جمع بندی حسابان یازدهم

فصل چهارم

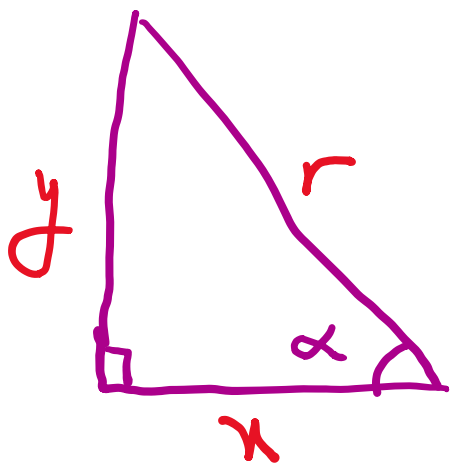
مثلثات

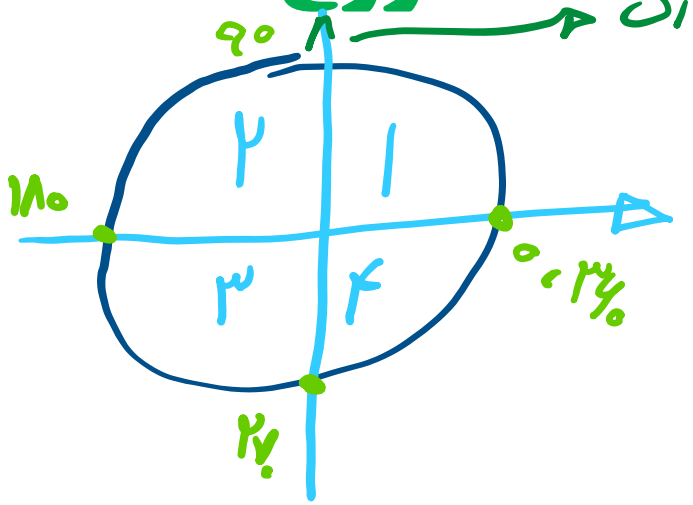
علی جبرا|سایت تخصصی آموزش ریاضی

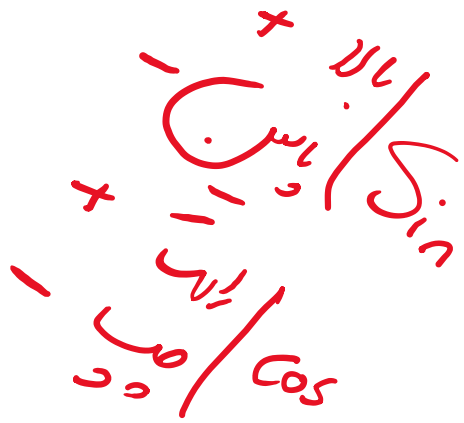
ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

شروع مثلثات







$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$

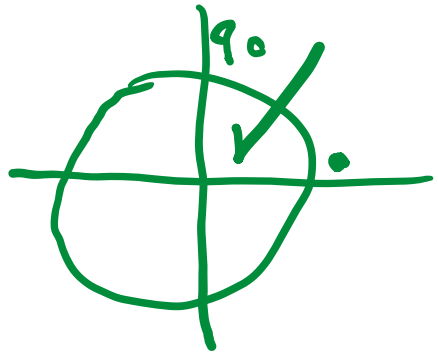
$$\cot\alpha = \frac{x}{y}$$

	۱	۲	۳	۴
Sinx	+	+	−	−
Cosx	+	−	−	+
tanx	+	−	+	−
cotx	+	−	+	−

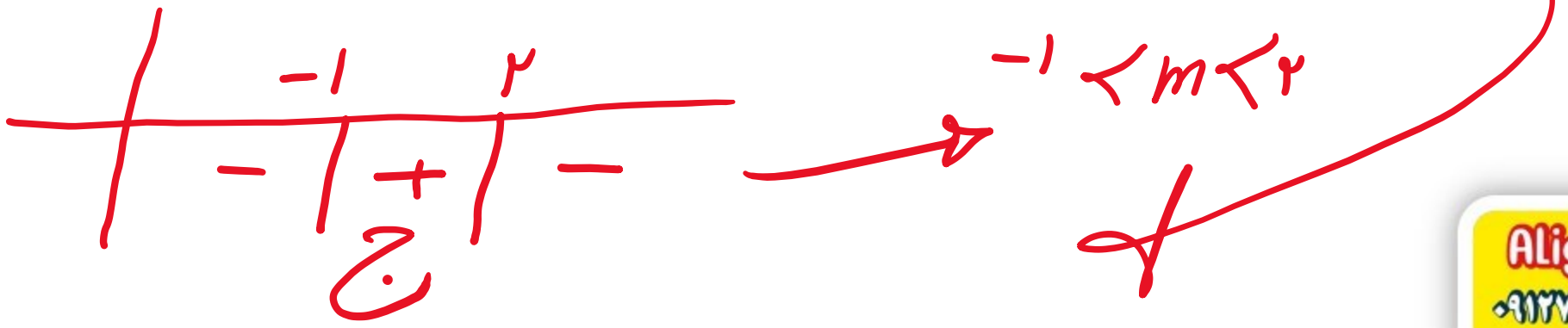
۱- اگر $|x| < \frac{\pi}{۴}, \tan(\frac{\pi}{۴} - x) = \frac{۲ - m}{m + ۱}$ باشد حدود تغییرات m چگونه است؟

$|x| < \frac{\pi}{۴} \rightarrow \frac{-\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴} \xrightarrow{\times(-۱)} \frac{-\pi}{۴} < -x < \frac{\pi}{۴}$

$\xrightarrow{+\pi/۴} ۰ < \frac{\pi}{۴} - x < \frac{\pi}{۲}$



$\frac{۲-m}{m+۱} > ۰ \rightarrow \begin{cases} m = ۲ \\ m = -۱ \end{cases}$



$-۱ < m < ۲$

۲- اگر $\cos x + \sqrt[۲]{\cos x} = \sin x$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

$\cos x \geq 0 \longrightarrow$ ۱ و ۴

ناحیه اول $\longrightarrow \cos x + \sqrt{\cos x} = \sin x$ (+ + −) ✓

ناحیه چهارم $\longrightarrow \cos x + \sqrt{\cos x} = \sin x$ (+ + −) ✗

کمان و رادیان

$30^\circ \rightarrow \frac{\pi}{6}$

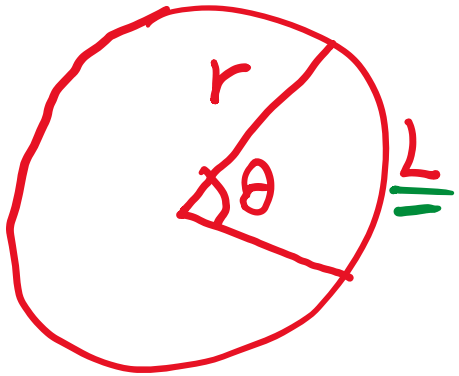
$45^\circ \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$60^\circ \rightarrow \frac{\pi}{3}$

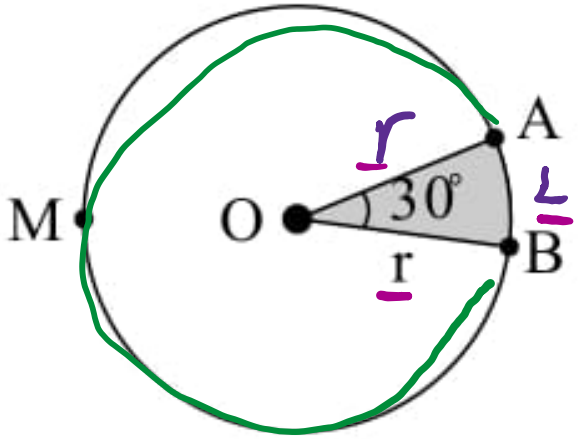
$180^\circ \rightarrow \pi$

$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$

$L = r \times \theta \rightarrow$ رادیان



۳- در شکل مقابل، محیط ناحیهٔ هاشورخورده $\pi + ۱۲$ است. در این صورت طول کمان $\overset{\frown}{AMB}$ کدام است؟



$$L = r\theta \rightarrow L = r \times \frac{\pi}{۶}$$

$$P = ۲r + L \rightarrow ۲r + \frac{r\pi}{۶} = ۱۲ + \pi$$

$$\rightarrow r\left(۲ + \frac{\pi}{۶}\right) = ۱۲ + \pi \rightarrow r = \frac{۱۲ + \pi}{۲ + \frac{\pi}{۶}} = ۶$$

$$\overset{\frown}{AMB} = r \times \theta = ۶\left(۲\pi - \frac{\pi}{۶}\right) = ۶ \times \frac{۱۱\pi}{۶} = ۱۱\pi$$

فرمول

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\tan x \cdot \cot x = 1$

$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ / $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

$\sin 4x = 2\sin 2x \cdot \cos 2x$

$\sin 9x = 2\sin \frac{9x}{2} \cdot \cos \frac{9x}{2}$

$\sin 10x \cdot \cos 10x = \frac{1}{2}\sin 20x$

$\sin 4x \cdot \cos 4x = \frac{1}{2}\sin 8x$

$$\alpha+\beta=110^\circ \longrightarrow \begin{cases} \sin\alpha=\sin\beta \\ \cos\alpha+\cos\beta=0 \end{cases}$$

$$120^\circ+60^\circ=180^\circ \longrightarrow \begin{cases} \sin 120^\circ=\sin 60^\circ \\ \cos 60^\circ+\cos 120^\circ=0 \end{cases}$$

$$\alpha+\beta=90^\circ \longrightarrow \begin{cases} \sin\alpha=\cos\beta \\ \cos\alpha=\sin\beta \end{cases}$$

۴- اگر $\cos x - \sin x = -\frac{\sqrt{۲}}{۴\sin x}$ ، حاصل $\sin ۴x$ کدام است؟

$\sin x \cdot \cos x - \sin^۲ x = \frac{-\sqrt{۲}}{۴} \rightarrow \frac{۱}{۲}\sin ۲x - \left(\frac{۱-\cos ۲x}{۲}\right) = \frac{-\sqrt{۲}}{۴}$

$\times ۲ \rightarrow \sin ۲x - ۱ + \cos ۲x = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} \rightarrow \sin ۲x + \cos ۲x = ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

توان ۲ $\rightarrow \sin^۲ ۲x + \cos^۲ ۲x + ۲\sin ۲x \cdot \cos ۲x = ۱ + \frac{۱}{۲} - \sqrt{۲}$

$\rightarrow ۱ + \sin ۴x = ۱ + \frac{۱}{۲} - \sqrt{۲}$

$\rightarrow \sin ۴x = \frac{۱}{۲} - \sqrt{۲}$ ✓

۵- اگر $\cot\alpha = ۲$ باشد، حاصل $\dfrac{\sin^۴\alpha + \cos^۳\alpha \sin\alpha}{۴\sin^۲\alpha \cos^۲\alpha}$ عبارت کدام است؟

$$\frac{\cos a}{\sin a} = ۲ \longrightarrow \cos a = ۲\sin a$$

$$\frac{\sin^۴ a + ۱\sin^۳ a \cdot \sin a}{۴\sin^۲ a \cdot ۴\sin^۲ a} = \frac{۹\sin^۴ a}{۱۶\sin^۴ a} = \frac{۹}{۱۶}$$

۶- اگر انتهای کمان α در ناحیه‌ی اول باشد عبارت $\sqrt{1+\cot^2\alpha}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ برابر کدام است؟

$$\sqrt{1+\cot^2 a}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2 a}}=\frac{1}{|\sin a|}\xrightarrow{\text{اول}}\frac{1}{+\sin a}$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}\times\frac{1-\cos a}{1-\cos a}}=\sqrt{\frac{(1-\cos a)^2}{\sin^2 a}}=\left|\frac{1-\cos a}{\sin a}\right|=\frac{1-\cos a}{\sin a}$$

$$\frac{1}{\sin a}=\frac{1-\cos a}{\sin a}=\frac{\cos a}{\sin a}=\cot a$$

۷- اگر $\sin 2x + \cos 2x = -\frac{1}{5}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام است؟

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad \tan x = A$$

$$\rightarrow \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} + \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{-1}{5} \rightarrow \frac{2A+1-A^2}{1+A^2} = \frac{-1}{5}$$

$$\rightarrow 10A + 5 - 5A^2 = -1 - A^2 \rightarrow 4A^2 - 10A - 6 = 0$$

$$\rightarrow 2A^2 - 5A - 3 = 0 \rightarrow \Delta = 25 - 4(2)(-3) = 49$$

$$\tan x = \frac{5 \pm 7}{4} \rightarrow \begin{cases} \tan a = 3 \checkmark \\ \tan a = -\frac{1}{2} \checkmark \end{cases}$$

۸ - مقدار عبارت $\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}$ کدام است؟

$$\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{14}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{14}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{4\pi}{14}\cdot\cos\frac{2\pi}{14}}{\cos\frac{\pi}{14}}\times\frac{\cos\frac{\pi}{14}}{\cos\frac{\pi}{14}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{14}\cdot\cos\frac{2\pi}{14}}{\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{14}\cdot\cos\frac{4\pi}{14}\right)\cdot\cos\frac{2\pi}{14}}{\cos\frac{\pi}{14}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\cos\frac{3\pi}{14}\right)}{\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{6\pi}{14}}{\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{\frac{1}{8}\cdot\sin\frac{6\pi}{14}}{\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{1}{8}$$

۹- اگر $3\sin x - 4\cos x = 5$ باشد، حاصل $\cos 2x$ کدام است؟

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad \tan\frac{x}{2} = A$$

$$\rightsquigarrow 3\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right) - 4\left(\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right) = 5$$

$$\times\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) \rightsquigarrow 6A - 4(1-A^2) = 5(1+A^2) \rightsquigarrow A^2 - 6A + 9 = 0 \rightsquigarrow A = 3$$

$$\tan\frac{x}{2} = 3$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \rightsquigarrow \tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{6}{-8} = \frac{-3}{4}$$

$$\cos 2x = \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}} = \frac{7}{25} = 0/28$$

۱۰ - حاصل $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$ ، کدام است؟

$$\frac{\cos 15 - \sin 15}{\sin 15 \cdot \cos 15} = \frac{\sqrt{2}/2}{1/4} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sin 15 \cdot \cos 15 = \frac{1}{2}\sin 30 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$A = \cos 15 - \sin 15 \xrightarrow{\text{توان ۲}} A^2 = \cos^2 15 + \sin^2 15 - 2\sin 15 \cdot \cos 15$$

$$\rightarrow A^2 = 1 - \sin 30 = \frac{1}{2} \rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۱- اگر $\pi < x < \frac{۳\pi}{۲}$ باشد، حاصل $\sqrt{۱+\tan^۲ x}\,(۲\sin^۲ \frac{\pi}{۴} - \sin^۲ x)$، کدام است؟

$\sqrt{1+\tan^۲ x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^۲ x}} = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{1}{-\cos x}$

سوم

$۲\sin^۲ \frac{\pi}{۴} - \sin^۲ x = 1 - \sin^۲ x = \cos^۲ x$

$\frac{-1}{\cos x} \cdot \cos^۲ x = -\cos x$

زاویه بازی

$\sin 120 \longrightarrow$

$\sin(90 + 30) = +\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(180 - 60) = +\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

90° و 270°

$\longrightarrow \frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$

۱۲- اگر $\tan ۲۰^\circ = ۰/۳۶$، حاصل $\dfrac{\sin ۱۶۰^\circ - \cos ۲۰۰^\circ}{\cos ۱۱۰^\circ + \sin ۷۰^\circ}$ کدام است؟

$$\frac{\sin(۱۱۰-۲۰)\ominus\cos(۱۱۰+۲۰)}{\cos(۹۰+۲۰)+\sin(۹۰-۲۰)} = \frac{\sin ۲۰ + \cos ۲۰}{-\sin ۲۰ + \cos ۲۰}$$

$\div \cos ۲۰$

$$\frac{\tan ۲۰ + ۱}{-\tan ۲۰ + ۱} = \frac{۰/۳۶+۱}{-۰/۳۶+۱} = \frac{۱/۳۶}{۰/۶۴} = \frac{۱۷}{۸}$$

۱۳ - حاصل عبارت $\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(\frac{-۱۷\pi}{۶})+\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})$ کدام است؟

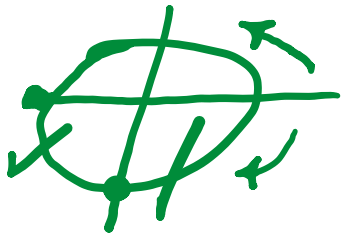
$$\sin\left(\frac{۱۸\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳}\right)\cdot\cos\left(\frac{۱۸\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}\right)-\tan\left(\frac{۲۰\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴}\right)\cdot\sin\left(\frac{۱۲\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}\right)$$

۶π ۳π ۵π ۲π

$$=\left(-\sin\frac{\pi}{۳}\right)\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{۶}\right)-\left(-\tan\frac{\pi}{۴}\right)\left(-\sin\frac{\pi}{۶}\right)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)-(-۱)\left(-\frac{۱}{۲}\right)$$

$$=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$



۱۴- اگر $\tan\alpha = \frac{۲}{۳}$ باشد مقدار $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{۲}) + \sin(۳\pi + \alpha)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$ کدام است؟

$$\frac{-\cos\alpha - \sin\alpha}{+\sin\alpha - \cos\alpha} \xrightarrow{\div \cos\alpha} \frac{-۱ - \tan\alpha}{\tan\alpha - ۱}$$

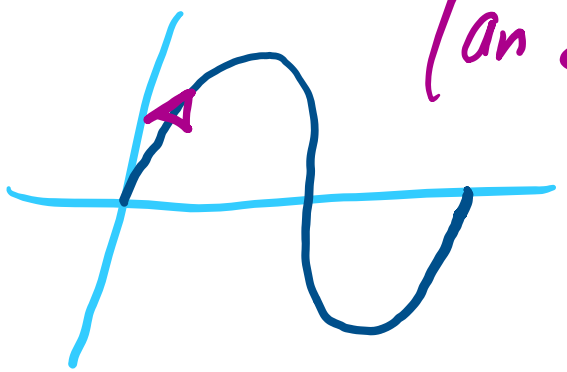
$$\rightarrow \frac{-۱ - \frac{۲}{۳}}{\frac{۲}{۳} - ۱} = \frac{-\frac{۵}{۳}}{-\frac{۱}{۳}} = +۵$$

۱۵ - حاصل عبارت $\frac{\cos ۲۸۵^\circ - \sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ - \sin ۱۰۵^\circ}$، با فرض $\tan ۱۵^\circ = ۰/۲۸$، کدام است؟

$$\frac{\cos(۲۷۰+۱۵) - \sin(۲۷۰-۱۵)}{\sin(\underbrace{۳۶۰}_{۲\pi}-۱۵) - \sin(۹۰+۱۵)} = \frac{+\sin ۱۵ + \cos ۱۵}{\sin ۱۵ - \cos ۱۵}$$

$$\xrightarrow{\div \cos ۱۵} \frac{\tan ۱۵ + ۱}{\tan ۱۵ - ۱} = \frac{۰/۲۸+۱}{۰/۲۸-۱} = \frac{۱/۲۸}{-۰/۷۲} = -\frac{۱۶}{۹}$$

نمودار شناسی

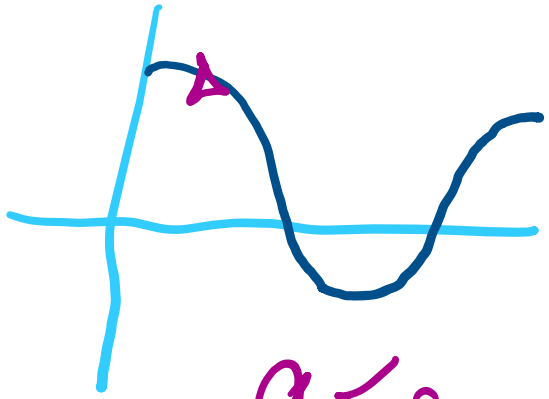


tan

$y = \pm a \sin bx$

a.b

$T = \frac{2\pi}{|b|}$



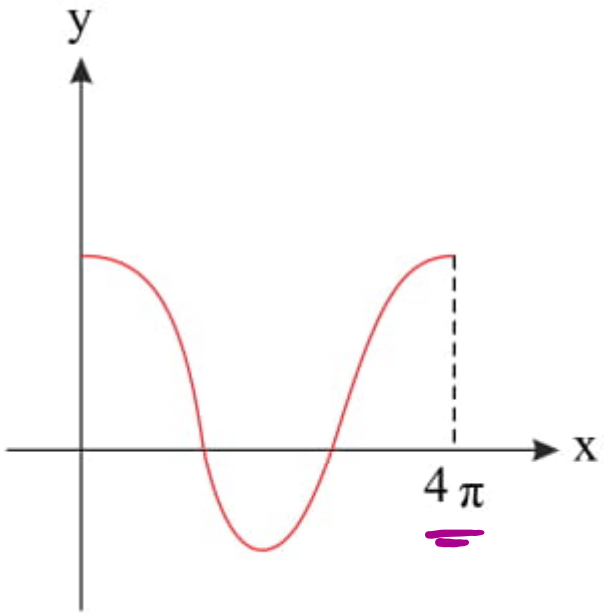
$y = a \cos bx$

$\pm$

$a < 0$

$a > 0$

۱۶ - شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲} + ۲\cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ای به طول $x = \frac{۱۶\pi}{۳}$، کدام است؟

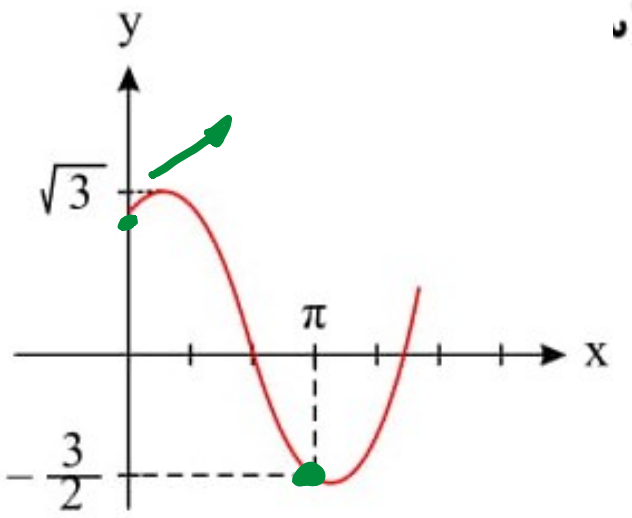


$\frac{۲\pi}{|m|} = ۴\pi \rightarrow |m| = \frac{۲\pi}{۴\pi} = \frac{۱}{۲} \rightarrow m = \pm\frac{۱}{۲}$

$x = \frac{۱۶\pi}{۳} \rightarrow y = \frac{۱}{۲} + ۲\cos\left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱۶\pi}{۳}\right) = \frac{۱}{۲} + ۲\cos\frac{۸\pi}{۳}$

$\frac{۱}{۲} + ۲\cos\left(\underbrace{\frac{۹\pi}{۳}}_{۳\pi} - \frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۱}{۲} - ۲\cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲} - ۱ = -\frac{۱}{۲}$

۱۷ - شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. b کدام ا



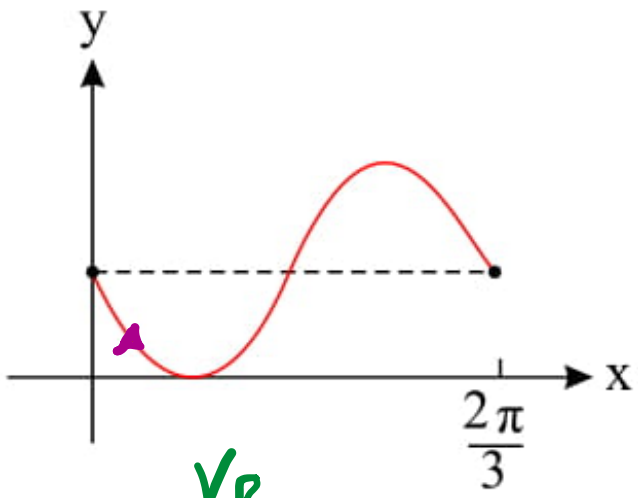
$a+b=\sqrt{3}$

$a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=-\frac{3}{2}$

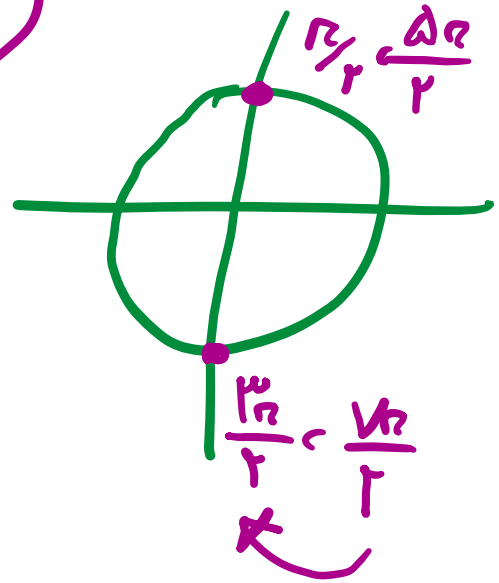
$\begin{cases} x=\pi \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow a+b\sin(\pi+\frac{\pi}{3})=-\frac{3}{2}$

$x(-2)$ $\begin{cases} a+b=\sqrt{3} \\ 2a-\sqrt{3}b=-3 \end{cases} \rightarrow b=\sqrt{3}$

۱۸ - شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = ۱ - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ی $x = \frac{۷\pi}{۶}$، کدام است؟



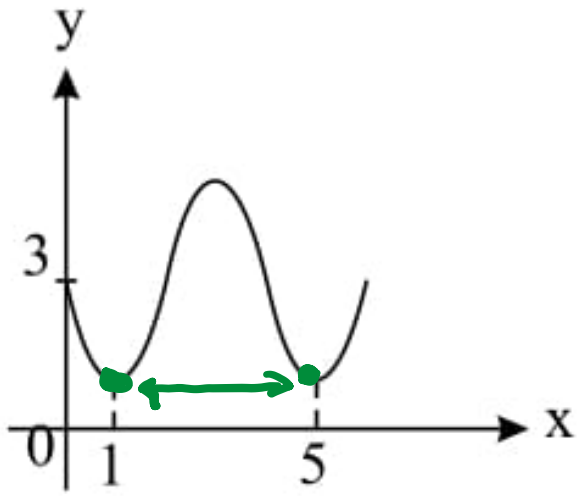
$\frac{۲\pi}{m} = \frac{۲\pi}{۳} \rightarrow m = ۳$



$x = \frac{۷\pi}{۶}$

$y = ۱ - \sin \frac{۷\pi}{۲} = ۱ + ۱ = ۲$

۱۹ - شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه‌ی $x = \frac{۲۵}{۳}$ کدام است؟



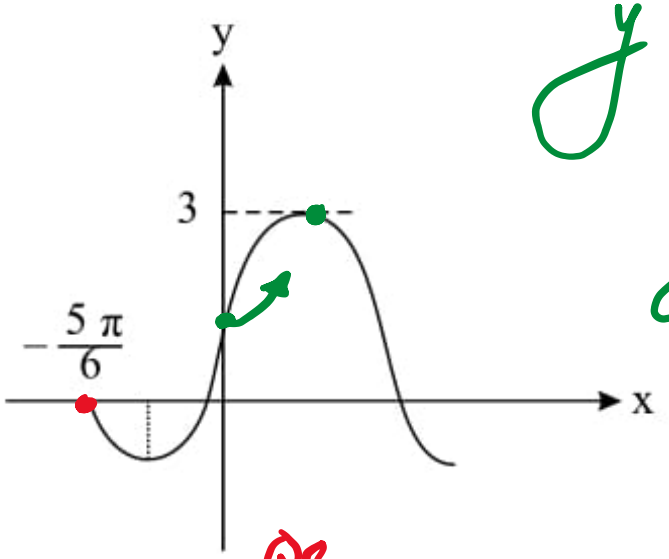
$$\frac{۲\pi}{-b\pi} = ۴ \rightarrow b = -\frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases} x = ۰ \\ y = ۳ \end{cases} \rightarrow ۳ = a + ۰ \rightarrow a = ۳$$

$$y = ۳ + \sin\left(-\frac{۱}{۲} \times \pi \times \frac{۲۵}{۳}\right) = ۳ - \sin\frac{۲۵\pi}{۶}$$

$$۳ - \sin\left(\underbrace{\frac{۲۴\pi}{۶}}_{۴\pi} + \frac{\pi}{۶}\right) = ۳ - \sin\frac{\pi}{۶} = ۲.۵$$

۲۰ – شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{۶}$ کدام است؟



$y = a + b\sin x$

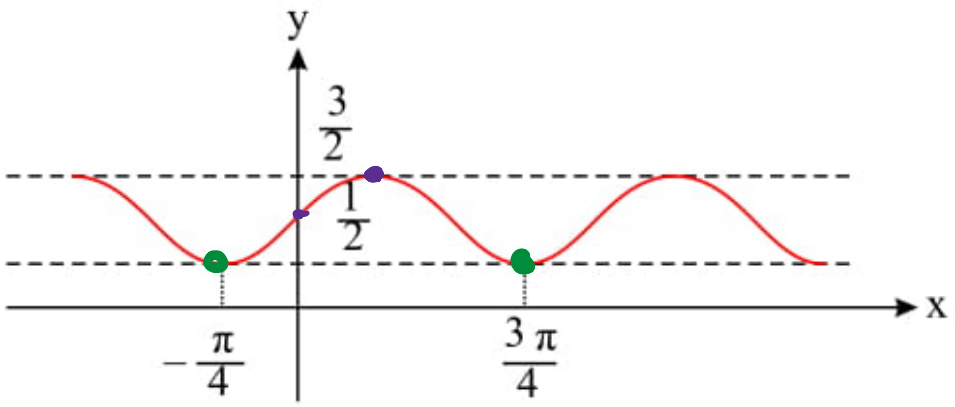
$y_{max} = ۳ \rightarrow a + b = ۳$

$\begin{cases} a = ۱ \\ b = ۲ \end{cases}$

$-\frac{\pi}{۶}$ ۰ $\rightarrow a + b\sin(-\frac{\pi}{۶}) = ۰ \rightarrow a - b \cdot \frac{۱}{۲} = ۰ \rightarrow ۲a - b = ۰$

$y = ۱ + ۲\sin x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{۴}} y = ۱ + ۱ = ۲$

۲۱ – شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = ۱ + a\sin bx\cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟



$y = ۱ + a\cdot\frac{۱}{۲}\sin ۲bx = ۱ + \frac{۱}{۲}a\sin ۲bx$

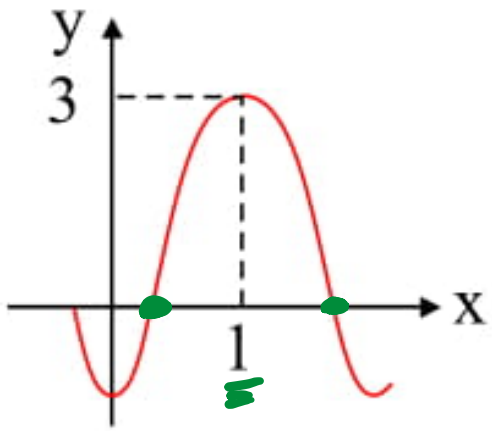
$y_{max} = \frac{۳}{۲} \rightarrow ۱ + \frac{۱}{۲}a = \frac{۳}{۲} \rightarrow a = ۱$

$T = \pi = \frac{۲\pi}{|۲b|} \rightarrow |b| = ۱ \rightarrow b = ۱$

$a + b = ۲$

$a + b = -۲$

۲۲- اگر قسمتی از نمودار تابع $y = ۱ + a \cos b\pi x$ به صورت مقابل باشد، a کدام است؟

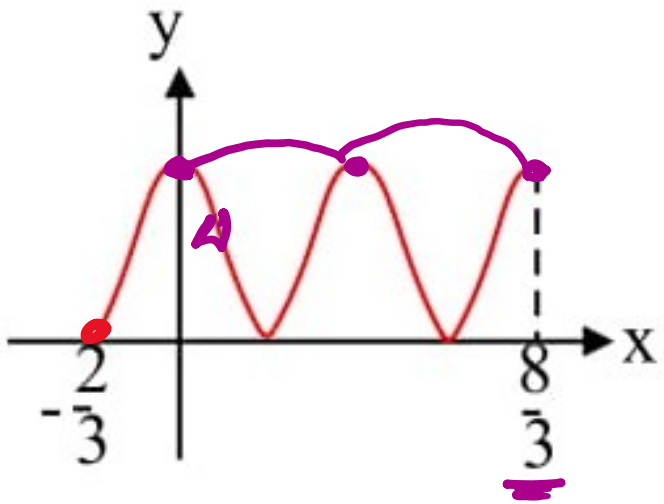


$x=1$, $y=3$ $\rightarrow$ $1 + a\cos b\pi = 3$

$1 + \underbrace{a \cdot \cos\pi}_{-a} = 3 \rightarrow a = -2$

$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1$

۲۳ - شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = ۳ + a\cos(b\pi x)$ است، حاصل $(a + ۲b)$



$$۲T = \frac{۸}{۳} \rightarrow T = \frac{۴}{۳}$$

$$\frac{۴}{۳} = \frac{۲\pi}{b\pi} \rightarrow b = \pm\frac{۳}{۲}$$

$$\left|_{۰}^{-\frac{۲}{۳}}\right. \rightarrow ۳ + a\cos\left(\frac{۳}{۲}\cdot\pi\cdot\mp\frac{۲}{۳}\right) = ۰ \rightarrow ۳ - a = ۰$$

$$\rightarrow a = ۳$$

$$a + ۲b = ۳ + ۳ = ۶$$

$$a + ۲b = ۳ - ۳ = ۰$$