

# جمع بندی ریاضی دوازدهم انسانی

## فصل دوم

# الگوهای خطی

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت [Algebra.com](http://Algebra.com) است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$a_n = a \cdot n + b$$

$$a_{10} = 10 \cdot \underline{a} + \underline{b}$$

$$\textcircled{1} \quad 1, 3, 5, 7, 9, \dots \rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad 0, 1, 3, 5, 7, \dots \rightarrow a_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad 1, 3, 5, 7, 9, \dots \rightarrow a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$1, 3, 5, \dots \rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$$

① جمله  $n$ ام  $a_n = a_1 + (n-1)d$

② مجموع  $n$  جمله اول  $S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$

③  $a, b, c \rightarrow 2b = a + c$

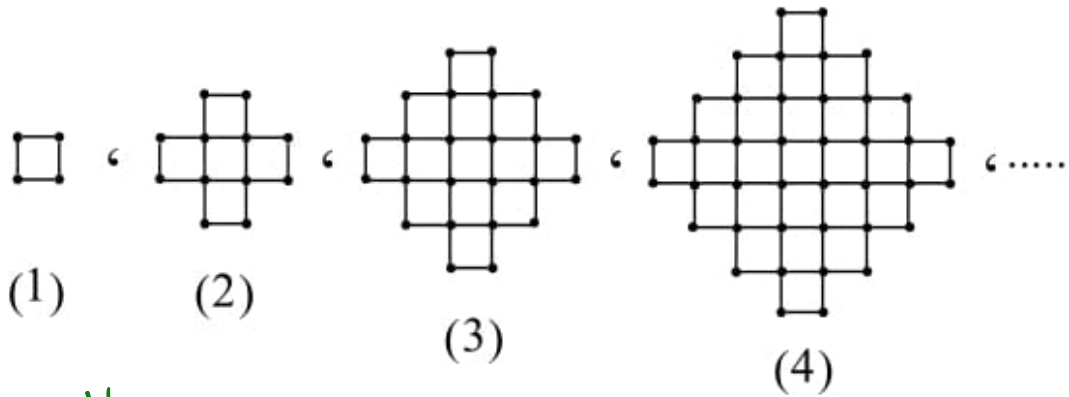
$$1, 2, 4, 8, \dots \rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$$

① جمله  $n$ ام  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

② مجموع  $n$  جمله اول  $S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$

③  $a, b, c \rightarrow b^y = a \cdot c$

۱- باتوجه به شکل زیر، در کدام مرحله تعداد چوب کبریتها برابر ۱۹۶ می شود؟



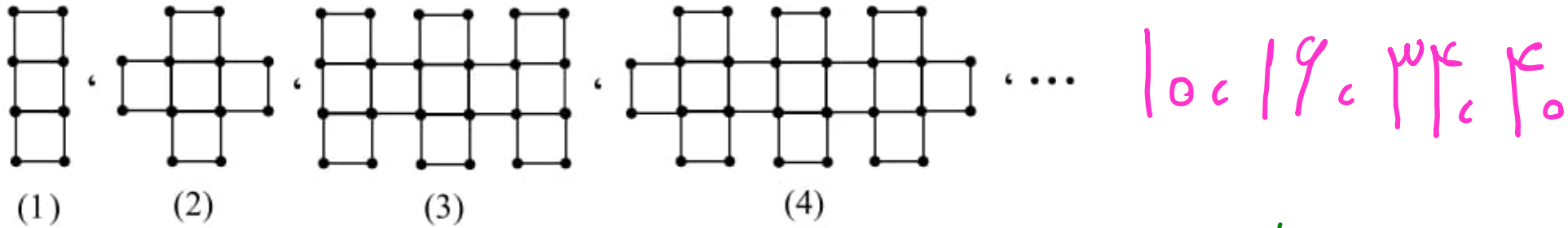
۴، ۱۶، ۳۶، ...

$$۲^۲، ۴^۲، ۶^۲ \rightarrow a_n = (۲n)^۲$$

$$\begin{cases} a_n = 196 \\ n = ? \end{cases}$$

$$\rightarrow (2n)^2 = 196 \rightarrow 2n = 14 \rightarrow n = 7$$

۲- با توجه به شکل‌های زیر، تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله‌ی یازدهم کدام است؟

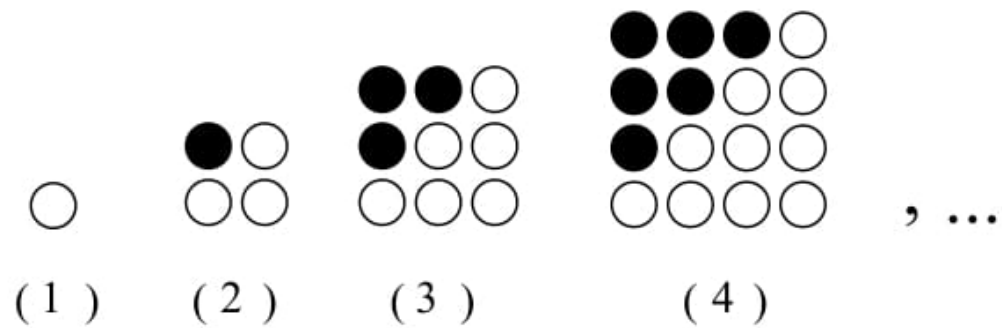


فرد:  $10, 14, 18, \dots$  →  $\begin{cases} a_1 = 10 \\ d = 4 \end{cases}$   
 زوج:  $14, 18, 22, \dots$  →  $\begin{cases} a_1 = 14 \\ d = 4 \end{cases}$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 10 + (n-1) \times 4 \quad \xrightarrow{n=9} \quad a_9 = 10 + 12 = 22$$

۳- در الگوی شکل زیر، تعداد دایره‌های توپُر شکل دوازدهم از تعداد دایره‌های توخالی آن چند تا کم‌تر است؟



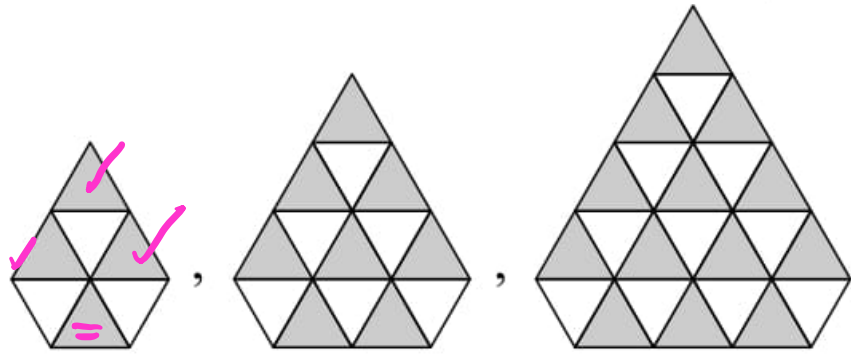
توپُر : ۰، ۱، ۳، ۶  $\rightarrow a_n = \frac{n(n-1)}{2}$

توخالی : ۱، ۳، ۶، ۱۰  $\rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$n=12 \rightarrow \frac{12 \times 13}{2} - \frac{12 \times 11}{2} = 78 - 66 = 12$



۴-اگر در شکل مرحله  $n$  ام الگوی زیر ۶۶ مثلث سفید وجود داشته باشد، در شکل مرحله  $n$  ام چند مثلث سیاه



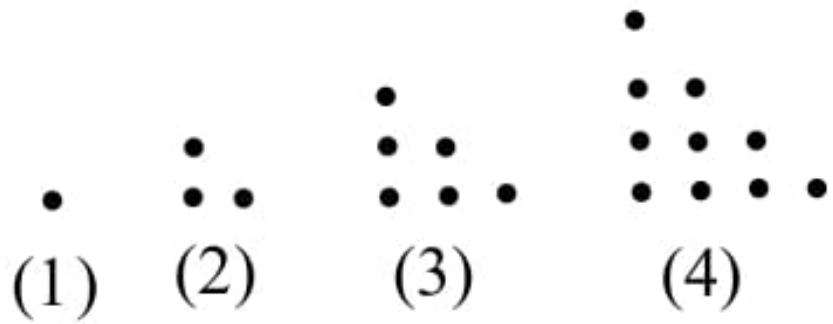
سیند : ۳، ۶، ۱۰  $\rightarrow \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

سیاه : ۳+۱، ۶+۲، ۱۰+۳  $\rightarrow \frac{(n+1)(n+2)}{2} + n$

$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = 66 \rightarrow \underline{(n+1)}(n+2) = 132 = \underline{11} \times \underline{12} \rightarrow n = 10$

$2n = 2(10) = 20 \rightarrow \underline{سیاه} = \frac{11 \times 12}{2} + 20 = 251$

۵- در الگوی زیر، تعداد نقاط چندمین شکل برابر ۵۰۵۰ است؟

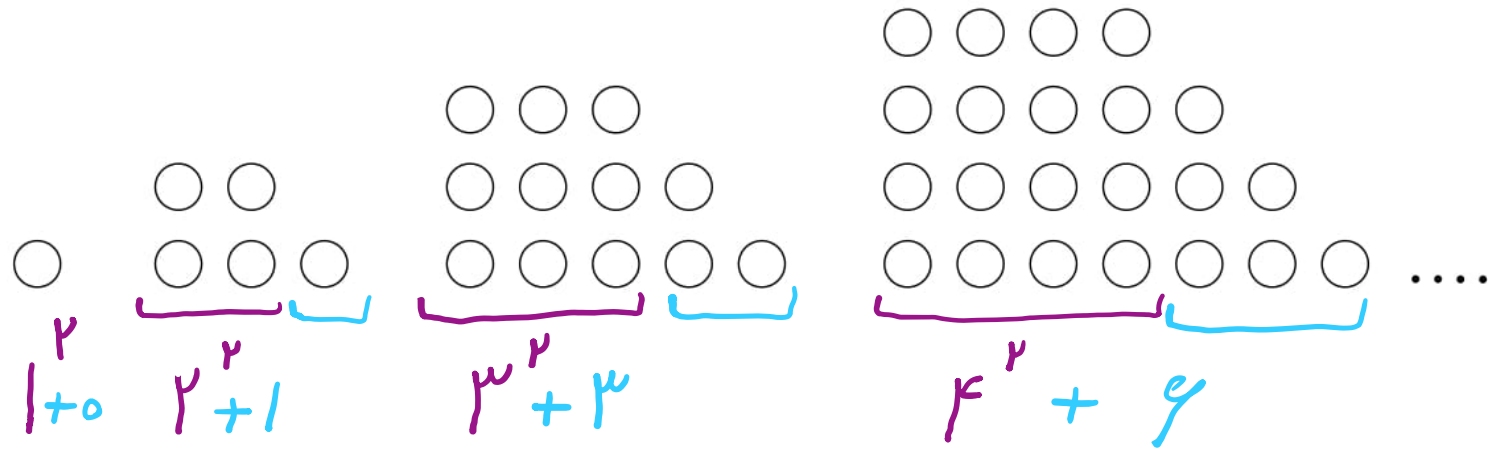


$$1, 3, 6, 10 \rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 5050 \rightarrow \underline{n}(n+1) = \underline{10100} = \underline{100} \times 101$$

$$\rightarrow n = 100$$

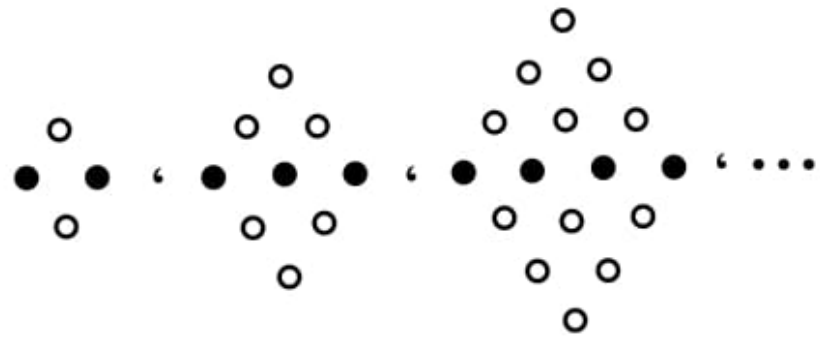
۶- در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل نهم، کدام است؟



$$a_n = n^2 + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\rightarrow a_9 = 9^2 + \frac{9 \times 8}{2} = 81 + 36 = 117$$

۷- باتوجه به الگوی شکل زیر، تعداد دایره‌های سفید در شکل مرحله ی یازدهم کدام است؟



مرحله ی اول    مرحله ی دوم    مرحله ی سوم

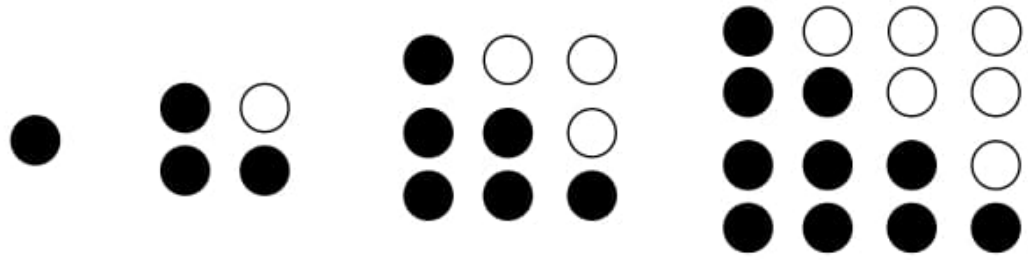
۴            ۹            ۱۶

$$a_n = (n+1)^2 \quad \text{سایه: } n+1$$

$$\text{تفاوت: } (n+1)^2 - (n+1)$$

$$\text{سفید} \quad a_{11} = 12^2 - 12 = 144 - 12 = 132$$

۸- با توجه به الگوی زیر، اختلاف تعداد دایره‌های سیاه و سفید در شکل یازدهم کدام است؟



شکل 1

شکل 2

شکل 3

شکل 4

۱

۳

۶

۱۰

۰

۱

۳

۶

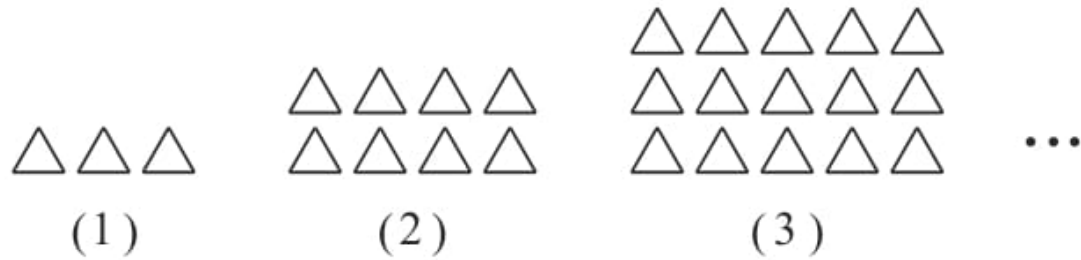
سیاه:  $\frac{n(n+1)}{2}$

سفید:  $\frac{n(n-1)}{2}$

$n^2 = n^2$

$n = 11 \rightarrow \frac{11 \times 12}{2} - \frac{11 \times 10}{2} = 66 - 55 = 11$

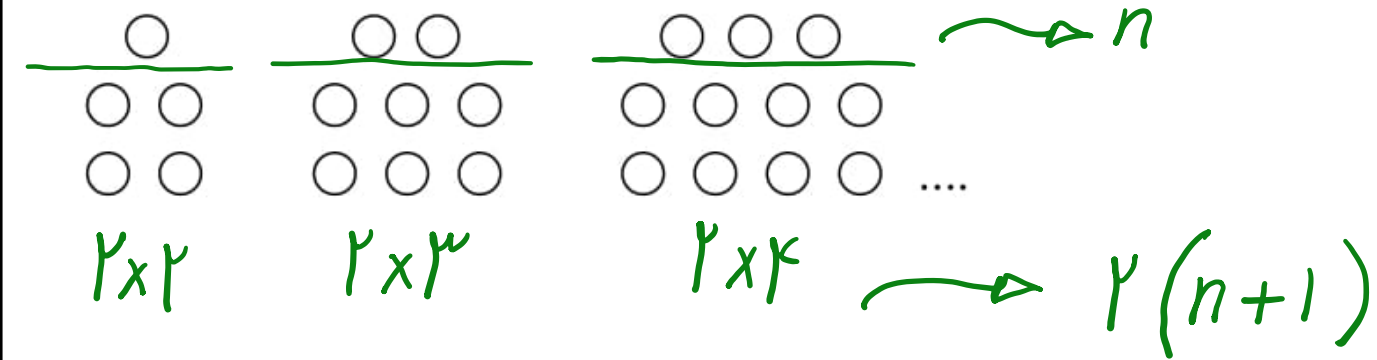
۹- در الگوی مقابل، شکل دهم از چند مثلث تشکیل شده است؟



$1 \times 3$        $2 \times 4$        $3 \times 5$        $\rightarrow a_n = n(n+2)$

$n=10 \rightarrow a_{10} = 10 \times 12 = 120$

۱۰- در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل دوازدهم، کدام است؟



$$a_n = 2(n+1) + n$$

$$n=12 \rightarrow a_{12} = 2(13) + 12 = 26 + 12 = 38$$

۱۱- اگر  $a_n = (k-3)n^2 + kn + 1$  جمله عمومی یک الگوی خطی باشد، الگوی  $b_n = a_1n - \lambda k$  چند

جمله نامثبت دارد؟

$$k-3=0 \rightarrow k=3 \rightarrow a_n = 1n + 1$$

$$b_n = a_1n - \lambda k \rightarrow \begin{cases} k=3 \\ a_1 = 1+1=2 \end{cases} \rightarrow b_n = 1n - 2$$

$$b_n \leq 0 \rightarrow 1n - 2 \leq 0 \rightarrow 1n \leq 2 \rightarrow n \leq 2$$

$$\{1, 2\}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۱۲- در یک دنباله‌ی اعداد  $a_1 = \underline{3}$  و برای هر  $n \geq 2$  داریم:  $a_n = 2a_{n-1} - 2$ ، حاصل  $a_8 - a_7$

$$n=2 \rightarrow a_2 = 2a_1 - 2 = 2(3) - 2 = 4 \quad a_1 - a_7 = ?$$

$$n=3 \rightarrow a_3 = 2a_2 - 2 = 2 \times 4 - 2 = 6 \quad a_1 - a_7 = 13 - 44$$

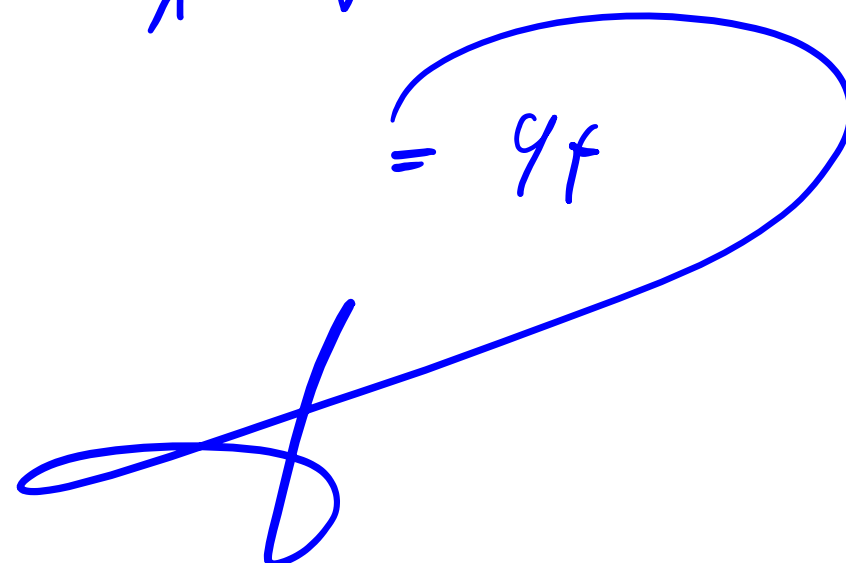
$$n=4 \rightarrow a_4 = 2a_3 - 2 = 10 - 2 = 8$$

$$a_5 = 2a_4 - 2 = 16 - 2 = 14$$

$$a_6 = 20$$

$$a_7 = 34$$

$$a_8 = 66$$



۱۳- در یک الگوی خطی جمله سوم برابر با ۷ و جمله هفتم برابر با ۱۵ است. جمله عمومی این الگو

$$a_n = an + b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_5 = 15 \end{array} \right. \rightarrow 5a + b = 15$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_7 = 7 \end{array} \right. \rightarrow 7a + b = 7$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow a_n = 2n + 1$$

۱۴- در دنباله‌ای که از یک الگوی خطی پیروی می‌کند، اگر جمله‌ی چهارم برابر ۹ و جمله‌ی هشتم برابر ۳ باشد، چند جمله‌ی این دنباله مثبت است؟

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_8 = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1a + b = 3 \\ 8a + b = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = 15 \end{cases}$$

$$a_n = an + b \rightarrow a_n = -\frac{3}{4}n + 15$$

$$-\frac{3}{4}n + 15 > 0 \rightarrow \frac{3}{4}n < 15 \rightarrow n < 10$$

۹ جمله ✓

۱۵- در دنباله‌ای با جمله عمومی  $t_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$  مجموع پانزده جمله اول کدام است؟

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$(\cancel{\sqrt{1}} - 1) + (\cancel{\sqrt{2}} - \cancel{\sqrt{1}}) + (\cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{2}}) + (\cancel{\sqrt{4}} - \cancel{\sqrt{3}}) + \dots + (\cancel{\sqrt{14}} - \cancel{\sqrt{13}})$$

$$\sum_{1 \leq n \leq 15} = -1 + 1 = 0$$

۱۶- در دنباله‌ی اعداد  $a_1 = 1$  و  $a_{n+1} = 2a_n + 1$  جمله‌ی دهم، کدام است؟

$$n=1 \rightarrow a_1 = 2a_1 + 1 = 2 + 1 = 3 = 2^1 - 1$$

$$n=2 \rightarrow a_2 = 2a_2 + 1 = 4 + 1 = 7 = 2^2 - 1$$

$$n=3 \rightarrow a_3 = 2a_3 + 1 = 8 + 1 = 15 = 2^3 - 1$$

$$\rightarrow a_n = 2^n - 1$$

$$n=10 \rightarrow a_n = 2^{10} - 1 = 1023$$

۱۷- در یک دنباله‌ی اعداد  $a_1 = 2$  و به ازای  $n \geq 2$  داریم  $a_n = 3a_{n-1} - 1$  حاصل  $\frac{a_{10} - a_9}{a_5 - a_4}$

$$n=2 \rightarrow a_2 = 3a_1 - 1 = 3(2) - 1 = \underline{\underline{5}}$$

$$n=3 \rightarrow a_3 = 10 - 1 = 9$$

$$n=4 \rightarrow a_4 = 17$$

$$a_2 - a_1 = 3^1$$

$$a_3 - a_2 = 3^2$$

$$a_4 - a_3 = 3^3$$

$$a_n - a_{n-1} = 3^{n-1}$$

$$\frac{a_{10} - a_9}{a_5 - a_4} = \frac{3^9}{3^4} = 3^5 = 243$$

۱۸- حاصل ضرب ۱۰ جمله‌ی اول دنباله با جمله‌ی عمومی  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$  کدام است؟

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{-2}{3} \quad a_3 = \frac{3}{4} \quad a_{10} = \frac{-10}{11}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{-2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{-4}}{\cancel{5}} \times \dots \times \frac{\cancel{-10}}{\cancel{11}}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{11}$$

۱۹- کارفرمایی به یک کارگر مبتدی، در هفته‌ی اول ۷۵۰ واحد پول دستمزد می‌دهد. متعهد می‌شود که در صورت رضایت کاری در پایان هر هفته، ۲۵ واحد پول بر دستمزد وی اضافه کند تا به دستمزد ثابت ۲۰۰۰ واحد پول برسد. با رضایت کاری پس از چند هفته، به دستمزد ثابت می‌رسد؟

$$a_1 = 750 \quad d = 25 \quad a_n = 2000 \quad n = ?$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 2000 = 750 + (n-1) \cdot 25$$

$$2000 = \underline{750} + 25n - \underline{25} \rightarrow 25n = 1275$$

$$\rightarrow n = \frac{1275}{25} = 51$$



۲۰- در یک دنباله‌ی عددی، مجموع چهار جمله‌ی اول ۱۵ و مجموع پنج جمله‌ی بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله‌ی یازدهم این دنباله کدام است؟

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15$$

$$a_1 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 30$$

Handwritten work showing the substitution of terms in an arithmetic sequence. For the first equation, terms are labeled as  $a_1$ ,  $a_1+d$ ,  $a_1+2d$ , and  $a_1+3d$ . For the second equation, terms are labeled as  $a_1+4d$ ,  $a_1+5d$ ,  $a_1+6d$ ,  $a_1+7d$ , and  $a_1+8d$ .

$$\begin{cases} 4a_1 + 6d = 15 \\ 5a_1 + 20d = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 10 \left( \frac{1}{2} \right) = 8$$

۲۱- چندمین جمله از دنباله‌ی عددی  $۲, \frac{۸}{۳}, \frac{۱۰}{۳}, \dots$  چهار و نیم برابر جمله‌ی چهارم است؟

$$a_n = r \cdot a_k \quad a_1 = ۲ \quad d = \frac{۲}{۳}$$

$$\rightarrow ۲ + (n-1) \times \frac{۲}{۳} = \frac{۹}{۲} \left( ۲ + \cancel{۱} \times \frac{۲}{\cancel{۳}} \right)$$

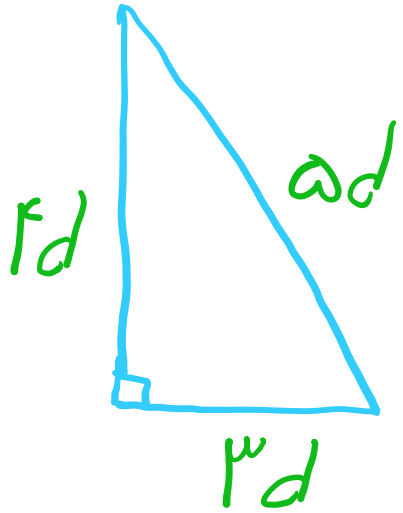
$$\rightarrow ۲ + \frac{۲}{۳}n - \frac{۲}{۳} = ۱۸ \quad \rightarrow \frac{۲}{۳}n = \frac{۵۰}{۳}$$

$$\rightarrow n = ۲۵$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۹

۲۲- اگر طول اضلاع یک مثلث قائم الزاویه تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند و طول وتر این مثلث  $a$  باشد، مساحت این مثلث کدام است؟



$$5d = a \rightarrow d = \frac{a}{5}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 2d \times 3d = 3d^2$$

$$\rightarrow S = 3 \left( \frac{a^2}{25} \right) = \frac{3}{25} a^2$$

۲۳- مجموع سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی برابر با ۴۵ و حاصل ضرب این جملات برابر با ۳۲۴۰ است.

$$x-d, x, x+d$$

قدرنسبت این دنباله کدام می تواند باشد؟

$$x-d + x + x+d = 45 \rightarrow 3x = 45 \rightarrow x = 15$$

$$(15-d) \cdot 15 \cdot (15+d) = 3240 \rightarrow 15^2 - d^2 = 216$$

$$\rightarrow d^2 = 9 \rightarrow d = \pm 3$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲۴- در دو دنباله‌ی حسابی  $\begin{cases} 7, 10, 13, \dots \\ 1, 5, 9, \dots \end{cases}$  چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

$$\begin{cases} 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28 \\ 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29 \end{cases} \rightarrow 13, 25, \dots$$

$$\begin{cases} a_1 = 13 \\ d = 12 \end{cases} \rightarrow a_n = 13 + (n-1) \cdot 12 \Rightarrow a_n = 12n + 1$$

$$99 < 12n + 1 < 1000 \rightarrow 98 < 12n < 999$$

$$\rightarrow 8, 14 < n < 83, 2 \rightarrow 9, 10, 11, \dots, 13$$

۲۵- بین ۳ و ۴۷ چند عدد می توان درج کرد به طوری که با این دو عدد تشکیل دنباله ی حسابی داده و اختلاف

$$۳, \underline{۳+d}, \dots, \underline{۴۷-d}, ۴۷$$

بزرگ ترین و کوچک ترین این اعداد برابر ۳۶ باشد؟

$$(۴۷-d) - (۳-d) = ۳۶ \rightarrow ۲d = ۱ \rightarrow d = ۴$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow ۴۷-d = ۳+d + (n-1) \cdot d$$

$$\rightarrow ۴۳ = ۷ + (n-1) \cdot ۴ \rightarrow n = ۱۰$$