها نیز فرد است؟

۱، ۳، ۵، ۷، ۹

۲، ۴، ۶، ۸

$$\frac{1}{5} (4)$$

$$\frac{1}{3} (3)$$

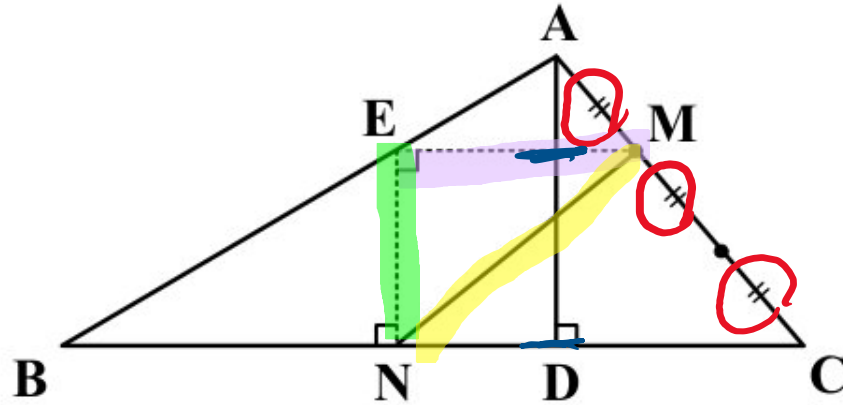
$$\frac{1}{4} (2)$$

$$\frac{1}{2} (1)$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{5}{3} + \binom{4}{2} \binom{5}{1}} = \frac{10}{10 + 10} = \frac{10}{20}$$

$$\frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 1} = 6$$

در شکل زیر، $AD=6$ و $BC=9$ است. طول MN چقدر است؟



$$MN = 5$$

(1) $3,5\sqrt{2}$

(2) $3\sqrt{2}$

(3) $4,5$

(4) 5

$$EM = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 9 = 4,5$$

$$EN = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

قطرهای یک بیضی روی خطوط $y = x + 3$ و $ay - 2x = -2$ قرار دارند. اگر مرکز بیضی و محل برخورد قطرهای بیضی با محور x ها، رئوس یک مثلث باشند، مساحت این مثلث کدام است؟

(4) 3,5

(3) 4,5

(2) 3

(1) 4

$$m_1 = 1$$

$$m_2 = -\frac{-2}{a} = \frac{2}{a}$$

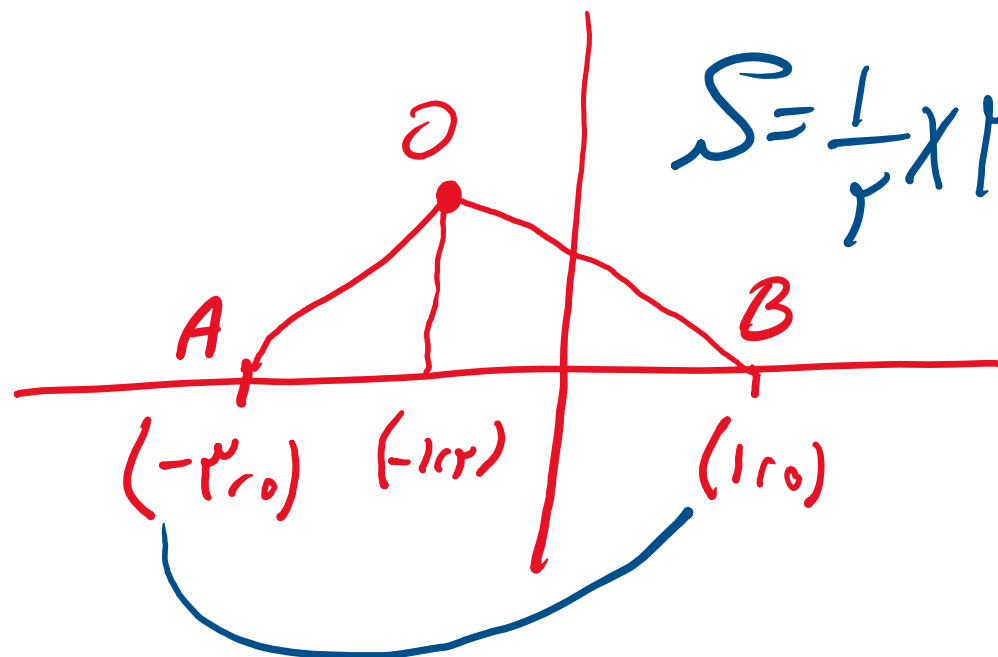
$$\frac{2}{a} = -1$$

$$a = -2$$

$$A(-3, 0)$$

$$B(1, 0)$$

$$O(-1, 2)$$



$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

در نقطه‌ای واقع در ناحیه چهارم، دایره C به مرکز (α, α) و شعاع ۴ با دایره $x^2 + y^2 - 2x - y = 1$ مماس درون است. فاصله مرکز دایره C از مبدأ مختصات کدام است؟

$$O \quad \begin{matrix} 1 \\ 1/2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2,5\sqrt{2} \quad (4) \\ 2\sqrt{2} \quad (3) \\ 0,5\sqrt{2} \quad (2) \\ \sqrt{2} \quad (1) \end{matrix}$$

$$R = \sqrt{\frac{r^2 + 1 + r^2}{r}} = \frac{r}{r}$$

$$\sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\alpha - \frac{1}{r})^2} = \left| r - \frac{r}{r} \right| = \frac{5}{r} \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{r^2} = \frac{25}{r^2}$$

$$2\alpha^2 - 3\alpha - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

$$OA = \alpha\sqrt{2} = \underline{1,0\sqrt{2}}$$

به ازای چند مقدار طبیعی a ، عدد $\frac{1}{5}$ در بازه $\left[\frac{1}{3a+1}, \frac{1}{2a-3} \right)$ قرار دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$a=1 \rightarrow -1 \quad \times$$

$$a=2 \rightarrow \left(\frac{1}{5}, 1 \right) \quad \checkmark$$

$$a=3 \rightarrow \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{3} \right) \quad \checkmark$$

$$a=4 \rightarrow \left(\frac{1}{17}, \frac{1}{5} \right) \quad \times$$

میانگین جملات دنباله حسابی $a, 12, b, c, \dots, 172$ برابر ۸۷ است. مجموع جملات این دنباله کدام است؟

۱۶۵۳ (۴)

۱۵۶۶ (۳)

۱۴۷۹ (۲)

۱۳۹۲ (۱)

$$\frac{a + 172}{2} = 87 \rightarrow a + 172 = 174 \rightarrow a = 2$$

$$d = 10 \rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 172 = 2 + (n-1) \times 10$$

$$\rightarrow 17 = n-1 \rightarrow n = 18$$

$$S = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{18}{2} (2 + 172) = 1566$$

اگر -2 یکی از ریشه‌های معادله $x(3x^2 + x + a) = -2$ باشد، حاصل ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

$$-\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$-2(12 - 2 + a) = -2 \rightarrow 10 + a = 1 \rightarrow a = -9$$

$$\begin{array}{r} 1x^3 + x^2 - 9x + 2 \\ \underline{1x^3 + 4x^2} \\ -5x^2 - 9x + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -5x^2 - 9x + 2 \\ -5x^2 - 10x \\ \hline x + 2 \end{array}$$

$$\underline{x + 2}$$

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ \hline 1x^2 - 5x + 1 \end{array}$$

$$(x + 2)(x^2 - 5x + 1) = 0$$

$$x = -2 \quad \alpha\beta = \frac{1}{1}$$

اگر $a + \sqrt{b} - c = 6$ و $\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{c} = 3$ باشد، حاصل $\log_r c$ کدام است؟

~~-2 (4)~~

-1 (3)

1 (2)

2 (1)

$$\underbrace{(\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{c})}_3 \underbrace{(\sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{c})}_2 = a + \sqrt{b} - c = 6$$

$$\log_r c = \log_r r^{-2} = -2$$

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{c} = 3$$

$$-\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{c} = -2 \rightarrow 2\sqrt{c} = 1 \rightarrow c = \frac{1}{4}$$

