

آموزش صفر تا صد آمار و احتمال

توزیع برنولی و دو جمله ای

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Algebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$f(x) = p^x \cdot (1-p)^{1-x} \quad x=0,1$$

$$E(x) = \bar{x} = p \quad \text{Var}(x) = p \cdot q = p \cdot (1-p)$$

$$M_x(t) = q + pe^t$$

در پرتاب سکه ای سالم اگر رو آمدن سکه پیروزی باشد. تابع احتمال، مولد گشتاور و واریانس را محاسبه کنید

$$P = \frac{1}{2} \quad q = 1 - P = \frac{1}{2}$$

$$P(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = \frac{1}{2}$$

$$M_x(t) = q + Pe^t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}(1 + e^t)$$

$$E(x) = P = \frac{1}{2} \quad \text{Var}(x) = P \cdot q = \frac{1}{4}$$

$$P(x) = \binom{n}{x} P^x \cdot q^{n-x} = \frac{n!}{x! (n-x)!} P^x \cdot q^{n-x}$$

$$E(x) = n \cdot P$$

$$\text{Var}(x) = n \cdot P \cdot q$$

$$M_x(t) = (q + Pe^t)^n$$

در یک آزمایش برنولی احتمال موفقیت ۹۸ درصد است، اگر X تعداد موفقیت‌ها در ۲۵ بار تکرار این آزمایش باشد، انحراف معیار آن کدام است؟

$$P = 0.98 \quad q = 0.02 \quad n = 25$$

$$\text{Var}(X) = npq = 25 \times \frac{98}{100} \times \frac{2}{100} = \frac{98}{100}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{98}{100}} = 0.17$$

احتمال موفقیت در یک آزمایش برنولی ۰.۶ درصد است، اگر ۹۶ بار این آزمایش تکرار شود انحراف معیار تعداد موفقیت‌ها در این توزیع کدام است؟

$$p = 0.6$$

$$q = 0.4$$

$$n = 96$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x)} = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{96 \times \frac{6}{10} \times \frac{4}{10}}$$

جواب

$$= \sqrt{23.04}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

متغیر تصادفی X با تابع توزیع احتمال $F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ x^2 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & ; x > 1 \end{cases}$ بیان شده است. احتمال اینکه در ۴ آزمایش مستقل، X درست ۳ بار

مقادیر خود را بین $(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ اختیار کند، کدام است؟

$$P\left(\frac{3}{8} < x < \frac{5}{8}\right) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{25}{64} - \frac{9}{64} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

$$P = \frac{1}{4}$$

$$q = \frac{3}{8}$$

$$n = 4$$

$$x = 3$$

$$P(x=3) = \binom{4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱) احتمال انتقال ویروس، از فرد بیمار به افراد مستعد ۱/۰ است. اگر این بیمار با ۴ فرد مستعد، ملاقات کند، با کدام احتمال ۲ یا ۳ نفر آنان مبتلا می شوند؟

$$P = 0,1 \quad q = 0,9 \quad n = 4 \quad X = 2, 3$$

$$P(X=2) + P(X=3) = \binom{4}{2} (0,1)^2 (0,9)^2 + \binom{4}{3} (0,1)^3 (0,9)^1$$

جواب = ۰,۵۲۲

۲ در پرتاب یک تاس، اگر عدد زوج ظاهر شود، یک تیرانداز مجاز است ۴ تیر رها کند. در غیر این صورت ۳ تیر رها می

کند، می‌دانیم احتمال موفقیت در هر تیر رها شده $\frac{2}{3}$ است. با کدام احتمال، فقط ۲ بار موفقیت حاصل می‌شود؟

زوج : $n=4, x=2, P=\frac{2}{3}, q=\frac{1}{3}$

$$P(x=2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

فرد : $n=3, x=2, P=\frac{2}{3}, q=\frac{1}{3}$

$$P(x=2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{12}{27}$$

$$\overline{\text{جواب}} = \frac{1}{3} \times \frac{8}{27} + \frac{1}{3} \times \frac{12}{27} = \frac{10}{27}$$

۳ می‌دانیم احتمال مغلوب بودن رنگ چشم $\frac{1}{4}$ برای هر فرزند، ثابت است. در خانواده‌ی ۴ فرزندی، با کدام احتمال رنگ

چشم ۳ فرزند آن‌ها مغلوب است؟

$$P = \frac{1}{4}, \quad q = \frac{3}{4}, \quad n = 4, \quad x = 3$$

$$P(x=3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۴ آزمایشی فقط دو نتیجه دارد. احتمال پیروزی در هر بار $\frac{3}{4}$ است. در تکرار ۶ بار این آزمایش مستقل، احتمال ۴

$$P = \frac{3}{4}, q = \frac{1}{4}, n = 6$$

پیروزی چند برابر احتمال ۳ پیروزی است؟

$$\frac{P(x=4)}{P(x=3)} = \frac{\binom{6}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\binom{6}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{9}{3}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۵ در پرتاب یک سکه، اگر «رو» بیاید یک تیرانداز مجاز است ۵ تیر رها کند. اگر «پشت» بیاید، ۳ تیر رها می کند. می

دانیم احتمال اصابت هر تیر رها شده $\frac{3}{5}$ است. با کدام احتمال فقط یک تیر اصابت می کند؟

$$\text{رو: } \binom{5}{1} + \binom{3}{5} + \binom{2}{5} = \frac{41}{125}$$

$$\text{پشت: } \binom{3}{1} + \binom{3}{5} + \binom{2}{5} = \frac{34}{125}$$

$$\text{جواب: } \frac{1}{2} \times \frac{41}{125} + \frac{1}{2} \times \frac{34}{125} = \frac{114}{1250}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۶ احتمال انتقال نوعی بیماری مسری به افراد مستعد برابر $0,2$ است. اگر 5 نفر مستعد، با فردی که حامل این بیماری است ملاقات کنند. با کدام احتمال 3 نفر آنان مبتلا می شوند؟

$$P = 0,2 \quad , \quad q = 0,8 \quad , \quad n = 5 \quad , \quad x = 3$$

$$P(x=3) = \binom{5}{3} \times (0,2)^3 \times (0,8)^2 = 0,512$$

۷ احتمال جوانه زدن هر دانه‌ی نوعی بذر $\frac{2}{3}$ است. اگر ۴ دانه از این بذر در شرایط یکسان کاشته شوند، با کدام احتمال حداقل سه دانه، جوانه می‌زنند؟

$$P(x \geq 3) = P(x=3) + P(x=4)$$

$$= \binom{4}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{4}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$P(x \geq 3) = \frac{32}{81} + \frac{16}{81} = \frac{48}{81} = \frac{16}{27}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۸ احتمال انتقال نوعی بیماری از فرد بیمار به افراد مستعد ۰٫۲ است. اگر ۶ نفر مستعد با این بیمار ملاقات کنند، با کدام

احتمال ۴ نفر آن ها به این بیماری مبتلا می شوند؟

$$P = 0.2, \quad q = 0.8, \quad n = 6, \quad x = 4$$

$$P(x=4) = \binom{6}{4} \cdot (0.2)^4 \cdot (0.8)^2 = 0.1536$$

۹ در یک روستا $\frac{4}{5}$ از سرپرست خانوارها باسواد هستند. اگر به تصادف ۴ نفر از بین آنان انتخاب شود، با کدام احتمال، تعداد باسوادها بیشتر از تعداد بی سوادها در این انتخاب، است؟

$$\begin{aligned} P(x \geq 3) &= P(x=3) + P(x=4) \\ &= \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{256}{625} + \frac{256}{625} = \frac{512}{625}$$

تیراندازی ۳ تیر پرتاب می‌کند. اگر یک تیر به هدف اصابت کند، دو تاس و اگر دو تیر به هدف اصابت کند، ۳ تاس

می‌اندازد. اگر احتمال برخورد تیر به هدف برابر $\frac{1}{4}$ باشد، با چه احتمالی عدد ظاهر شده‌ی فقط دو تاس مضرب ۳ است؟

$$n=3, k=1 \rightarrow \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$$

$$n=3, k=2 \rightarrow \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{9}{64}$$

$$n=3, k=2 \rightarrow \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{9}{64}$$

$$n=3, k=2 \rightarrow \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{9}{64}$$

$$\text{کواب.} = \frac{27}{64} \times \frac{1}{9} + \frac{9}{64} \times \frac{2}{9} = \frac{5}{64}$$

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت Algebra.com است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.