

# جمع بندی حسابان دوازدهم

## فصل پنجم

# کاربردهای مشتق

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت [Algebra.com](http://Algebra.com) است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۱- از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

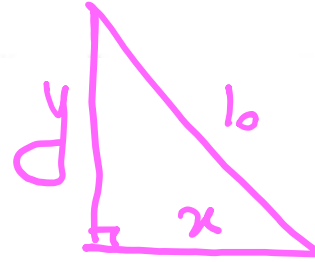
$$\frac{\sqrt{2}}{1} \quad (1)$$

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} \quad (3)$$

$$\frac{2}{1} \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 = 100 \rightarrow x^2 = 100 - y^2$$



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \rightarrow V = \frac{1}{3} \pi \cdot x \cdot y = \frac{\pi}{3} (100 - y^2) y = \frac{\pi}{3} (100y - y^3)$$

$$V' = 0 \rightarrow 100 - 3y^2 = 0 \rightarrow y = \sqrt{\frac{100}{3}} \rightarrow x = \sqrt{\frac{100}{3}}$$

$$\frac{x}{y} = \sqrt{1}$$

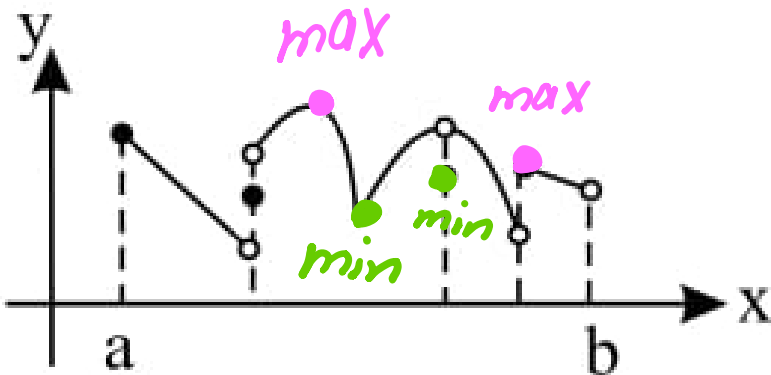
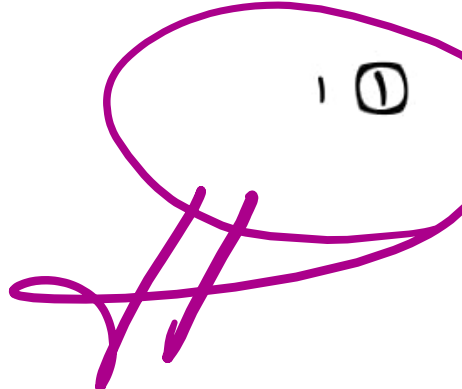
۲- نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است. نسبت تعداد ماکسیمم‌های نسبی به مینیمم‌های نسبی تابع در بازه‌ی مشخص شده کدام است؟

④  $\frac{2}{3}$

③  $\frac{4}{3}$

②  $\frac{3}{2}$

① ۱



$\text{max} = 2$  ✓

$\text{min} = 2$  ✓

$$\frac{\text{max}}{\text{min}} = \frac{2}{2} = 1$$

۳- فاصله نقطه ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه  $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$  از نیمساز ناحیه اول کدام است؟

$2\sqrt{2}$  (۴)

۲ (۳)

$\sqrt{2}$  (۲)

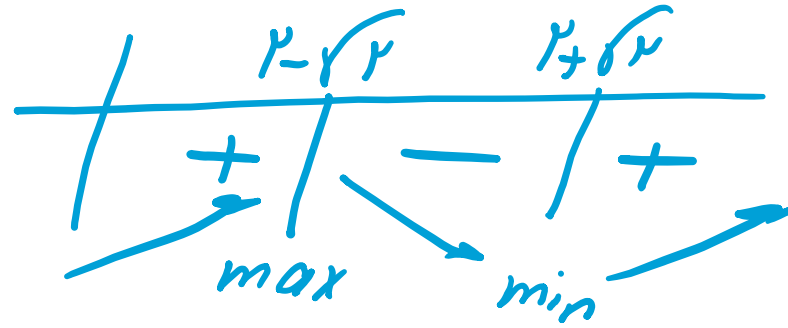
۱ (۱)

$$y' = 0 \rightarrow 1 + \frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}} = 0 \rightarrow \sqrt{4x-x^2} = x-2$$

$$4x-x^2 = x^2-4x+4 \rightarrow 2x^2-4x+4=0 \rightarrow x^2-2x+2=0$$

$$x = 2 - \sqrt{2}$$

$$x = 2 + \sqrt{2}$$



$$f(x) = x + \sqrt{4 - (x-2)^2} \quad x = 2 - \sqrt{2} \rightarrow y = 2$$

$$y - x = 0 \rightarrow L = \frac{|2 - 2 + \sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = 1$$

۴- کوتاهترین فاصله نقطه  $A(5, 0)$  از نقاط منحنی به معادله  $y = \sqrt{2x+7}$ ، کدام است؟

$3\sqrt{2}$  (۴)

۵ (۳)

$4/5$  (۲)

۴ (۱) ~~✓~~

$$L = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x - 5)^2 + (\sqrt{2x+7} - 0)^2}$$

$$L = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 2x + 7} = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$$

$$L' = 0 \rightarrow 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 4 \rightarrow L = \sqrt{16 - 32 + 32} = 4$$

۵- مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$  کدام است؟

$1 + \sqrt{5}$  (۴)

$-1 + \sqrt{3}$  (۳)

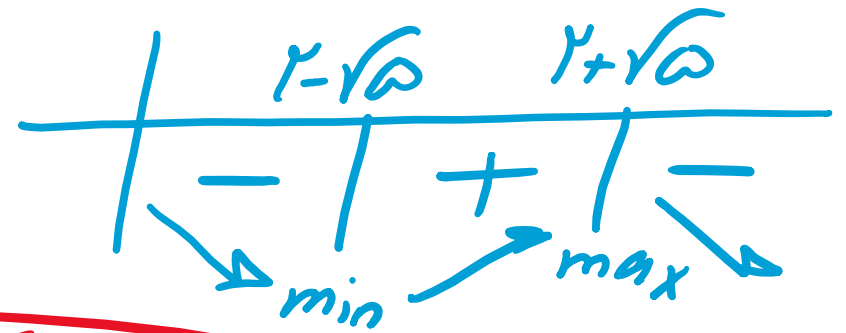
$1 + \sqrt{5}$  (۲)

$-1 + \sqrt{5}$  (۱)

$\rightarrow (1x+2)(x^2+1) - (1x)(x^2+2x-3) = 0$

$1x^3 + 1x + 1x^2 + 2 - 1x^3 - 2x^2 + 3x = 0 \rightarrow -1x^2 + 4x + 2 = 0$

$\rightarrow -x^2 + 4x + 2 = 0 \rightarrow x = 2 - \sqrt{5}$   
 $x = 2 + \sqrt{5}$



$f(2 + \sqrt{5}) = \frac{(2 + \sqrt{5})^2 + 2(2 + \sqrt{5}) - 3}{(2 + \sqrt{5})^2 + 1} = \sqrt{5} - 1$

۶- مجموع طول نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی  $y = x^2 |x + 1|$  چقدر است؟

① صفر

②  $\frac{5}{4}$

③  $-\frac{5}{4}$

④  $\frac{3}{5}$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

$$y = x^2(x+1) = x^3 + x^2 \rightarrow y' = 3x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(3x+2) = 0$$

$$x = 0$$

$$3x + 2 = 0$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$\text{مجموع} = -1 + 0 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۲۷۷۴۴۲۸۹

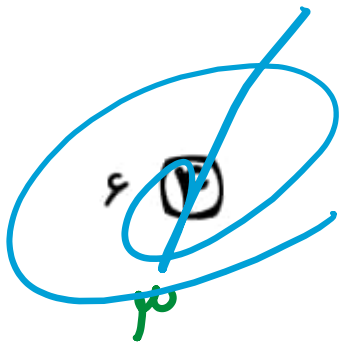
۷- تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه  $f(x) = |x^3 - x|$  روی بازه  $[-1, 2]$  کدام است؟

① ۳

② ۴

③ ۵

④ ۶



$$1) x - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$2) y = x - x^3 \rightarrow y' = |x^2 - 1| = 0 \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}, x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$3) x = -1 \quad x = 2$$

$$\underline{\underline{x = 0}}$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

$$\underline{\underline{x = -1}}$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

سایت ملی جبرا Algebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۲۲۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۲۲۲۸۹



۸- به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، طول یکی از اکستریم‌های نسبی تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^3 + ax^2 - 8x$  در بازه‌ی  $(1, 4)$  قرار می‌گیرد؟

$-5 < a < 2,5$  (۲)

$-5 < a < 1,5$  (۳)

$-3 < a < 2,5$  (۲)

$-3 < a < 1,5$  (۱)

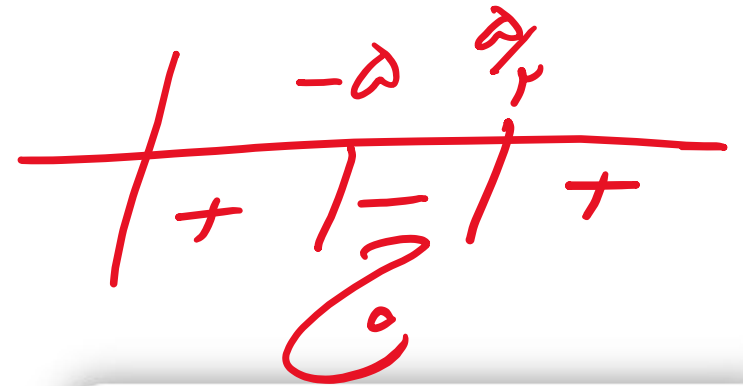
$f'(1) \cdot f'(4) < 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 8$

$f'(1) = 2a - 5$   
 $f'(4) = 12a - 8$

$(12a - 8)(2a - 5) < 0$

$a = -5$   
 $a = 5/2$



۹- در تابع با ضابطه  $f(x) = x|x-4|$ ، فاصله دو نقطه ماکسیمم نسبی و می نیمم نسبی آن، کدام است؟

$2\sqrt{5}$  (۴) ✓✓

$3\sqrt{2}$  (۳)

$2\sqrt{2}$  (۲)

$\sqrt{5}$  (۱)

$x-4=0 \rightarrow x=4 \rightarrow y=0 \rightarrow A/c$

$x^2-4x \rightarrow x^2-4x+4=0 \rightarrow x=2 \rightarrow y=4 \rightarrow B/c$

$AB = \sqrt{4+16} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$

۱۰- بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادله

$y = \sqrt{12-x}$ ، در ناحیه اول واقع شود، کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۶ (✓)

$8\sqrt{3}$  (۲)

$8\sqrt{2}$  (۱)

$$S = xy = x \cdot \sqrt{12-x} = \sqrt{12x^2 - x^3}$$

$$S' = 0 \rightarrow 24x - 3x^2 = 0 \rightarrow \underline{x=0}, \quad x=4 \quad \checkmark$$

$$S = x\sqrt{12-x} = 4 \times 2 = 8$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۱- در تابع با ضابطه  $f(x) = x|x| - 2x$ ، فاصله دو نقطهٔ ماکسیمم نسبی و می نیمم نسبی آن، کدام است؟

۴ (۴)

$3\sqrt{2}$  (۳)

۳ (۲)

$2\sqrt{2}$  (۱) ✓

$x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow A/0$

$x > 0 \rightarrow x^2 - 2x \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = -1 \rightarrow B / -1$   
 $x < 0 \rightarrow -x^2 - 2x \rightarrow -1x - 2 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow y = 1 \rightarrow C / -1$

max / -1

min / -1

$AB = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$

۱۲- به ازای کدام مقدار  $k$ ، بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع  $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$  در بازه  $[1, 3]$  قرینه‌ی یکدیگرند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲) ✓

۱ (۱)

$$f' = 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 3x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \quad \times \\ x=2 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$f(2) = 1 - 12 + k = k - 11 \rightarrow \text{min}$$

$$f(1) = 1 - 3 + k = k - 2$$

$$f(3) = 27 - 27 + k = k \rightarrow \text{max}$$

$$(k - 11) + (k) = 0 \rightarrow 2k - 11 = 0 \rightarrow k = 11/2$$

سایت علی جبرا Algebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۹

۱۳- بیشترین مساحت، از بین مستطیل‌هایی که یک ضلع آن‌ها منطبق بر محور  $x$  ها و دو رأس آن‌ها بر منحنی  $y = \frac{3}{2} \sqrt{1-x^2}$

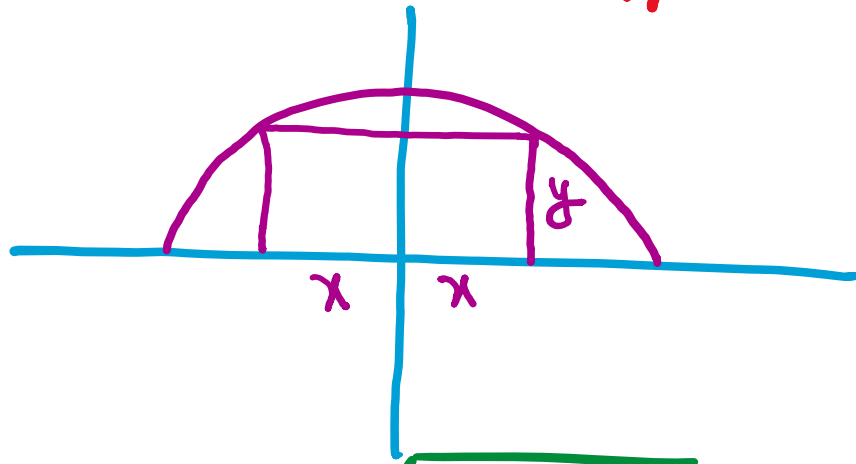
قرار گیرند، کدام است؟

① ۶

②  $6\sqrt{2}$

③ ۹

④ ۱۲



$$S = 2xy = 2x \times \frac{3}{2} \sqrt{1-x^2}$$

$$S = 3\sqrt{1-x^2-x^4} \quad S'=0 \rightarrow 14x-14x^3=0 \rightarrow 14x(1-x^2)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

$$S = 3x\sqrt{1-x^2} = 6\sqrt{1} = 6$$

۱۴- ما کسیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = -x + \sqrt[3]{x^3 - x^2}$  کدام است؟

④ فاقد ما کسیمم

③  $\frac{2}{3}$

②  $\frac{1}{3}$

①

$$\sqrt[3]{x^3} = x \rightarrow \sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq x$$

$$\rightarrow -x + \sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq 0$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۳۸۹

۱۵- مینیمم مطلق تابع با ضابطه  $f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$  بر روی  $\mathbb{R}$  کدام است؟

۴  $\frac{1}{4}$

۳  $-\frac{1}{4}$

۲  $0$

۱  $-1$

$$\sqrt[3]{x^3} = x \Rightarrow \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \leq x$$

$$-\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \geq -x \Rightarrow x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \geq 0$$



۱۶ -- نقطه‌ی  $M(1, 3)$  اکستریم نسبی  $f(x) = ax + \frac{b}{x}$  است. مقدار  $a + 2b$  کدام است؟

۹ (۴)

~~۹ (۷)~~

۳ (۲)

۳

۴ (۱)

$$\begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \rightarrow \underline{a+b=3}$$

$$f' = a - \frac{b}{x^2} \quad x=1 \rightarrow a-b=0 \rightarrow a=b$$

$$\begin{array}{l} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{array} \rightarrow a+2b = \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = \frac{9}{2}$$

۱۷- قدر مطلق تفاضل ماکزیمم و می نیمم مطلق تابع  $y = x\sqrt{4-x^2}$  کدام است؟

۴ (۴)

$2\sqrt{2}$  (۳)

$2-\sqrt{2}$  (۲)

۲ (۱)

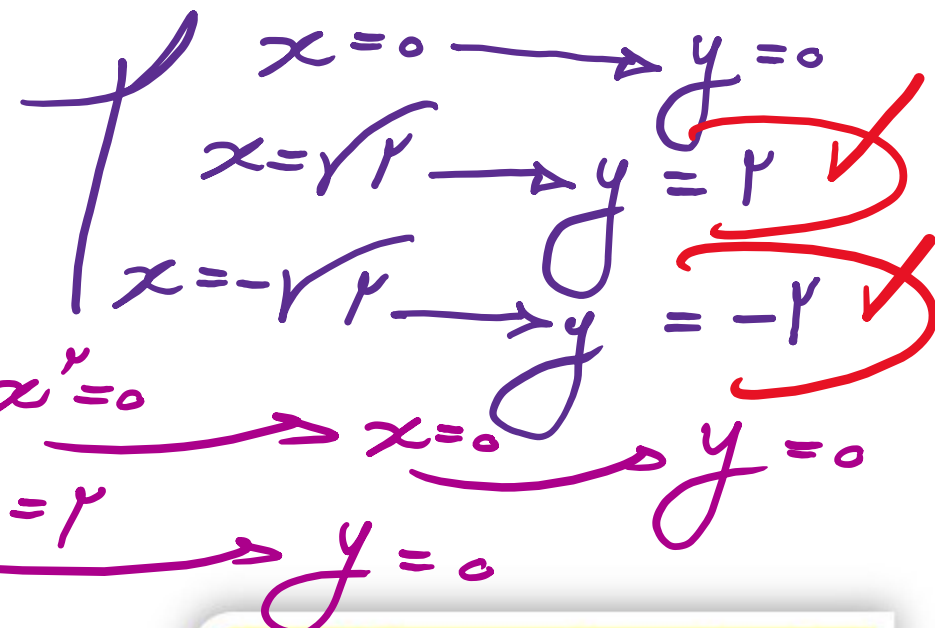
$$y = \sqrt{4x^2 - x^4} \rightarrow y' = \frac{4x - 4x^3}{2\sqrt{4x^2 - x^4}}$$

$$4x - 4x^3 = 0 \rightarrow 4x(1 - x^2) = 0$$

$$4x^2 - x^4 = 0 \rightarrow x^2(4 - x^2) = 0$$

max = 2

min = -2



۱۸- مینیمم مطلق تابع  $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}$  کدام است؟

① صفر

② -۳

③ -۱

④ -۲

$$y' = 1 + \frac{1x+1}{\sqrt{x^2+2x}} = 0 \rightarrow \sqrt{x^2+2x} = -x-1$$

$$\rightarrow x^2+2x = x^2+2x+1 \rightarrow 0=1 \quad \times$$

$$x^2+2x=0 \rightarrow x=0 \rightarrow y=1$$

$$x^2+2x=0 \rightarrow x=-2 \rightarrow y=-1$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۹- در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم  $\frac{\pi}{3}$ ، با کدام ارتفاع، کمترین مقدار جنس مصرف می شود؟

①  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

② ۱

~~③  $\sqrt{2}$~~

④  $\sqrt{2}$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \rightarrow r^2 h = 1 \rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{h}}$$

$$S = \pi r L = \pi r \sqrt{h^2 + r^2} = \pi \cdot \sqrt{\frac{1}{h}} \cdot \sqrt{h^2 + \frac{1}{h}} \rightarrow S = \pi \sqrt{h + \frac{1}{h}}$$

$$S' = 0 \rightarrow 1 - \frac{1}{h^2} = 0 \rightarrow \frac{1}{h^2} = 1 \rightarrow h^2 = 1 \rightarrow h = 1$$

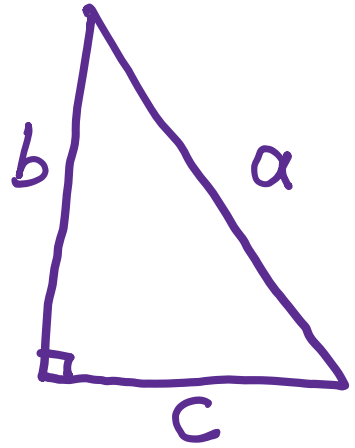
۲۰- بیشترین مساحت از مثلث‌های قائم الزاویه‌ای که مجموع یک ضلع زاویه قائمه و وتر آن برابر ۶ باشد، کدام است؟

۳√۲ (۴)

۴ (۳)

۲√۳ (۲)

۳ (۱)



$$a + b = 6$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 - b^2 = c^2$$

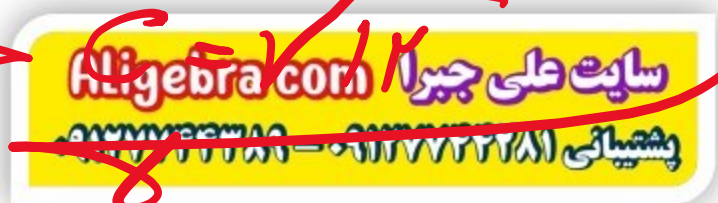
$$(a-b)(a+b) = 6(a-b) = c^2 \rightarrow a-b = \frac{c^2}{6}$$

$$\begin{cases} a + b = 6 \\ a - b = \frac{c^2}{6} \end{cases}$$

$$\rightarrow b = 3 - \frac{c^2}{12} \rightarrow S = \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{c^2}{12} \right) \cdot c$$

$$S = \frac{1}{2} \left( 3c - \frac{c^3}{12} \right) \quad S' = 0 \rightarrow 3 - \frac{c^2}{4} = 0$$

$$\rightarrow b = 2 \rightarrow S = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{12} = \sqrt{12}$$



۲۱- در ساخت یک لیوان فلزی (بدون درب) به شکل استوانه قائم با حجم  $\pi$ ، با کدام ارتفاع کمترین مقدار فلز مصرف می‌شود؟

$\sqrt{2}$  (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)

~~۱ (۱)~~

$$V = \pi r^2 h = \pi \rightarrow r^2 h = 1 \rightarrow h = \frac{1}{r^2}$$

$$S = 2\pi r h + \pi r^2 = 2\pi r \cdot \frac{1}{r^2} + \pi r^2 = \pi \left( \frac{2}{r} + r^2 \right)$$

$$S' = 0 \rightarrow \frac{-2}{r^3} + 2r = 0 \rightarrow 2r^3 = 2 \rightarrow r^3 = 1 \rightarrow r = 1$$

$$r = 1 \rightarrow h = 1$$

۲۲- حداکثر مساحت مستطیلی که بین منحنی  $y = \sqrt{6-x}$  و محورهای مختصات محصور است، چقدر است؟

۳ $\sqrt{2}$  (۴)

۲ $\sqrt{2}$  (۳)

۴ $\sqrt{2}$  (۲) ~~✓~~

۴ (۱)

$$S = x \cdot y = x \cdot \sqrt{6-x} = \sqrt{6x^2 - x^3}$$

$$S' = 0 \rightarrow 12x - 3x^2 = 0 \rightarrow 3x(4-x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ✗} \\ x=4 \text{ ✓} \end{cases}$$

$$S = x\sqrt{6-x} = 4 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$



۲۳- دو ضلع از مستطیلی منطبق بر محورهای مختصات و رأس چهارم آن واقع بر منحنی به معادله  $y = (x - 2)^2$  روی بازه  $[0, 2]$  است. بیشترین مساحت این مستطیل کدام است؟

$\frac{11}{9}$  (۴)

~~$\frac{32}{27}$  (۲)~~

$\frac{10}{9}$  (۲)

$\frac{28}{27}$  (۱)

$S = x \cdot y = x(x - 2)^2$

$S = \frac{2}{3} \times \frac{16}{9} = \frac{32}{27}$

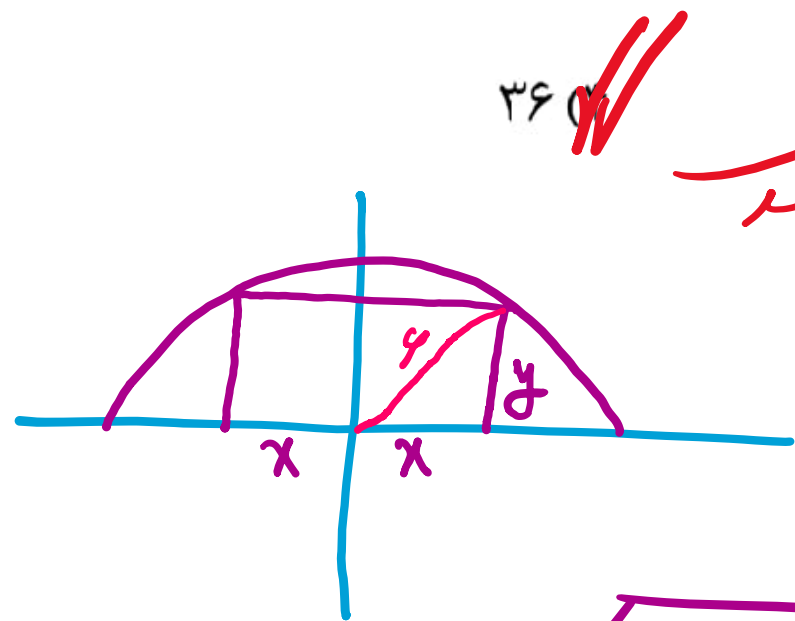
$S' = 0 \rightarrow 1 \cdot (x - 2)^2 + 2(x - 2) \cdot x = 0 \rightarrow (x - 2)(x - 2 + 2x) = 0$

$x = 2 \rightarrow y = 0$

$x = \frac{2}{3} \rightarrow y = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$



۲۴ - بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم دایره باشد، کدام است؟



۳۶ (۱)

۲۷ (۳)

۲۴ (۲)

۱۸ (۱)

$$S = 2xy = 2 \times 11 = 22$$

$$x + y = 11 \rightarrow y = 11 - x \rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$$

$$S = 2xy = 2x \cdot \sqrt{36 - x^2} = 2\sqrt{36x^2 - x^4} \quad \frac{d}{dx} = 0 \rightarrow 36x - 4x^3 = 0$$

$$4x(9 - x^2) = 0 \rightarrow x = 0 \quad \text{or} \quad x = \sqrt{9} = 3$$

۲۵- تابع  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x - 1$  بر بازه  $(a, b)$  نزولی اکید است. حداکثر  $b - a$  کدام است؟

۷ (۴)

۵ (۳)

۸ (۲)

۱۵ (۱)

$$f' = 3x^2 - 6x - 45 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$(x - 5)(x + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} & -3 & & 5 \\ \hline & + & - & + \\ \hline & & 0 & \end{array} \rightarrow \underline{\underline{(-3, 5)}}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹