

جمع بندی حسابان یازدهم

حد و پیوستگی

(فصل پنجم)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Algebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$\lim_{x \rightarrow r} [x] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow r^+} [x] = [r^+] = r \\ \lim_{x \rightarrow r^-} [x] = [r^-] = r-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [a^+] = a \\ [a^-] = a-1 \end{cases}$$

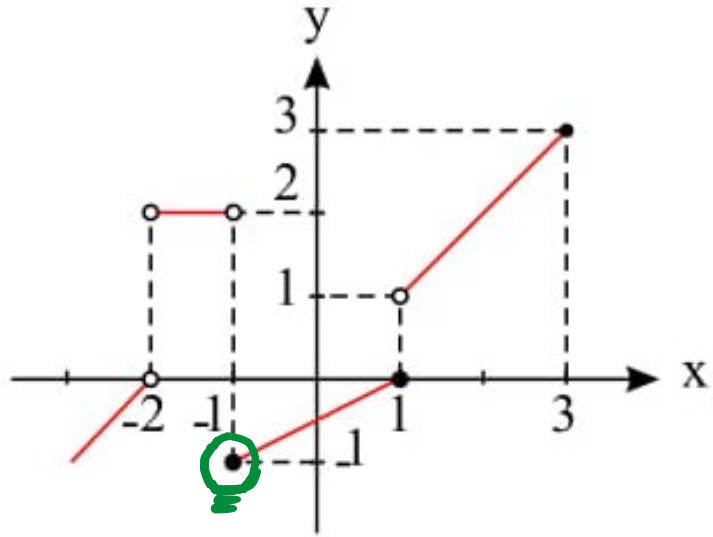
$$\lim_{x \rightarrow r} [-x] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow r^+} [-x] = [-r^-] = -r \\ \lim_{x \rightarrow r^-} [-x] = [-r^+] = -r+1 \end{cases}$$

$$[u] = u \\ u = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} rx \left[\frac{1}{x} \right] = rx \cdot \frac{1}{x} = r$$

$$[x] + [-x] \rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 0 \end{cases}$$

۸ نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(-\frac{x}{3}) + \lim_{x \rightarrow (-1)^-} [f(2x)]$ کدام است؟



$$\lim_{x \rightarrow \mu^-} f\left(-\frac{x}{3}\right) = f(-1^+) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} [f(2x)] = [f(-2^-)] = [-1] = -1$$

$$\text{جواب} = -1 - 1 = -2$$

حد چپ تابع $f(x) = 4[x] + 3[-x]$ در نقطه‌ای به طول صحیح a ، دو برابر حد راست تابع f در این نقطه است. a کدام است؟

$$[x] + [-x] = \begin{cases} x \in \mathbb{Z} & 0 \\ x \notin \mathbb{Z} & -1 \end{cases}$$

$$f(x) = [x] + 3[x] + 3[-x] = [x] - 3$$

حد راست a^+ : $a - 3$

حد چپ a^- : $a - 1 - 3 = a - 4$

$$a - 4 = 2(a - 3)$$

$$\rightarrow a = 2$$

۱۰ اگر $f(x) = \begin{cases} [x] & ; x > -1 \\ 1 - [x] & ; x \leq -1 \end{cases}$ ، آن گاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2 - 1)$ کدام است؟ [] نماد جزء صحیح است.

$x \rightarrow 0^+ : 0/01$
 $x \rightarrow 0^- : -0/01$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2 - 1) = f(\underbrace{0/01 - 1}_{-1}) = f(-1^+)$$

$$f(-1^+) = [-1^+] = -1$$

مجموع حد راست و چپ تابع $f(x) = -\left[\frac{-x-1}{x+2}\right]$ در $x = -3$ کدام است؟ (۱۱)

$$\frac{-x-1}{x+2} = \frac{-x-2+1}{x+2} = \frac{-x-2}{x+2} + \frac{1}{x+2}$$

$$-\left[\frac{-x-1}{x+2}\right] = -\left[-1 + \frac{1}{x+2}\right] = 1 - \left[\frac{1}{x+2}\right]$$

$$x \rightarrow -3^+ : 1 - \left[\frac{1}{-1^+}\right] = 1 - \left[-1^{\ominus}\right] = 1 - (-2) = 3$$

$$x \rightarrow -3^- : 1 - \left[\frac{1}{-1^-}\right] = 1 - \left[-1^+\right] = 1 - (-1) = 2$$

$$a+b = a$$

۱۲) اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a[x^r] - 3|2x - 2| + 1}{2b + |x + 2|} = \frac{1}{7}$ باشد، آن گاه $a^r + b^r$ کدام است؟

$$x \rightarrow 1^+ : \frac{a + 0 + 1}{2b + 3} = \frac{1}{7} \rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{1} = \sqrt{2b + 3}$$

$$x \rightarrow 1^- : \frac{0 - 0 + 1}{2b + 3} = \frac{1}{7} \rightarrow \sqrt{2b + 3} = \sqrt{1} \rightarrow b = 2$$

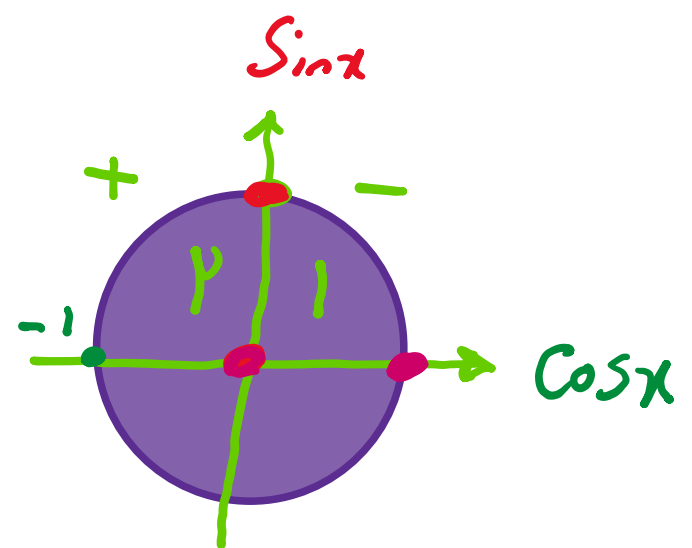
$$\sqrt{a} + \sqrt{1} = \sqrt{2 + 3} \rightarrow a = 0$$

$$a^r + b^r = 0 + 2^r = 2^r$$

مجموع حد راست و چپ تابع $f(x) = ۲[\sin x] + [\cos x]$ در نقطه $x = \frac{\pi}{۲}$ کدام است؟

$x \rightarrow \frac{\pi}{۲}^+ : ۲(0) + (-1) = -1$

$x \rightarrow \frac{\pi}{۲}^- : ۲(0) + (0) = 0$



$$\lim_{x \rightarrow r} \frac{|x-r|}{x-r} = \begin{cases} x \rightarrow r^+ : \frac{x-r}{x-r} = +1 \\ x \rightarrow r^- : \frac{-(x-r)}{x-r} = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^p + r^q x - r|}{x-1} \rightarrow \begin{cases} x \rightarrow 1^+ : \frac{+(x^p + r^q x - r)}{x-1} \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 1^- : \frac{-(x^p + r^q x - r)}{x-1} \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$x^p + r^q x - r = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-r \end{cases}$$

	-r	1	
+	-	+	+
	✓	✓	

۱۴) به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) =$ در $x = 2$ دارای حد است؟

$$f(x) = \begin{cases} 6ax^2 + 1 & x > 2 \\ 3 & x = 2 \\ \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{-2x + 4} & x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f = \lim_{x \rightarrow 2^-} f$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{-2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{-2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{-2(x-2)} = \frac{1}{2}$$

$$2^2 a + 1 = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{-1}{4}$$

۱۵ تابع $f(x)$ در \mathbb{R} حد دارد. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x) + x}{2f^2(x) - 8x^2} = 1$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \left| f(x) - \frac{3}{4} \right|$ کدام است؟

$$\frac{3A+1}{2A^2-8} = 1 \rightsquigarrow 2A^2-8 = 3A+1 \rightsquigarrow 2A^2-3A-9=0$$

$\Delta > 0$ \rightarrow

$$\begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ A = 3 \end{cases}$$

$$\left| -\frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right| = \frac{9}{4}$$

$$\left| 3 - \frac{3}{4} \right| = \frac{9}{4}$$

جواب = $\frac{9}{4}$

۱۶ اگر $f(x+2) = \frac{\cos \pi x}{1 + \sin \pi x}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \pi x}{1 + \sin \pi x} = \frac{-1}{1 + 0} = -1$$

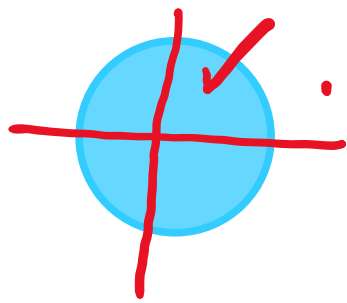
$$\frac{0}{0} \rightarrow \frac{0}{a} = 0 \quad / \quad \frac{a}{0} = \infty \quad / \quad \frac{a}{a} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\mu - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \frac{\mu x^{\mu-1}}{1} = \mu \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = 0 \quad \checkmark$$

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$



کدام است؟ $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\tan 2x}$ حاصل ۱۷

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{2} |\cos \frac{x}{2}|}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin 2x} \xrightarrow{H.o.P} \frac{\sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \right)}{2 \cos 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \left(\frac{\sin x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \right) \cdot \cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2 \times 1 \times (-1)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

حد کسر $\frac{x + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}}$ وقتی $x \rightarrow 1^+$ کدام است؟ (۱۸)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1 + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{\sqrt{x-1}} (\sqrt{x-1} + 1)}{\cancel{\sqrt{x-1}} \cdot \sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

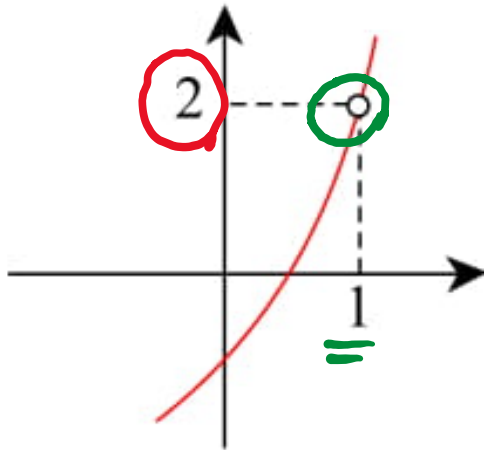
حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\cos^3 x}{|\sin 2x - 2 \cos x|}$ کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos^3 x}{|2 \sin x \cos x - 2 \cos x|} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos^3 x}{\underbrace{2 \cos x}_+ (\underbrace{\sin x - 1}_-)}$$

$\cos x \cdot \cos^2 x = \cos x \cdot (1 - \sin^2 x)$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cancel{\cos x} \cdot (1 - \cancel{\sin x})(1 + \sin x)}{2 \cancel{\cos x} (1 - \cancel{\sin x})} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

۲۰ نمودار مقابل قسمتی از تابع $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + ax + b}{x + c}$ را نشان می‌دهد. مقدار $f(2)$ کدام است؟



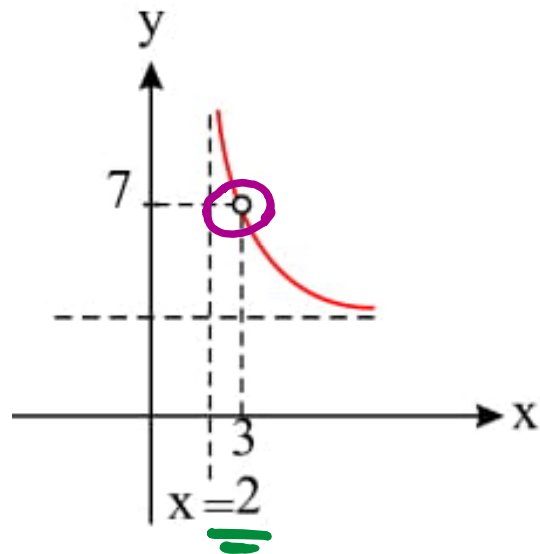
$$x=1 \rightarrow \begin{cases} 1+2+a+b=0 \rightarrow a+b=-3 \\ 1+c=0 \rightarrow c=-1 \end{cases}$$

$$b=2$$

$$\text{HOP} \rightarrow \frac{1x^2 + 1x + a}{x+1} = 2 \rightarrow 1+1+a=2 \rightarrow a=-5$$

$$f(2) = \frac{1+1-10+2}{2-1} = 1$$

۲۱) اگر قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$ مطابق شکل زیر باشد، حاصل $ab + cd$ کدام است؟



$$x=3 \rightarrow \begin{cases} 11 + 3a + b = 0 \rightarrow 3a + b = -11 \\ 9 + 3c + d = 0 \rightarrow 3c + d = -9 \end{cases}$$

$$x=2 \rightarrow \begin{cases} 4 + 2c + d = 0 \rightarrow 2c + d = -4 \\ c = -5 \\ d = 6 \end{cases}$$

HoP \rightarrow

$$\frac{2x+a}{2x+c} = 7 \rightarrow \frac{11+a}{9-5} = 7 \rightarrow a = -5 \text{ or } b = -3$$

$$ab + cd = 15 - 18 = -3$$

حد عبارت $\frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos 2x}$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (۲۲)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\frac{\sqrt{\tan x} - 1}{1 + \tan^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2(\tan x - 1)}{1 - \tan^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-2(1 - \tan x)}{(1 - \tan x)(1 + \tan x)} = \frac{-2}{1 + 1} = -1$$

اگر $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^3 - 4x^2 + 4x}}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ کدام است؟ ۲۳

$$f(4^-) = f(4^-)$$

$$x \rightarrow 4^+ : f(4^+) = f(4^-)$$

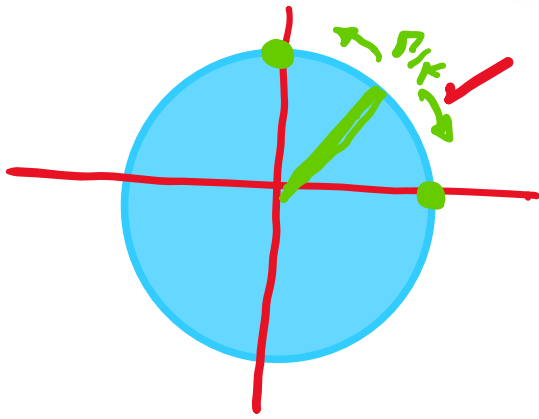
$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x(x^2 - 4x + 4)}} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-2)(x+1)}{\sqrt{x}(x-2)} = \frac{4}{\sqrt{4}} = \frac{4}{2} = 2$$

حد تابع $\frac{x + \sqrt[3]{x^2 - x^3} - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-x} - 1}$ وقتی $x \rightarrow 1$ برابر کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-x} - 1)}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-x} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x^2} = 1$$

اختلاف حد راست و حد چپ تابع $f(x) = \frac{\sqrt{1 - \sin 2x}}{\cos x - \sin x}$ در $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (۲۵)



$$\begin{aligned}
 & 1 - \sin^2 x \\
 &= \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x \\
 &= (\sin x - \cos x)^2
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{|\sin x - \cos x|}{\cos x - \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x - \sin x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x} = +1$$

+۲ ✓

حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}}$ ، کدام است؟

$\frac{0}{0}$ $\xrightarrow{H\&O}$ $\frac{2x+5}{\frac{0 + \frac{0}{2\sqrt{3-x}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}}}$ = $\frac{1}{\frac{1}{19}}$ = 19

$\sqrt{u} \rightarrow \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

۲۷) حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1}$ کدوم است؟

$\frac{0}{0} \xrightarrow{H.O.P} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1}$

$$= \frac{14}{\frac{-1}{4}} = \frac{14}{-\frac{1}{4}} = -112$$

حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$ کدام است؟ (۲۸)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} \cdot \frac{1 + \sqrt{\cos x}}{1 + \sqrt{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$$

$\xrightarrow{\text{green}} 1 - \cos^2 x$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cancel{\cos x}}{\sin^2 x (1 - \cancel{\cos x})(1 + \cos x)} = \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2}$$

حد عبارت $\frac{2 - \sqrt[3]{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16}$ وقتی $x \rightarrow 2$ ، کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt[3]{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} = \frac{-3}{12} = \frac{-1}{4}$$

$$= \frac{-1}{8}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{n \sqrt[n]{u^m}}{n \sqrt[n]{u^{n-m}}} = \frac{m \cdot u'}{n \sqrt[n]{u^{n-m}}}$$