

جمع بندی ریاضی نهم

استدلال و اثبات در هندسه

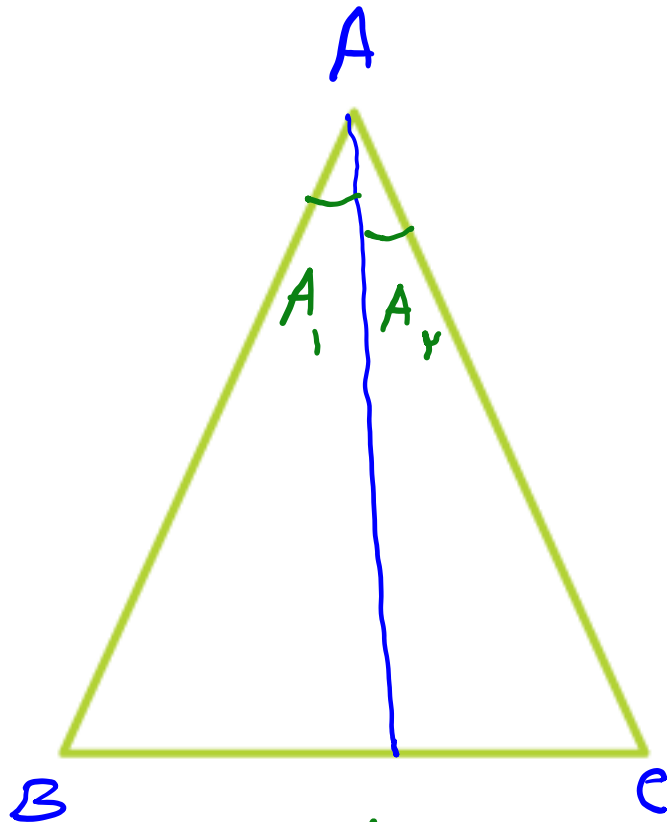
(فصل سوم)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

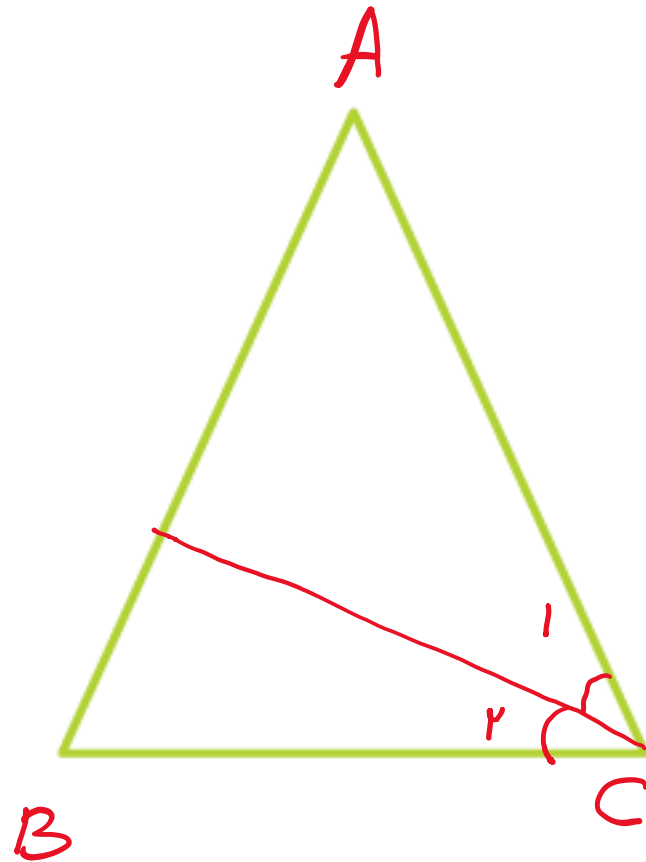
ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت Algebra.com است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

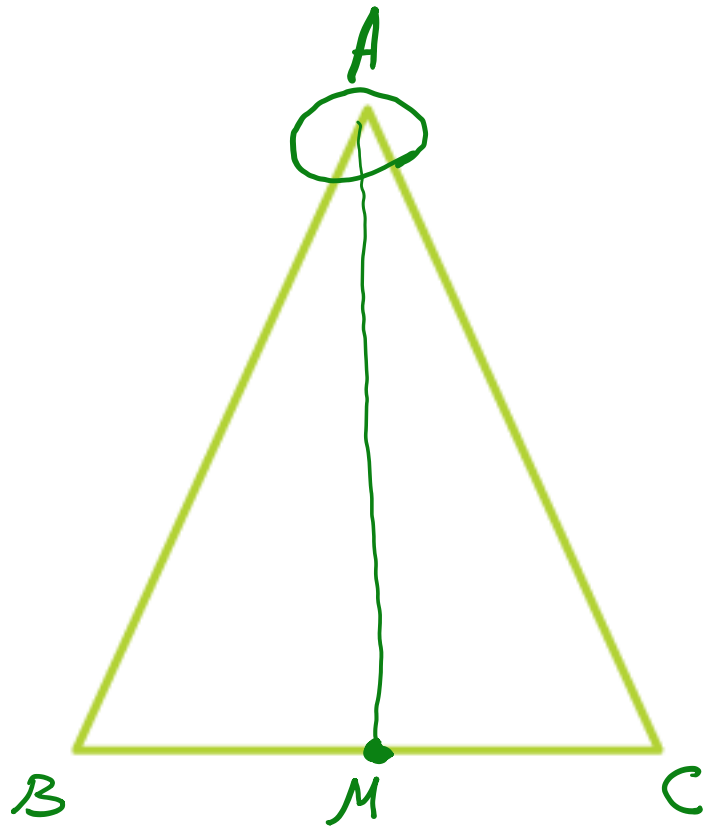


$$\underline{\underline{A_1 = A_2}}$$

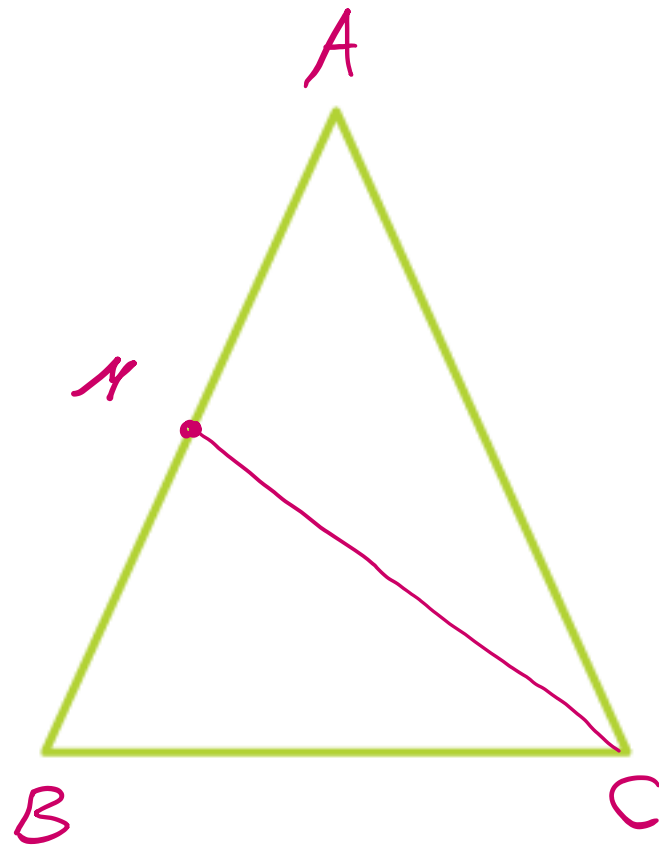


$$\underline{\underline{C_1 = C_2}}$$





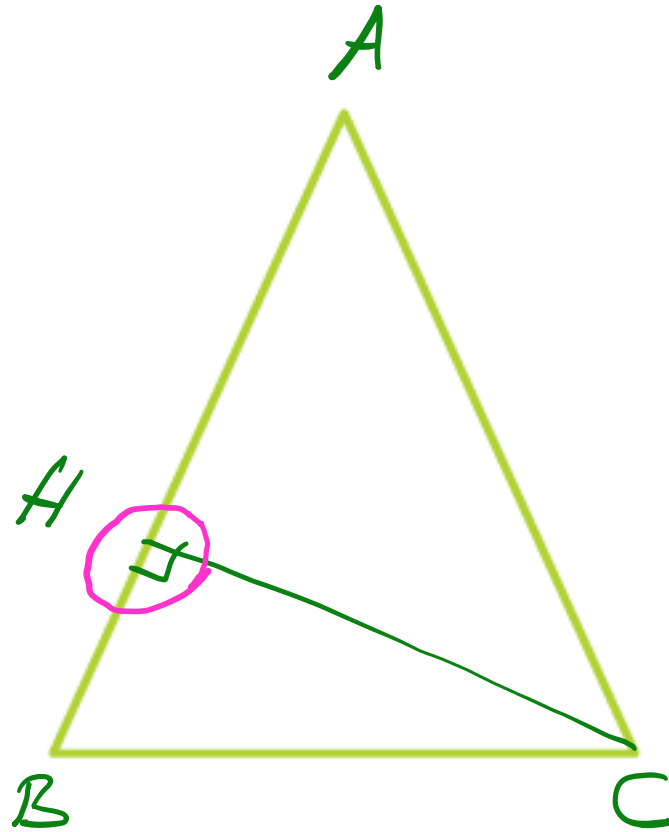
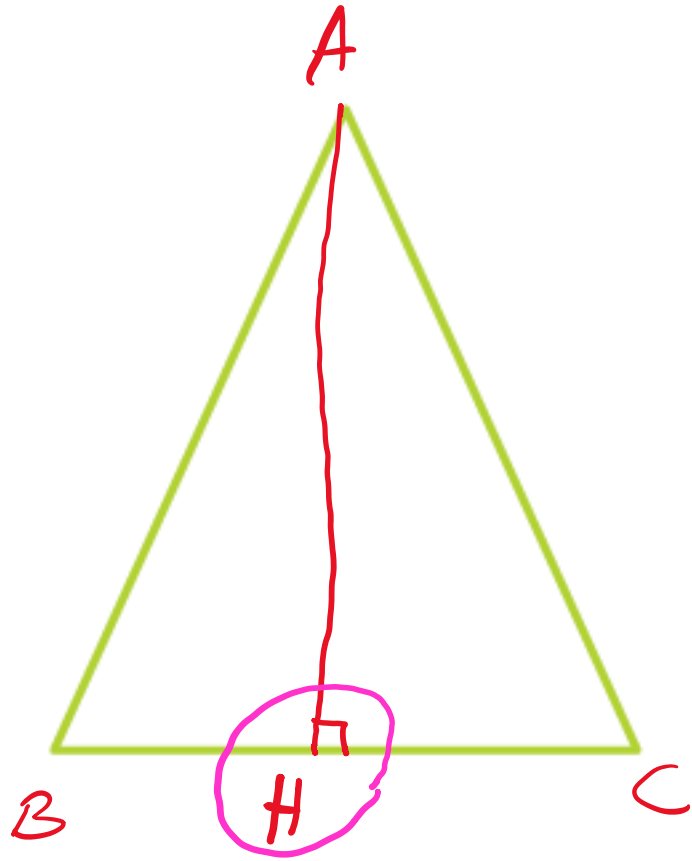
$$BM = CM$$



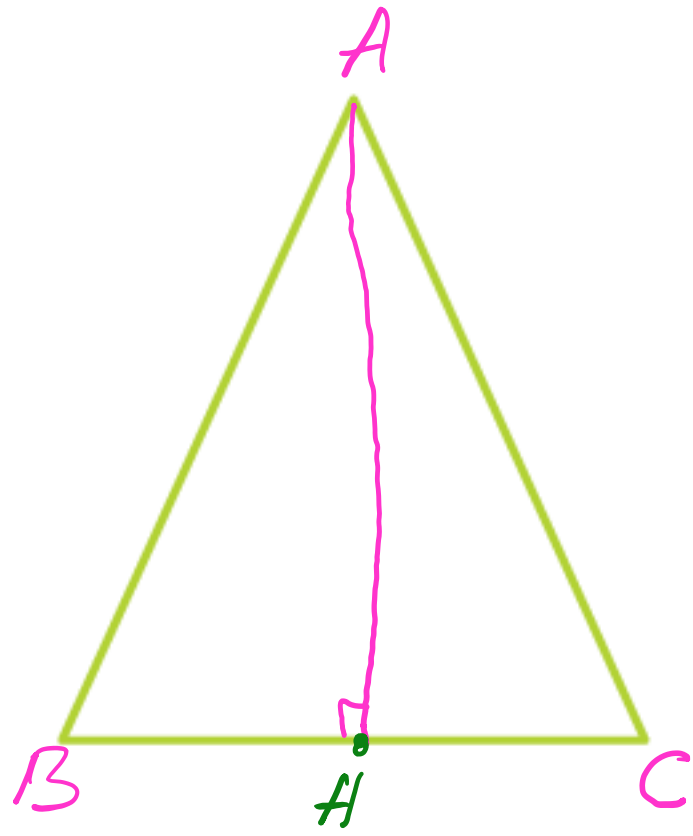
$$AM = BM$$



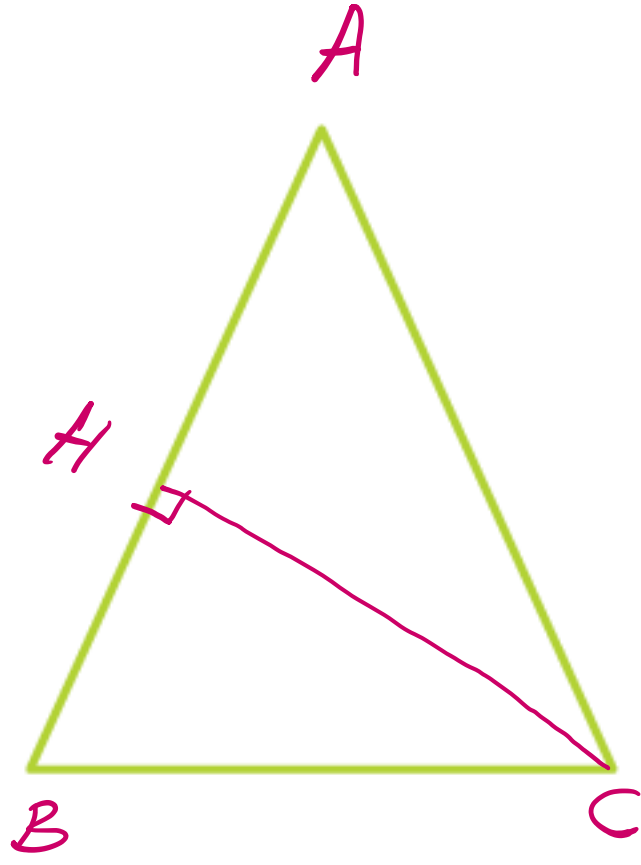
ارتفاع



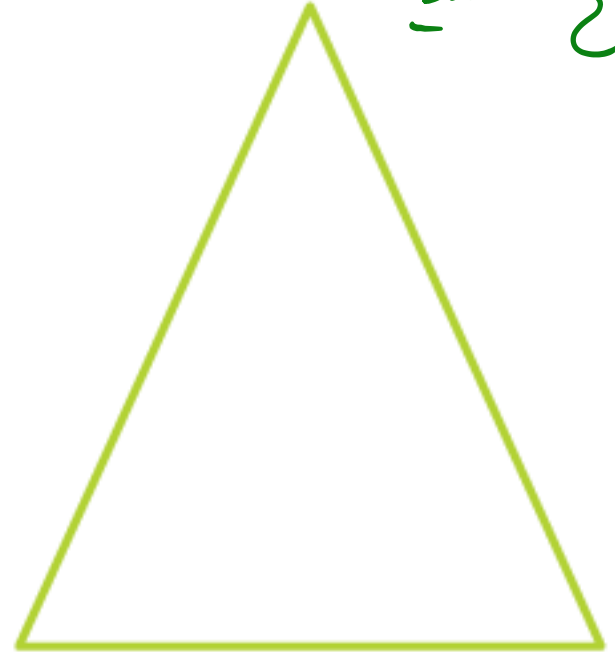
عمود منصف
ارتفاع
میانک



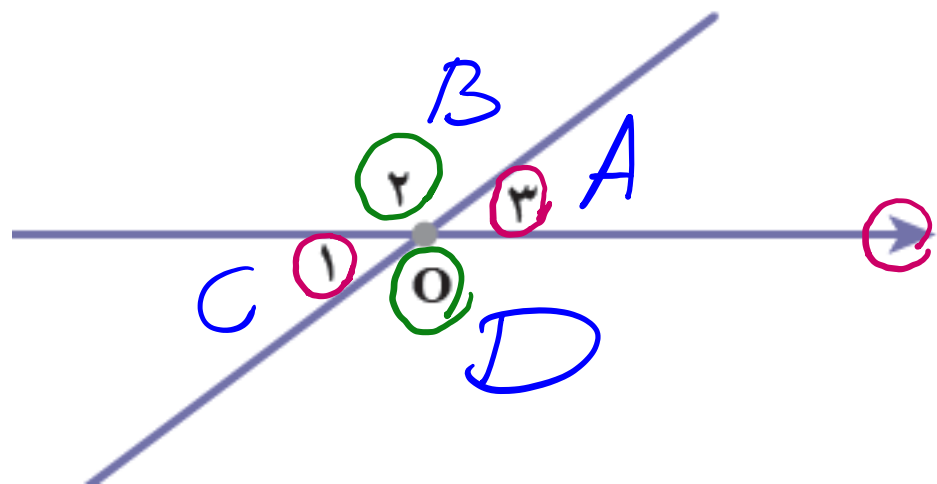
$$BH = CH$$



$$AH = BH$$



قضیه زاویه های متقابل به راس

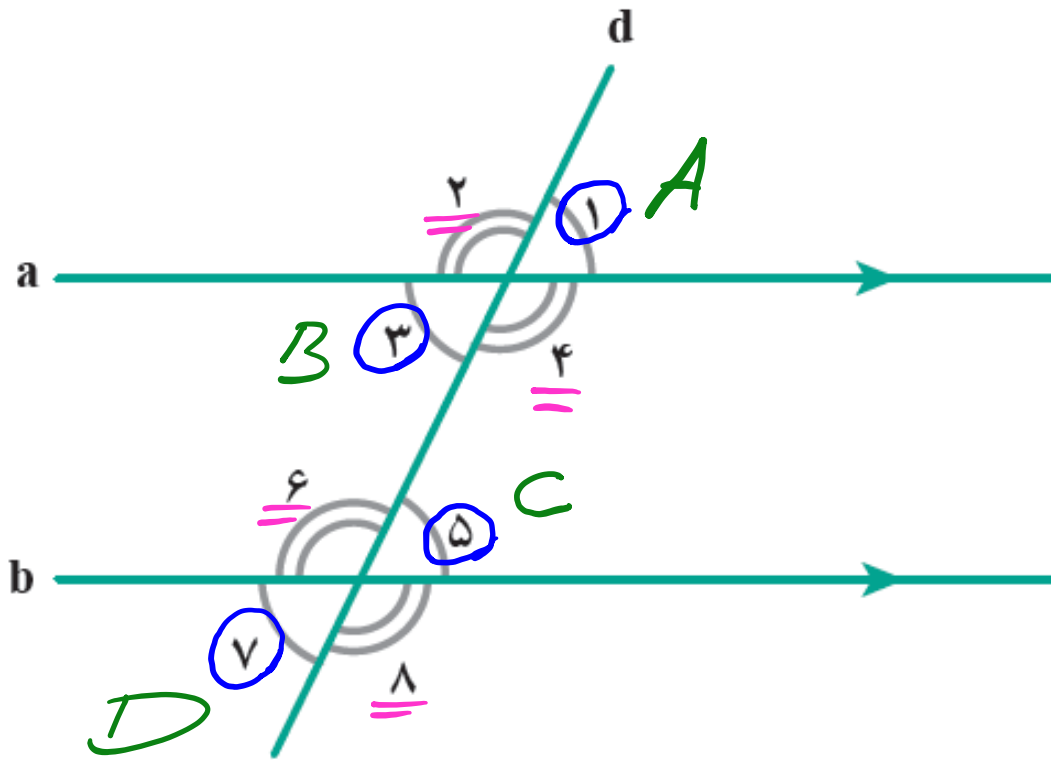


$$\hat{\mu} = \hat{1}$$

$$\hat{\nu} = \hat{0}$$

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} = 180 \\ \hat{C} + \hat{B} = 180 \end{cases} \rightarrow \underline{\underline{\hat{A} = \hat{C}}}$$

قضیه دو خط موازی و خط مورب



$$\rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$$

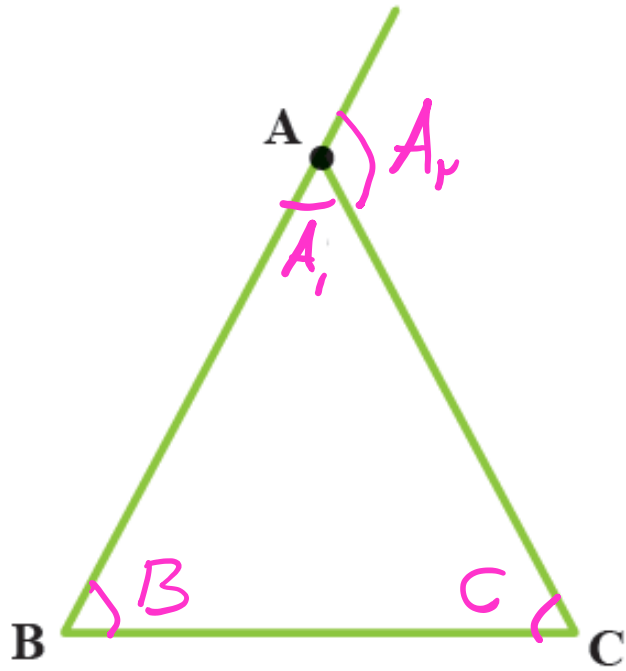
سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

قضیه زاویه های داخلی و خارجی مثلث

$$\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$
$$\hat{A}_1 + \hat{A}_r = 180^\circ$$

$$\rightarrow \hat{A}_r = \hat{B} + \hat{C}$$



قضیه مثلث های هم نهشت

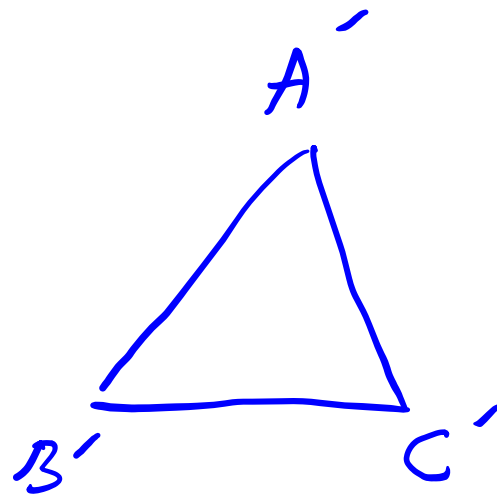
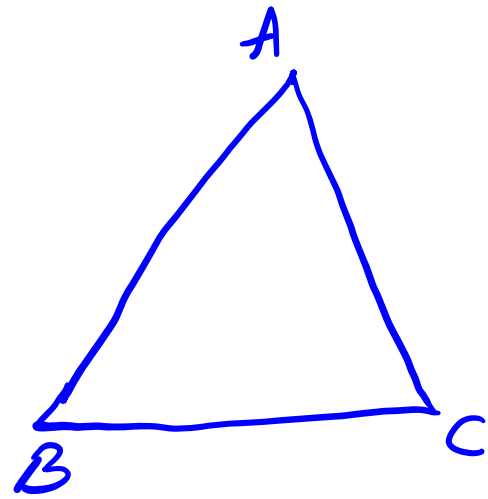
- (۱) ✓ z_1, z_2, z_3
- (۲) ✓ z_1, z_2, z_3
- (۳) ✓ z_1, z_2, z_3

۴ $z_1 + z_2 + z_3$

۵ $z_1 + z_2 + z_3$

قضیه مثلث های متشابه

دو زاویه برابرند.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$$

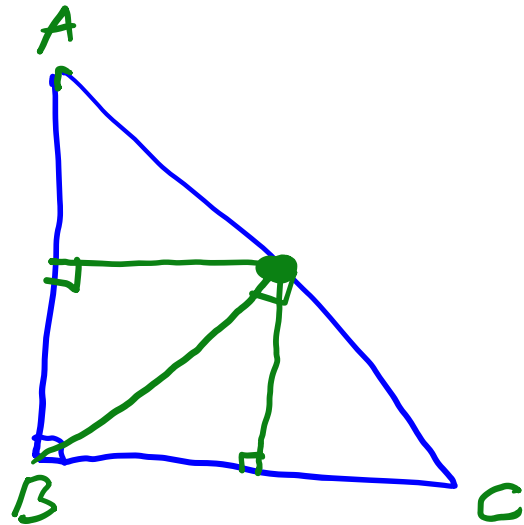
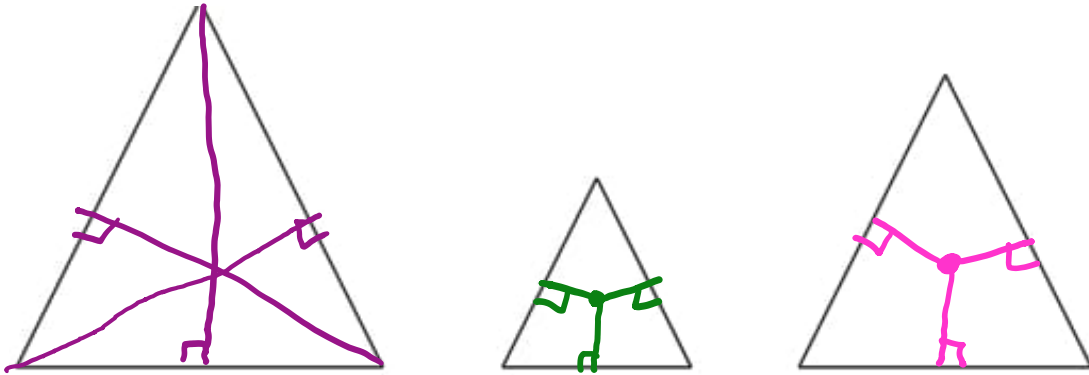
سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۳۸۹

۱- در شکل‌های زیر عمودمنصف‌های سه ضلع مثلث‌ها را رسم کنید:

آیا فقط با توجه به این شکل‌ها می‌توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمودمنصف‌های هر مثلث همیشه

درون مثلث قرار دارد؟

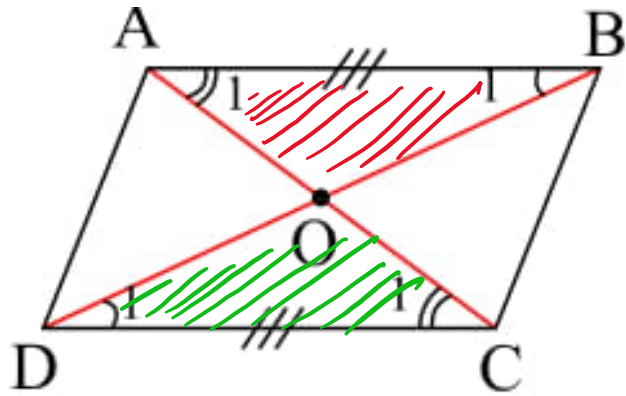


سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲- ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید:

$$OB = OD, OA = OC$$



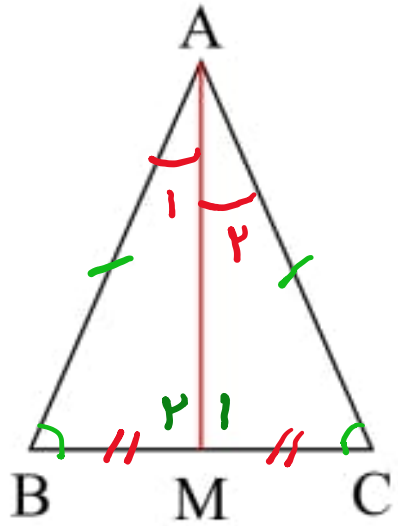
$$AB \parallel DC \rightarrow \begin{cases} \angle B_1 = \angle D_1 \\ \angle A_1 = \angle C_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} AB = DC \\ \angle B_1 = \angle D_1 \\ \angle A_1 = \angle C_1 \end{cases}$$

بنابراین $\triangle AOB \cong \triangle COD$

$$\underline{OB = OD}, \quad \underline{OA = OC}$$

۳- در مثلث متساوی الساقین ABC ، میانه AM را رسم کرده‌ایم. مثلث‌های AMB و AMC به چه حالتی هم نهشت‌اند؟ چرا AM ، نیمساز زاویه A است؟ چرا AM بر BC عمود است.



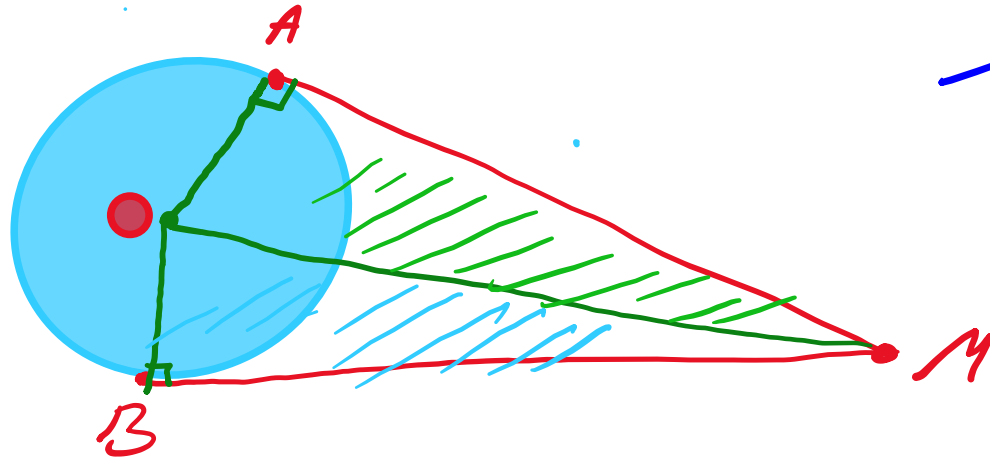
$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ \hat{B} = \hat{C} \\ BM = CM \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{قضیهٔ زین} \\ \Delta ABM \cong \Delta ACM \end{array}$$

$$\rightarrow A_1 = A_2 \rightarrow \text{نیمساز } A$$

$$M_1 = M_2 \rightarrow M_1 + M_2 = 180^\circ \rightarrow M_1 = M_2 = 90^\circ$$

$$AM \leftarrow \text{عمود منصف} / \text{ارتفاع}$$

۴- از نقطه‌ی M خارج از دایره، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم کنید. آیا اندازه این دو مماس با هم برابر



$$\overline{OM} = \overline{OM} \text{ وتر}$$

$$\overline{OA} = \overline{OB} \text{ شعاع}$$

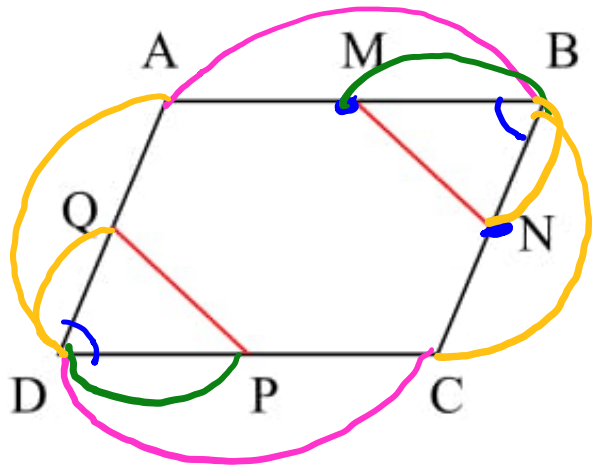
وتر یک مثلث

$$\triangle OAM \cong \triangle OBM$$

$$\rightarrow AM = BM$$

۵- در شکل مقابل $ABCD$ متوازی الاضلاع است و M و N و P و Q وسط‌های اضلاع متوازی الاضلاع اند. ثابت کنید

$$MN = PQ$$



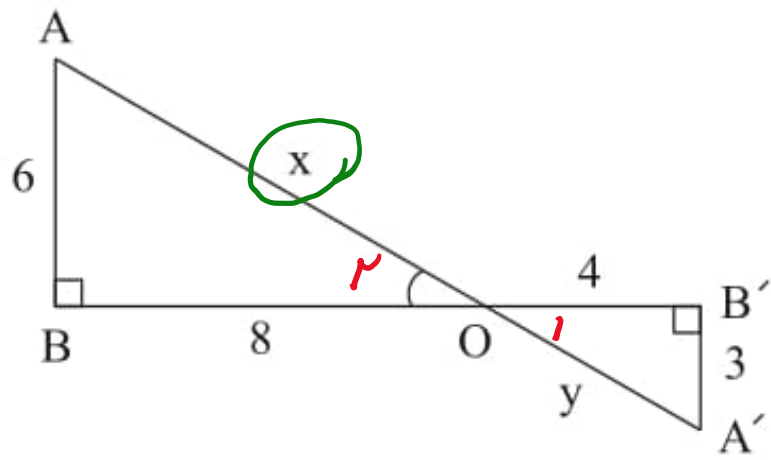
$$\begin{cases} AB = DC \rightarrow BM = DP \\ AD = BC \rightarrow BN = QD \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{D} \\ BM = DP \\ BN = QD \end{cases}$$

پس $\Delta MBN \cong \Delta QDP$

$$\rightarrow MN = PQ$$

۶- در شکل زیر:



الف) مقادیر x و y را بیابید. (به کمک قضیه فیثاغورس)

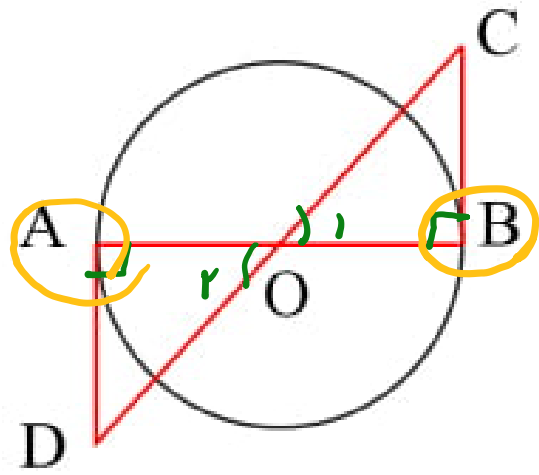
ب) آیا دو مثلث $A'B'O$ و ABO متشابه‌اند؟ چرا؟

$$1) x^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \rightarrow x = \sqrt{100} = 10$$

$$2) y^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \rightarrow y = \sqrt{25} = 5$$

ب) $\hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ$
 $\hat{\phi}_1 = \hat{\phi}_2$ \rightarrow متساویه

۷- در شکل مقابل O مرکز دایره است و AD و BC بر دایره مماس اند. نشان دهید که AD و BC برابرند.

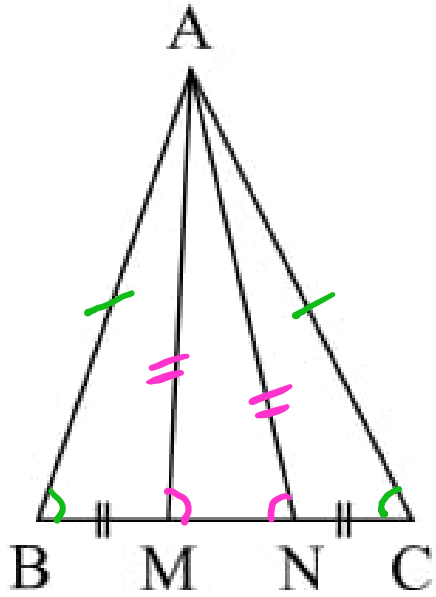


$$\left\{ \begin{array}{l} OB = OA = R \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{قضیه} \\ \rightarrow \triangle OBC \cong \triangle OAD \end{array}$$

$$\rightarrow AD = BC$$

$$\rightarrow OC = OD$$

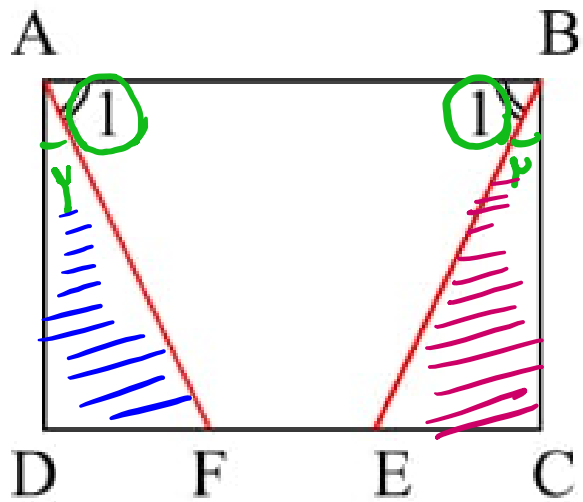
۸- در شکل مقابل مثلث ABC متساوی الساقین است و M و N روی قاعده‌ی BC طوری قرار دارند که $BM = NC$. نشان دهید مثلث AMN هم متساوی الساقین است.



$$\left\{ \begin{array}{l} AB = AC \\ \hat{B} = \hat{C} \\ BM = CN \end{array} \right. \xrightarrow{\text{قضیه}} \triangle ABM \cong \triangle ACN$$

$\rightarrow AM = AN \rightarrow AMN$ متساوی الساقین

۹- در مستطیل $ABCD$ پاره‌های AF و BE طوری رسم شده که دو زاویه‌ی A_1 و B_1 برابرند. ثابت کنید $BE = AF$ و AF مساوی‌اند.



$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 90^\circ$$

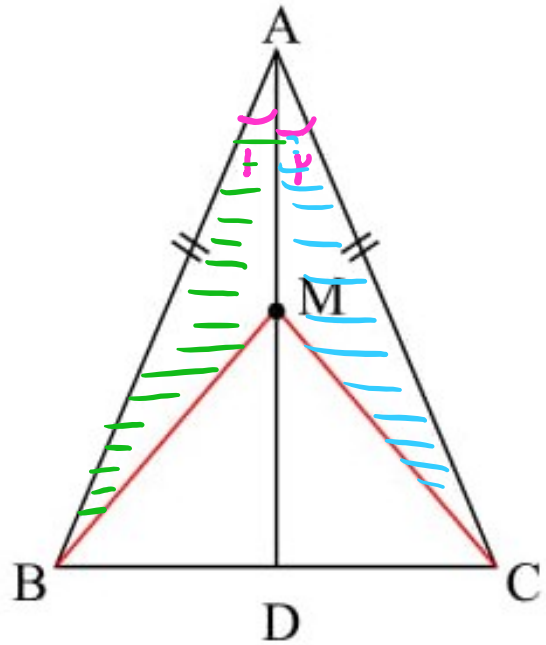
$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \quad \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \quad \rightarrow \quad \hat{A}_2 = \hat{B}_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_2 = \hat{B}_2 \\ AD = BC \\ \hat{D} = \hat{C} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \triangle ADF \cong \triangle BEC \rightarrow AF = BE$$

۱۰- نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، فاصله‌ی هر نقطه‌ی دلخواه روی نیمساز زاویه‌ی رأس از دو سر قاعده،

برابر است: $MB = MC$



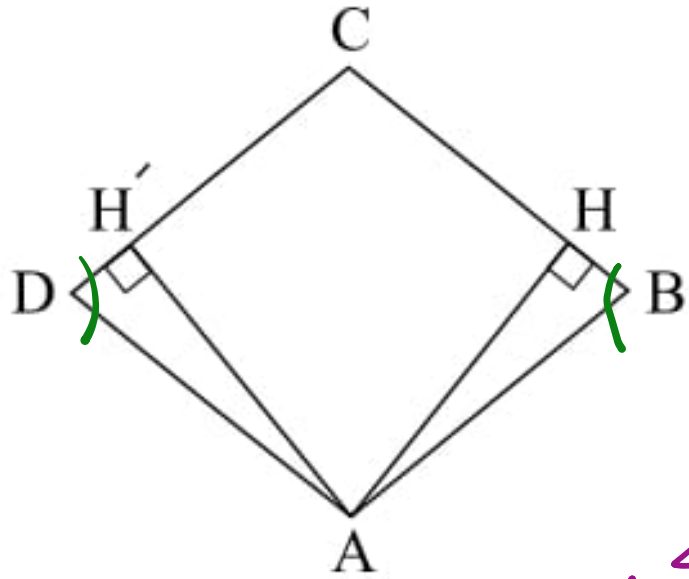
$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$$
$$AB = AC \xrightarrow{\text{Principle}} \triangle ABM \cong \triangle ACM$$
$$AM = AM$$

$$\rightarrow BM = CM$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۱- چهار ضلعی $ABCD$ لوزی است. ثابت کنید دو مثلث AHB و $AH'D$ هم نهشت اند.



$$\begin{cases} AB = AD \\ \hat{B} = \hat{D} \end{cases} \rightarrow$$

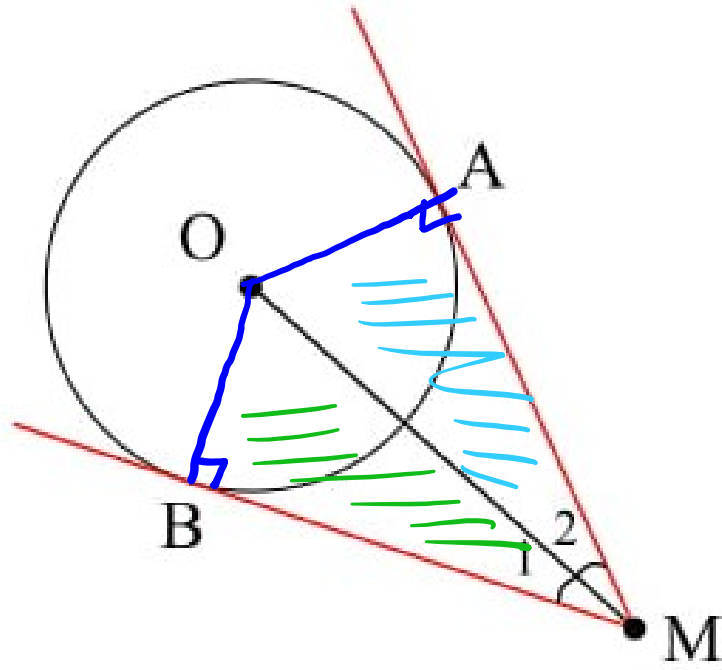
وتر + زاویه

$$\triangle AHB \cong \triangle AH'D$$

$$\underline{DH' = BH'}$$

$$AH = AH'$$

۱۲- ثابت کنید $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ (بر دایره مماس MA و MB هستند)



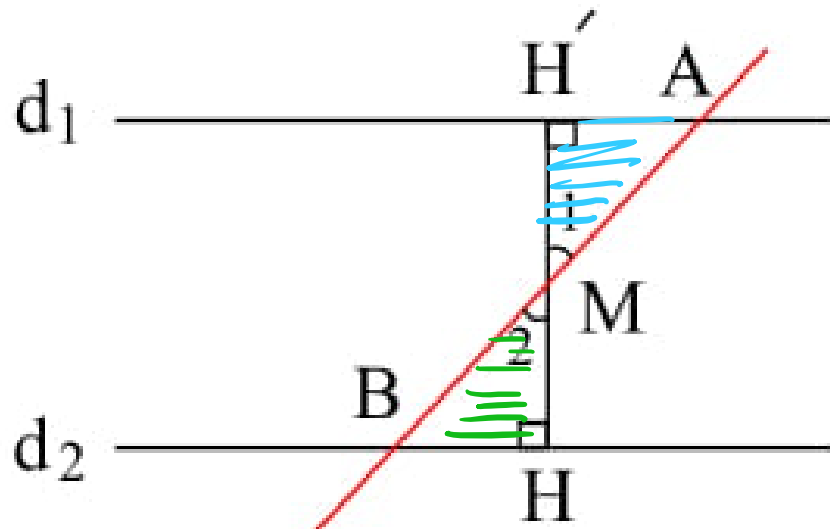
$\begin{cases} OM = OM \\ OA = OB \end{cases} \rightarrow$ وتر + مماس

$$\triangle OAM \cong \triangle OBM$$

$\rightarrow M_1 = M_2$

نیماز

۱۳- M وسط AB است. ثابت کنید دو مثلث ایجاد شده هم‌نهشت هستند.

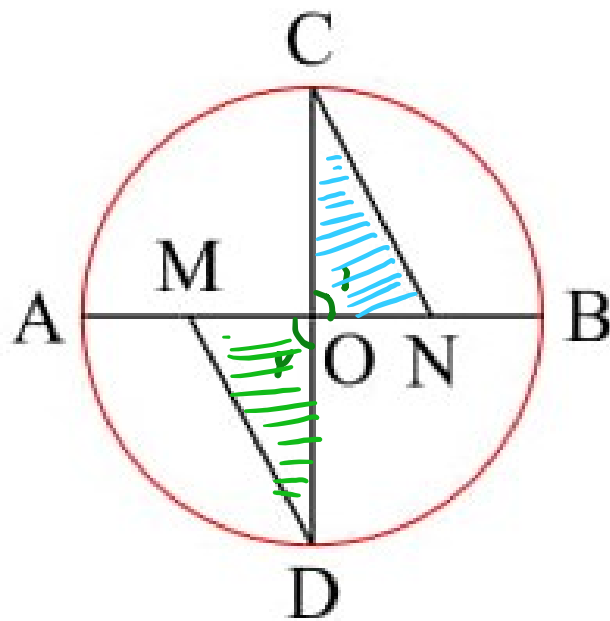


$$AM = BM$$

$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 \rightarrow \text{وتر} + \text{زاویه}$$

$$\rightarrow \triangle AH'M \cong \triangle BHM$$

۱۴- O مرکز دایره، M وسط OA و N وسط OB و CD عمود بر AB است. دلیل هم نهشتی $\triangle NOC$ و $\triangle MOD$



$$OA = OB \rightarrow ON = OM$$

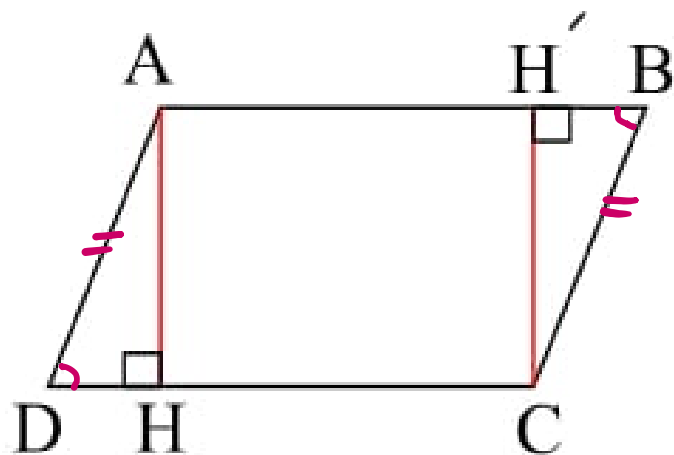
$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

$$OC = OD = R$$

$$\text{O.P.P.} \rightarrow \underline{\underline{\triangle NOC \cong \triangle MOD}}$$

$$\rightarrow MD = NC$$

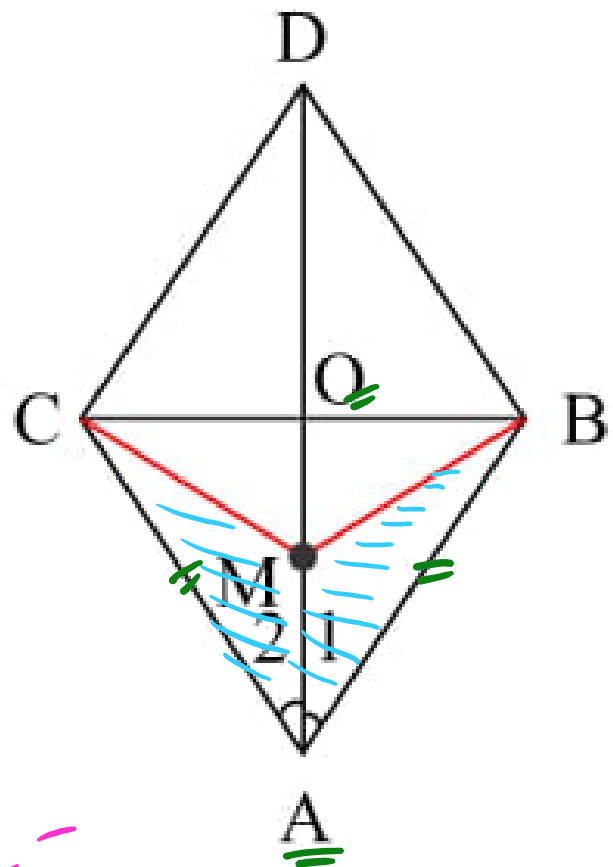
۱۵- چهارضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است. چرا دو مثلث ADH و BCH' هم نهشت اند؟



$$\left. \begin{array}{l} BC = AD \\ \hat{B} = \hat{D} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle BCH' \cong \triangle ADH$$

۱۶- چهارضلعی $ABCD$ لوزی و M نقطه‌ای دلخواه روی قطر لوزی است. نشان دهید

$$MB = MC$$



$$\begin{cases} AB = AC \\ MA = MH \\ A_1 = A_2 \end{cases}$$

فرض $\rightarrow \triangle MBA \cong \triangle MCA$

$\rightarrow MB = MC$

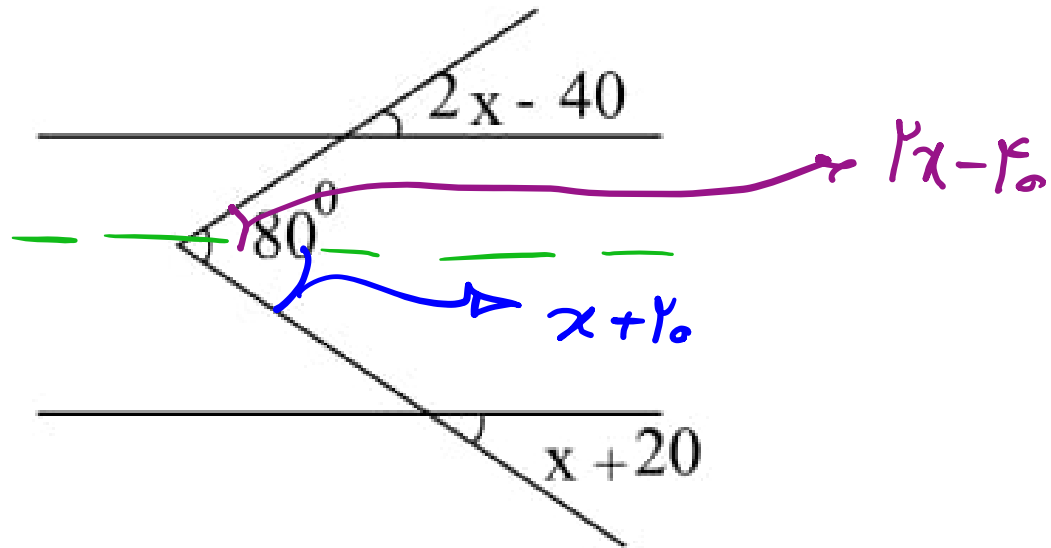
نمای $\triangle ABC$
 OA میانگ

\underline{OA} نمای

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۴۳۸۹

۱۷- x چند درجه است؟



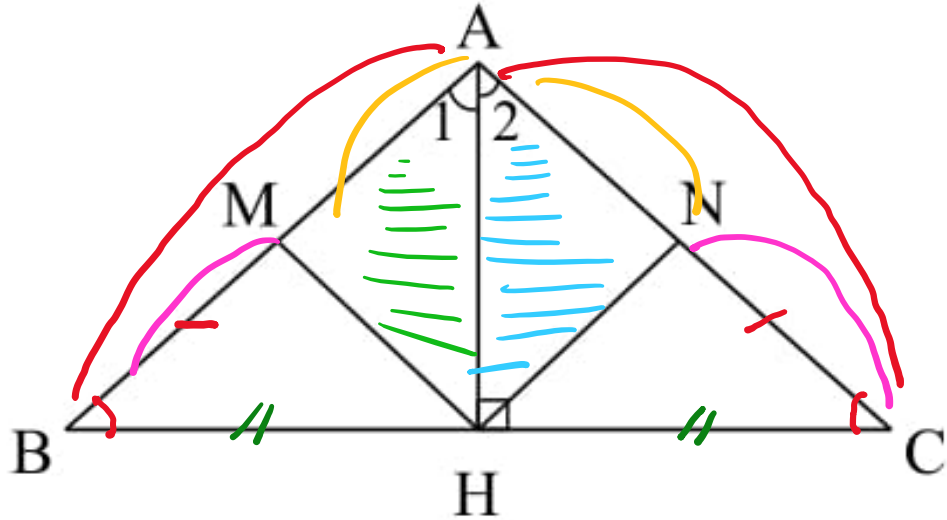
$$2x - 40 + x + 20 = 180$$

$$3x = 140 \rightarrow x = \frac{140}{3}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۸- ثابت کنید اگر $MB = NC$ و H وسط BC باشد، آنگاه $\triangle AMH$ و $\triangle ANH$ با هم برابرند.

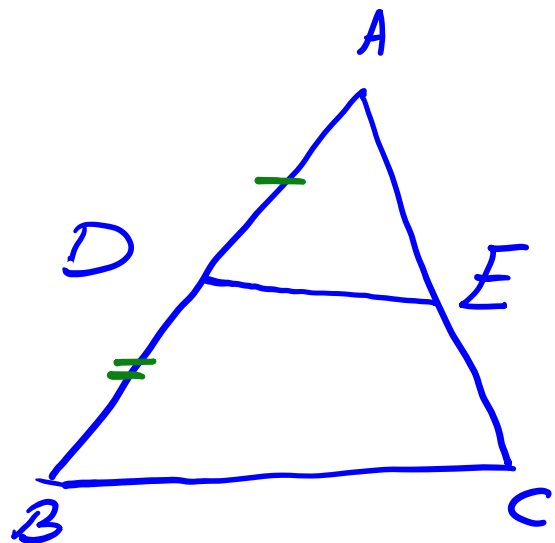


$$AB^r = \underline{AH^r} + \underline{BH^r}$$

$$AC^r = \underline{AH^r} + \underline{CH^r} \rightarrow AB = AC$$

ABC متساوی الساقین است
 AH میانه است $\rightarrow AH$ میانه است $\rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$

$$\begin{cases} \int AH = AH \\ A_1 = A_2 \\ AM = AN \end{cases} \xrightarrow{\text{مساوی}} \triangle ANH \cong \triangle AMH$$



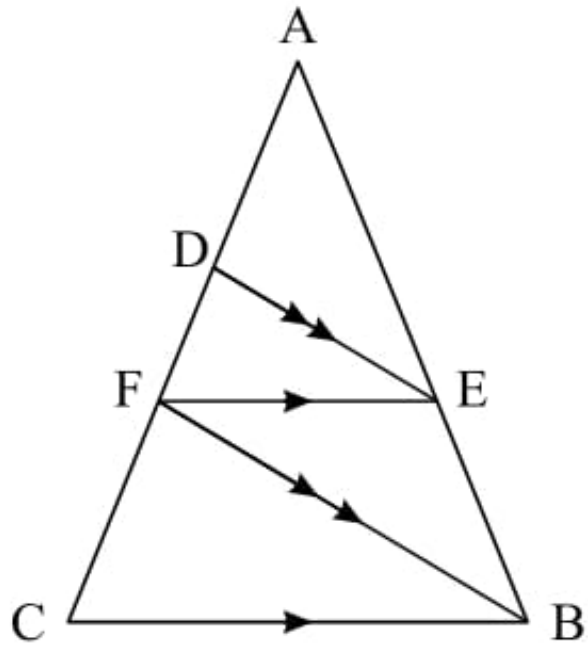
تساوی

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

نسبت

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

۱۹- در مثل روبه رو اثبات کنید. $AF^2 = AD \times AC$



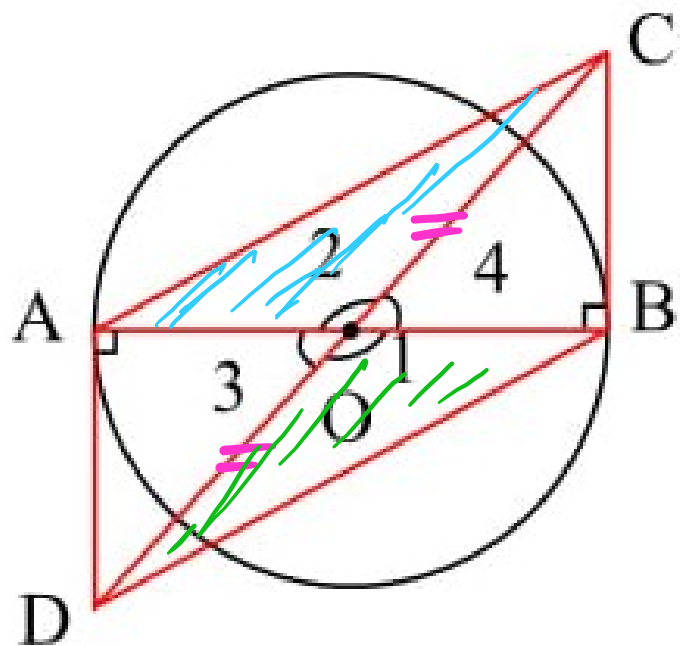
$$\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB} \rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

$$\frac{AD}{DF} = \frac{AE}{EB} \rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{AE}{AB}$$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DF} \rightarrow AF \cdot DF = \underline{AD \cdot FC}$$

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AD}{AF} \rightarrow AF^2 = AD \cdot AC$$

۲۰- در شکل مقابل O مرکز دایره و AD و BC بر دایره مماس‌اند. نشان دهید AC و BD برابرند.



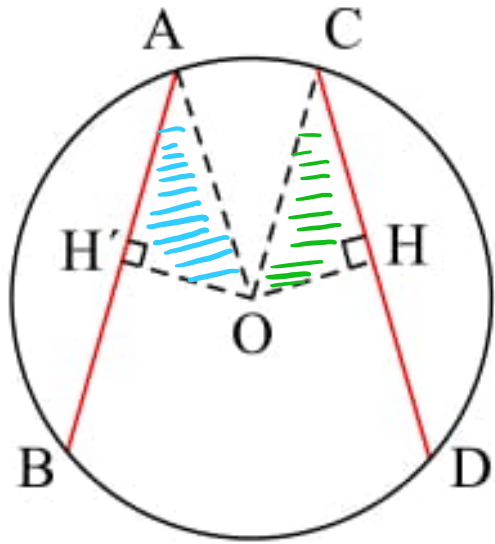
$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{A} = 90^\circ \\ \hat{O}_r = \hat{O}_r \\ AO = BO \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{زین} \\ \Delta OCB \cong \Delta OAD \end{array}$$

$$\rightarrow OC = OD$$

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ OC = OD \\ \hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{زین} \\ \Delta OAC \cong \Delta ODB \\ \rightarrow AC = BD \end{array}$$

۲۱- ثابت کنید فاصله دو وتر مساوی در یک دایره، از مرکز دایره برابر است.



$$OH = OH' \quad ?$$

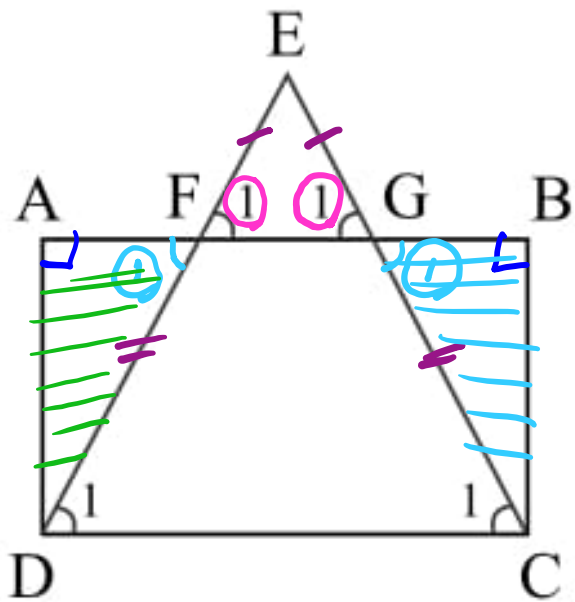
$$\left\{ \begin{array}{l} OA = OC \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} AH' = CH \end{array} \right.$$

وتر + ملع \rightarrow

$$\rightarrow \triangle OHC \cong \triangle OHA \rightarrow OH = OH' \quad \checkmark$$

۲۲- ABCD مستطیل است و $DE = CE$ ثابت کنید $AF = BG$



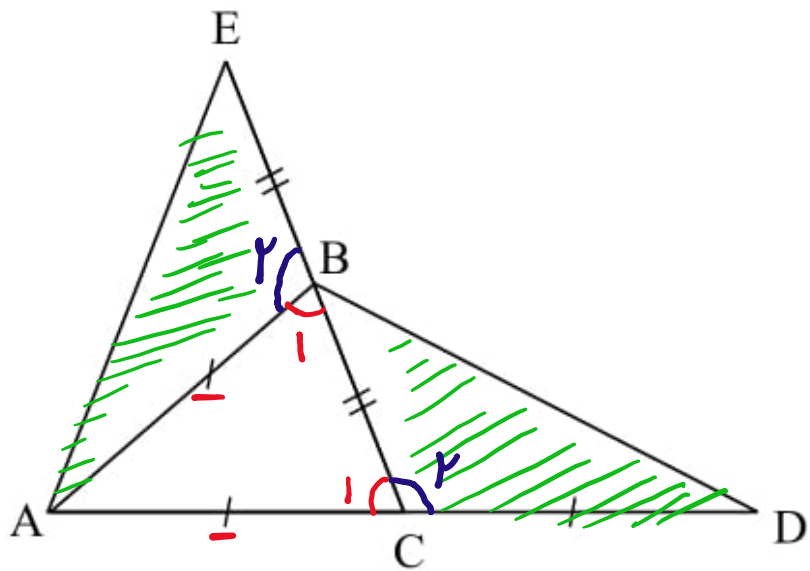
$$\left. \begin{array}{l} DE = CE \\ EF = EG \end{array} \right\} \rightarrow FD = GC$$

$$\left. \begin{array}{l} FD = GC \\ \angle F_1 = \angle G_1 \end{array} \right\}$$

وتر + زاویه $\rightarrow \triangle AFD \cong \triangle GBC$

$\rightarrow AF = BG$

۲۳- در شکل مقابل اثبات کنید دو مثلث هم نهشت وجود دارد.



$$BC = BE$$

$$BA = CD$$

$$B_1 = C_1$$

دو مثلث

$$\triangle BEA \cong \triangle CBD$$

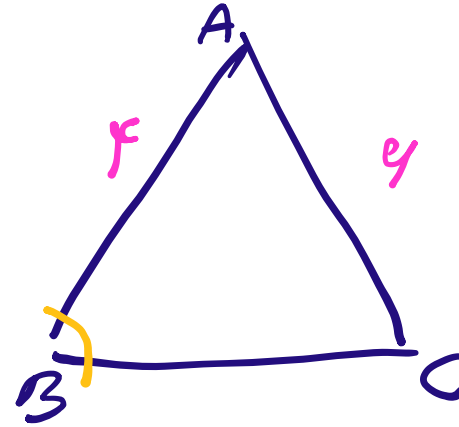
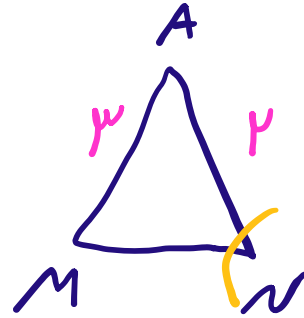
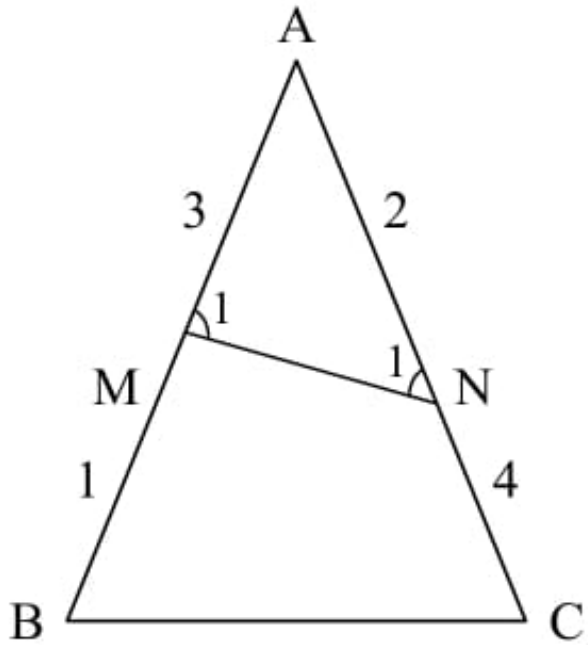
$$B_1 + B_2 = 180$$

$$C_1 + C_2 = 180$$



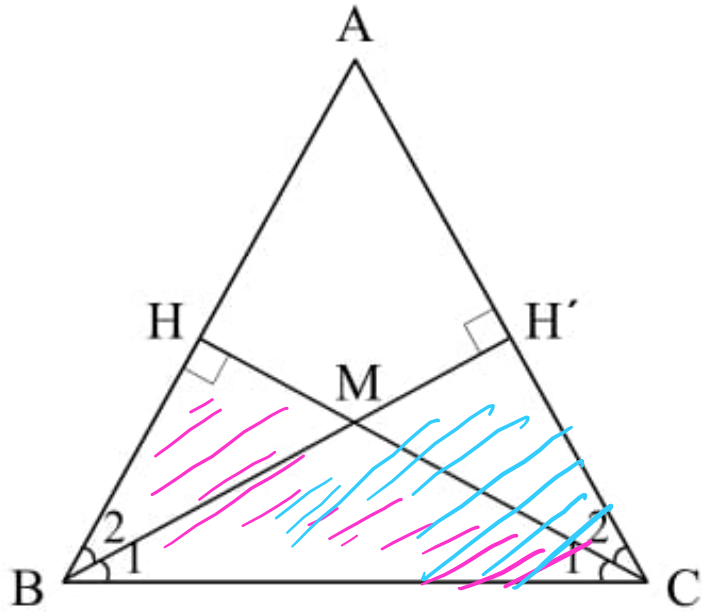
$$B_2 = C_2$$

۲۴- اثبات کنید دو مثلث $\triangle AMN$ و $\triangle ABC$ متشابه‌اند و بگویید زاویه B با کدام زاویه برابر است.



$$\rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM} = \frac{BC}{MN} = \frac{1}{2}$$

۲۵- ثابت کنید اگر $\triangle ABC$ متساوی الساقین باشد، آنگاه $\triangle BMC$ متساوی الساقین است.



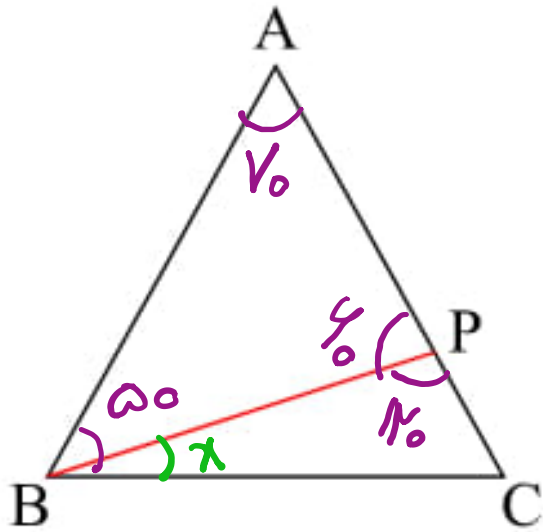
$$\begin{cases} BC = BC \\ \hat{H} = \hat{H}' \\ \hat{B} = \hat{C} \end{cases}$$

وتفاوت $\rightarrow CHB \cong CBH'$

$\rightarrow BM = CM \rightarrow BMC$ متساوی الساقین

۲۶- مثلث ABC متساوی الساقین است، $AB = AC$ ، $\angle BPC = 120^\circ$ و $\angle ABP = 50^\circ$ اندازه‌ی زاویه‌ی

PBC چه قدر است؟

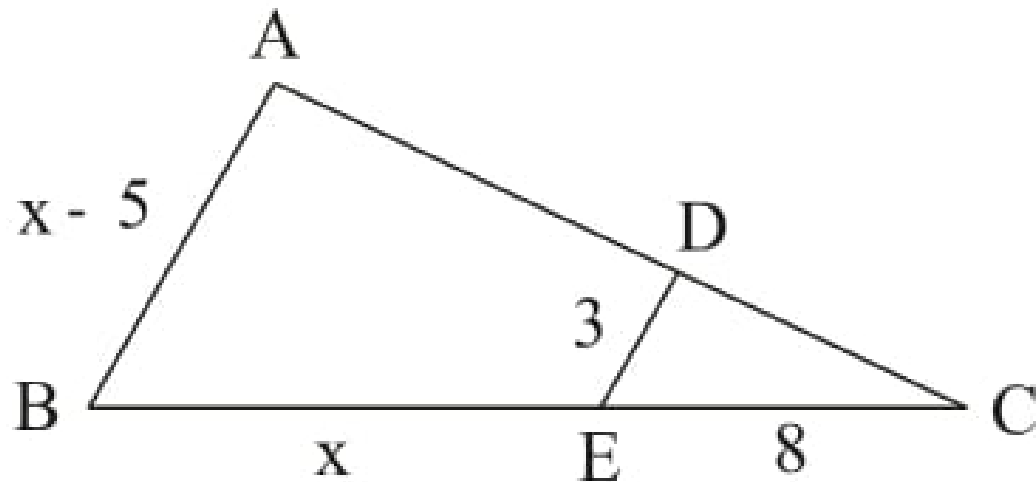


$$\hat{B} + \hat{C} + \hat{A} = 180 \rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 110$$

$$\hat{B} = \hat{C} \rightarrow 2\hat{B} = 110 \rightarrow \hat{B} = 55$$

$$\rightarrow x + 50 = 55 \rightarrow x = 5$$

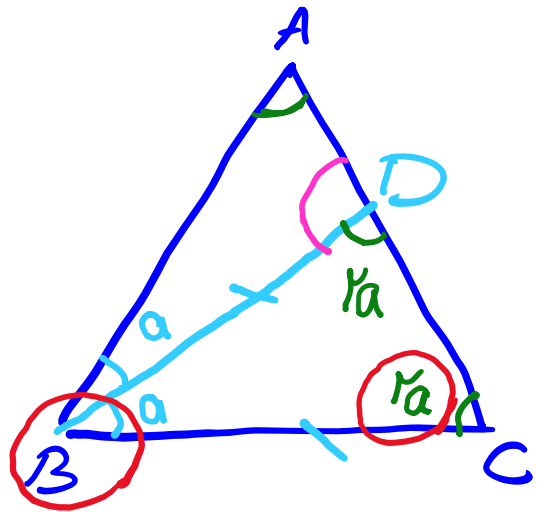
۲۷- در شکل مقابل AB موازی DE می باشد، مقدار x کدام است؟



$$\frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} \rightarrow \frac{8}{x+8} = \frac{3}{x-5}$$

$$\rightarrow 8x - 40 = 3x + 24 \rightarrow 5x = 64 \rightarrow x = 12.8$$

۲۸- در مثلث متساوی الساقین ABC نیمساز CD از زاویه C برابر با قاعده BC است. اندازه زاویه CDA چه قدر است؟



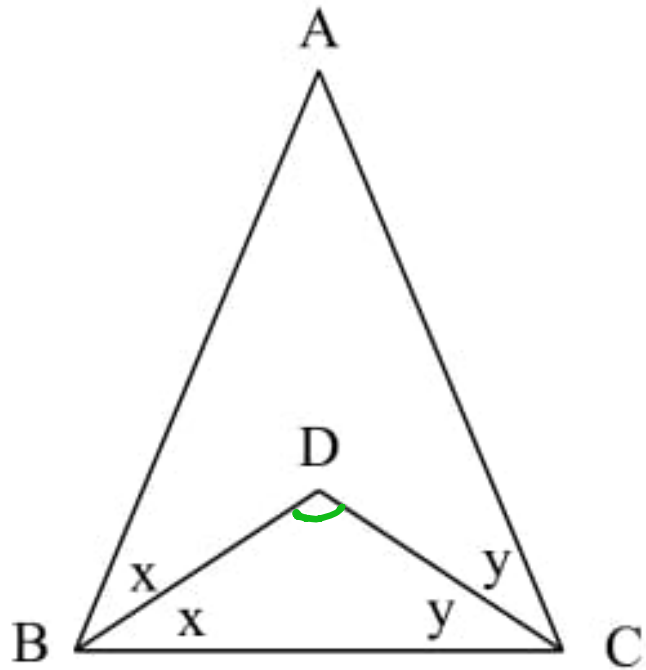
$$a + 2a + 2a = 180^\circ \rightarrow a = 36^\circ$$

$$\rightarrow 2a = 2 \times 36 = 72^\circ$$

$$\rightarrow A + 72 + 72 = 180 \rightarrow A = 180 - 144 = 36$$

$$D = 180 - 2a = 180 - 72 = 108$$

۲۹- باتوجه به شکل زیر اندازه زاویه BDC چند درجه است؟ ($\hat{A} = 42^\circ$)



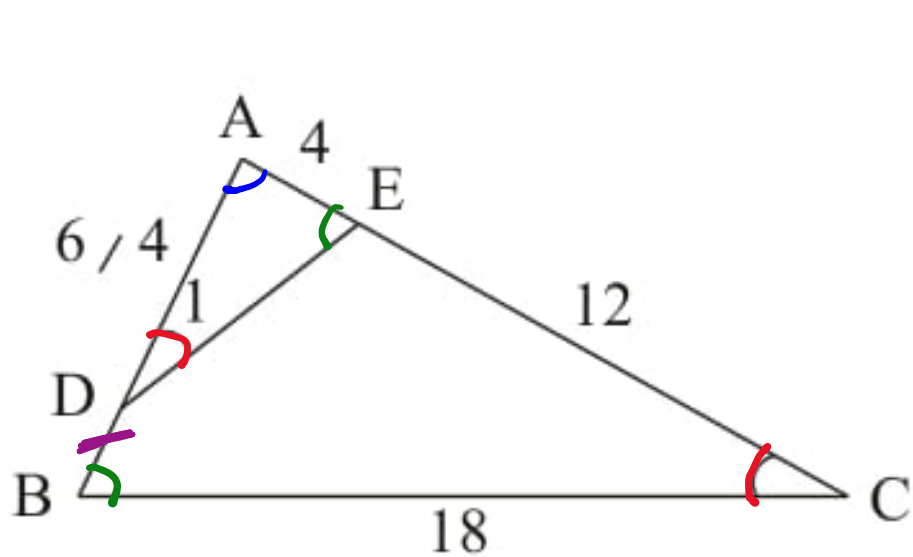
$$\hat{x} + \hat{y} + \hat{D} = 180$$

$$2x + 2y + A = 180 \rightarrow 2x + 2y = 180 - 42$$

$$\rightarrow 2\hat{x} + 2\hat{y} = 138^\circ \rightarrow \hat{x} + \hat{y} = 69^\circ$$

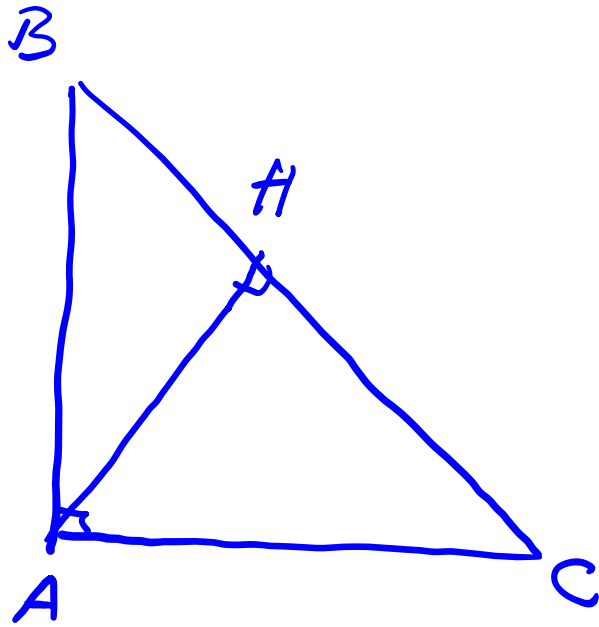
$$\rightarrow 69 + \hat{D} = 180 \rightarrow \hat{D} = 111^\circ \quad \checkmark$$

۳- دو مثلث ABC و ADE متشابه‌اند. نسبت تشابه آنها چقدر است؟ ($\hat{C} = \hat{D}_1$)



$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

$$\rightarrow K = \frac{19}{4,5} = \frac{19}{9}$$



$$1) AB^2 + AC^2 = BC^2$$

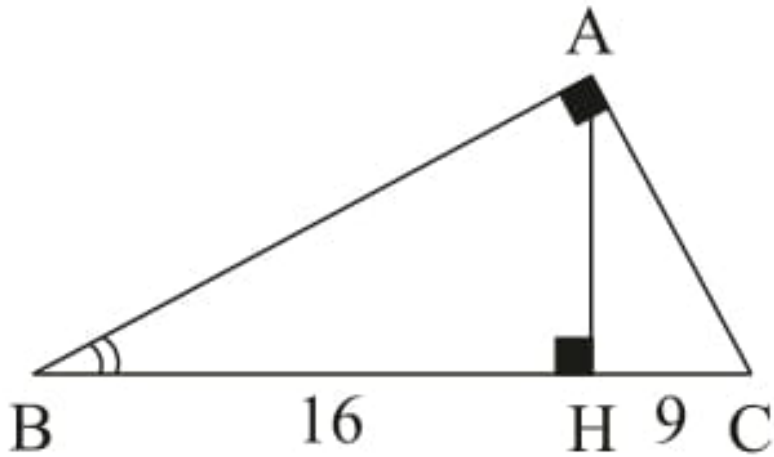
$$2) AH \cdot BC = AB \cdot AC$$

$$3) AB^2 = BH \cdot BC$$

$$4) AC^2 = CH \cdot BC$$

$$5) AH^2 = BH \cdot CH$$

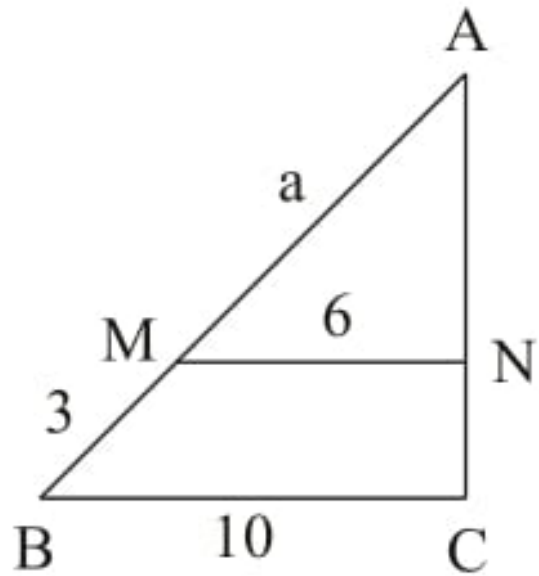
۳۱- ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم الزاویه ABC است. محیط مثلث ABC است؟



$$AC^2 = 9 \times 25 \rightarrow AC = 3 \times 5 = 15$$
$$AB^2 = 16 \times 25 \rightarrow AB = 4 \times 5 = 20$$

$$P = 20 + 15 + 25 = 60$$

۳۲- باتوجه به شکل مقدار a را به دست آورید. ($MN \parallel BC$)

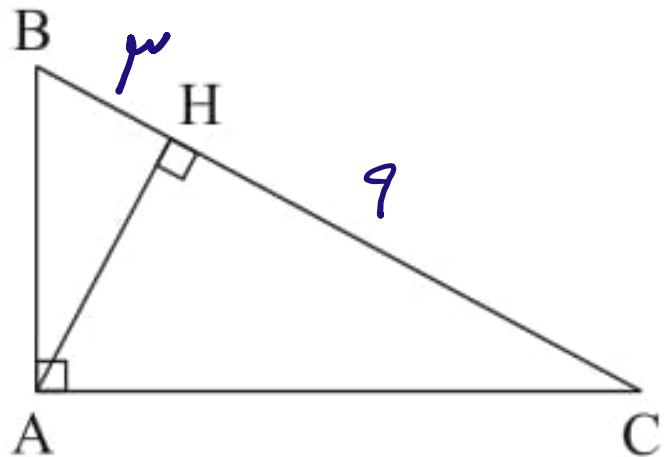


$$\frac{a}{a+3} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\rightarrow 5a = 2a + 6$$

$$\rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2$$

۳۳- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، ارتفاع وارد بر وتر است. با توجه به اندازه‌های $BH = 3$ و $CH = 9$ طول AB کدام است؟

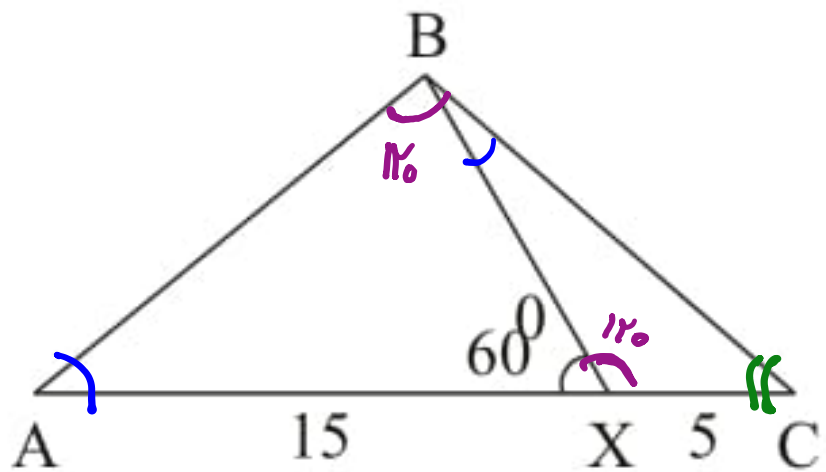


$$AB^2 = 3 \times 12 \rightarrow AB = \sqrt{36} = 6$$

$$AC^2 = 9 \times 12 \rightarrow AC = \sqrt{9 \times 16} = 6\sqrt{3}$$

$$AH^2 = 3 \times 9 \rightarrow AH = \frac{3\sqrt{3}}{3}$$

۳۴- در مثلث ABC نقطه‌ی x را روی ضلع AC طوری اختیار کرده‌ایم که $AX = 15$ و $CX = 5$ و $\hat{A}XB = 60^\circ$ باشد. چنانچه $\hat{A}BC = 2\hat{A}XB$ باشد. اندازه‌ی ضلع BC چقدر است؟



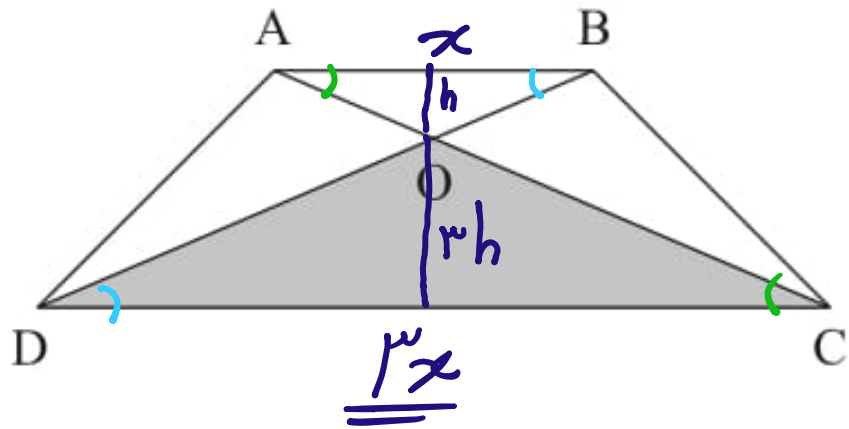
$$XCB \sim ABC \rightarrow \text{ثبات}$$

$$\rightarrow \frac{AB}{XB} = \frac{BC}{XC} = \frac{AC}{BC}$$

$$BC^2 = 120 \times 5 = 1000$$

$$\rightarrow BC = 10$$

۳۵- در ذوزنقه‌ای شکل مقابل، قاعده‌ی بزرگ سه برابر قاعده‌ی کوچک است. مساحت قسمت هاشورخورده چه کسری از مساحت ذوزنقه است؟



$$k = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} = \frac{h_1}{h_2}$$

$$\frac{S_{\Delta}}{S_{\square}} = \frac{\frac{1}{2} \times \underline{3h} \times \underline{3x}}{\frac{1}{2} (\underline{x+3x}) \times \underline{4h}} = \frac{9x}{19x} = \frac{9}{19}$$