

# آموزش صفر تا صد آمار و احتمال

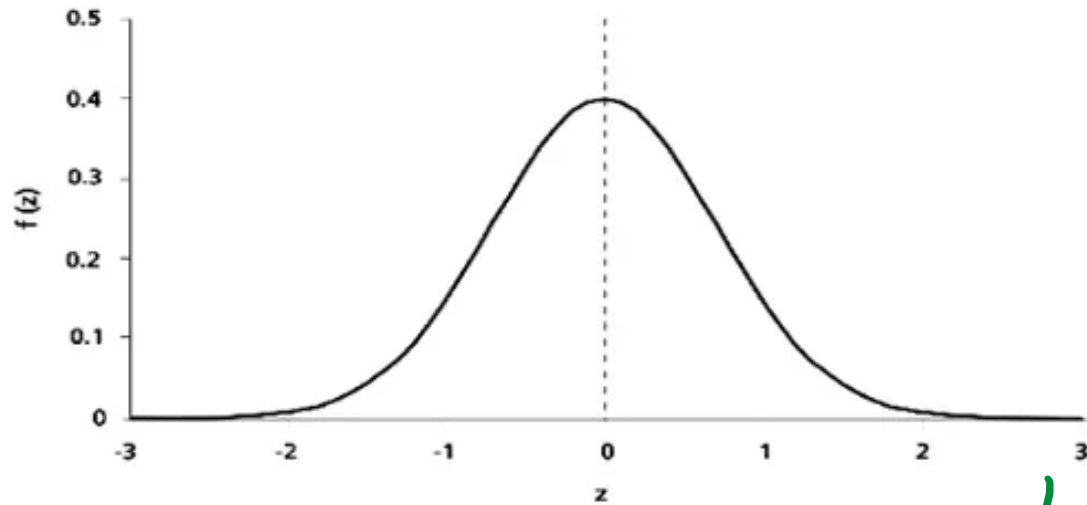
## توزیع نرمال

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Algebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.



$$X \sim \mathcal{N}(\bar{x}, \sigma^2)$$

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad -\infty < x < +\infty, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$$

$$E(x) = \mu$$

$$\text{Var}(x) = \sigma^2$$

$$M_x(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

در یک توزیع نرمال اندازه دو مقدار ۳۳ و ۲۴ بر حسب متغیر استاندارد Z برابر ۲ و ۱- می باشد، میانگین این جامعه کدام است؟

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \rightarrow \begin{cases} 2 = \frac{33 - \mu}{\sigma} \rightarrow 2\sigma = 33 - \mu \\ -1 = \frac{24 - \mu}{\sigma} \rightarrow -\sigma = 24 - \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sigma = 33 - \mu \\ -\sigma = 24 - \mu \end{cases}$$

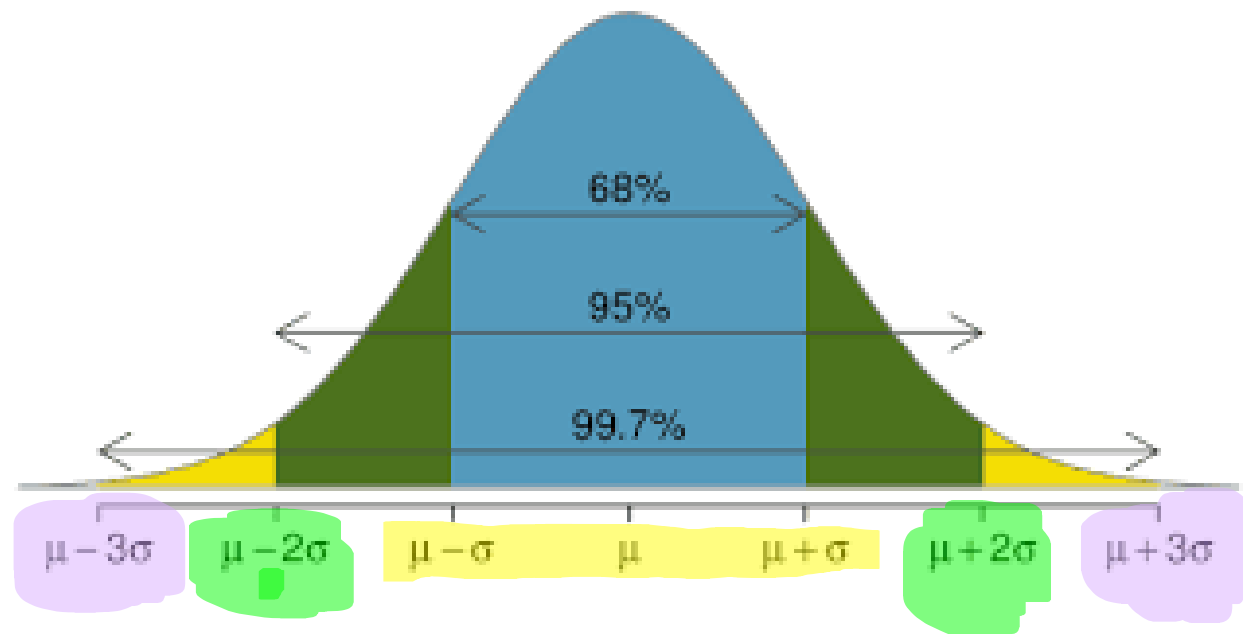
$$\rightarrow \begin{cases} 2\mu = 11 \\ -\sigma = 24 - \mu \end{cases}$$

$$\mu = 11$$

$$\mu = 24$$

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

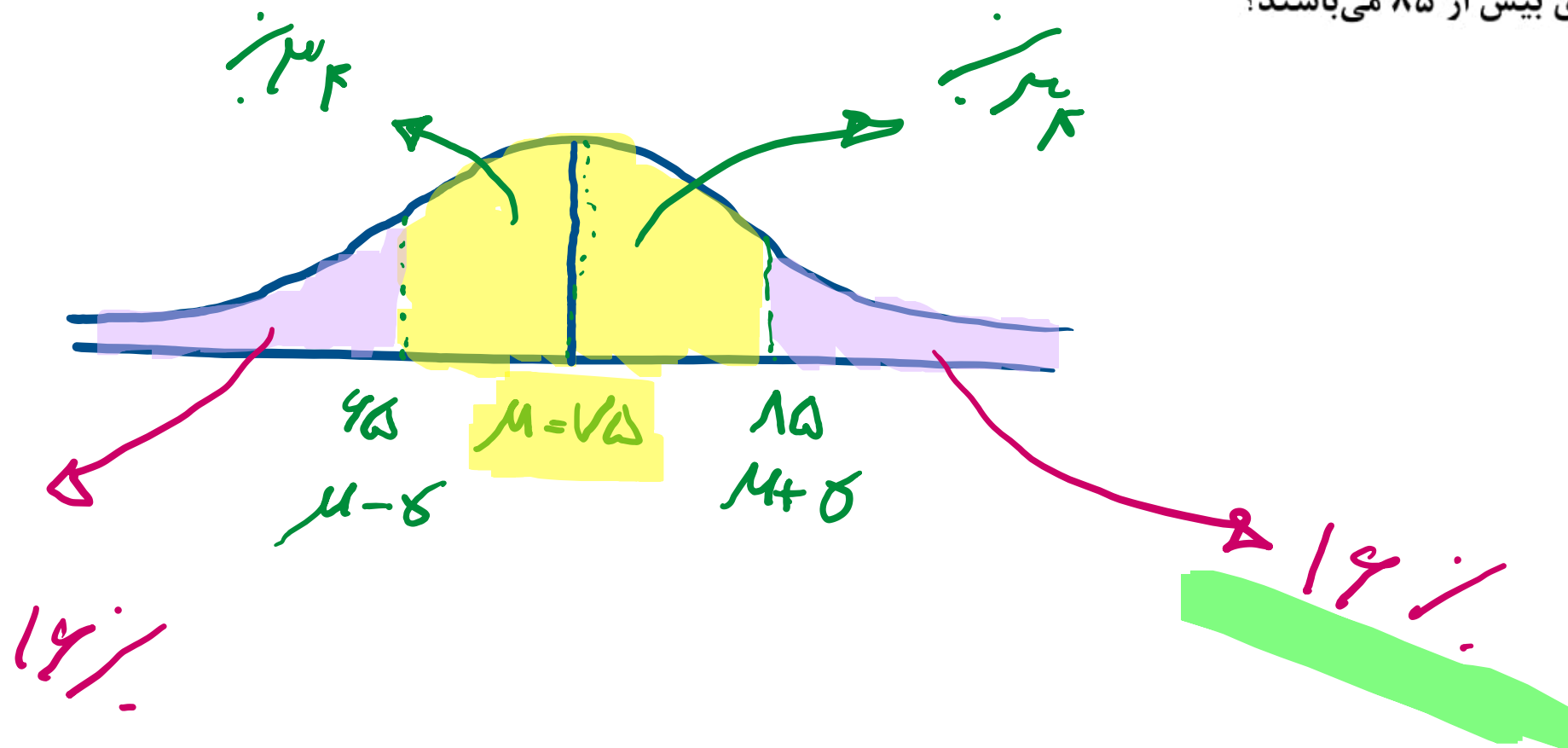


٪٦٨ →  $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$


٪٩٥ →  $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$

٪٩٩,٧ →  $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$

در یک امتحان ورودی کارشناسی ارشد، امتیاز شرکت کنندگان دارای توزیع نرمال با میانگین ۷۵ و انحراف معیار ۱۰ است. چه درصدی از شرکت کنندگان دارای امتیازی بیش از ۸۵ می باشند؟



تعداد روزهایی که طول می کشد تا یک خانه بفروش برسد دارای توزیع نرمال با میانگین ۵۶ روز می باشد. بعلاوه ۹۵ درصد از خانه ها بین ۴۰ تا ۷۲ روز طول می کشد تا بفروش روند. انحراف معیار تعداد روزهایی که طول می کشد تا خانه ها بفروش روند برابر است با:

$$\begin{aligned} \mu - 2\sigma &= 40 \longrightarrow 56 - 2\sigma = 40 \longrightarrow \sigma = 8 \\ \mu + 2\sigma &= 72 \end{aligned}$$


چنانچه جامعه‌ای نرمال نباشد، فاصله  $\mu \pm 3\sigma$  حداقل شامل چند درصد داده‌ها است؟

۸۸/۸ (۴)

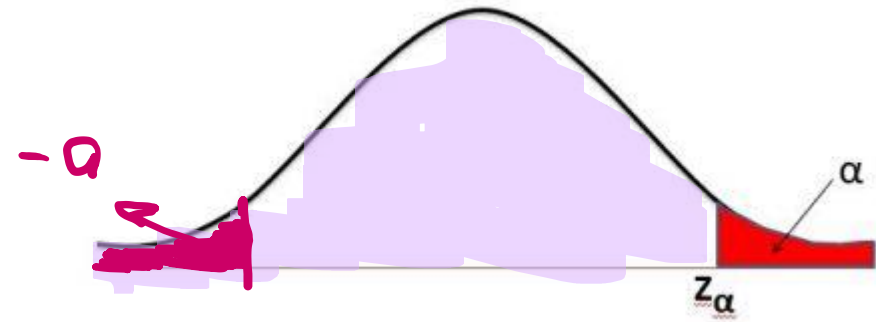
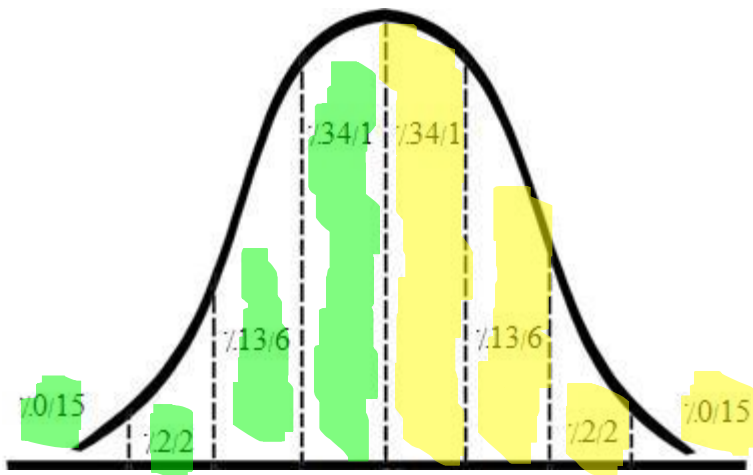
۹۴/۴ (۳)

۹۹/۷ (۲)

۷۵ (۱)

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$$

$$P(-a \leq x \leq a) = 1 - P(x > a) - P(x < -a)$$

$$P(x > a) = 1 - P(x \leq a)$$

$$P(x > \mu) = 1 - P(x \leq \mu) = \frac{1}{2}$$

$$P(x \leq a) = 1 - P(x \geq a)$$



نمرات دانشجویان دارای توزیع نرمال با میانگین ۶۳/۶ می باشد. ۲۰ درصد این دانشجویان نمرات بیشتر یا مساوی ۷۲ دارند، اگر

$P(Z \leq 0.74) = 0.78$  انحراف معیار کدام است؟

$$P(X \geq 72) = 0.2$$

$$X \sim N(63.6, \sigma^2)$$



$$\frac{72}{\sigma} = 0.74 \rightarrow \sigma = \frac{72}{0.74}$$

$$\sigma = \frac{72}{0.74}$$

$$P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{72 - 63.6}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{72}{\sigma}\right) = 0.2$$

$$P(Z \leq 0.74) = 0.78 \rightarrow P(Z > 0.74) = 0.2$$

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

$$n \cdot p > 5$$

$$n \cdot q > 5$$

$$\mu = n \cdot p$$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$$

$$P(x=a) = P(a - \frac{1}{r} < x < a + \frac{1}{r})$$

$$P(a \leq x \leq b) = P(a - \frac{1}{r} \leq x \leq b + \frac{1}{r})$$

$$P(x \leq a) = P(x \leq a + \frac{1}{r})$$

$$P(x \geq a) = P(x \geq a - \frac{1}{r})$$

$$P(x > a) = P(x > a + \frac{1}{r})$$

$$P(x < a) = P(x < a - \frac{1}{r})$$

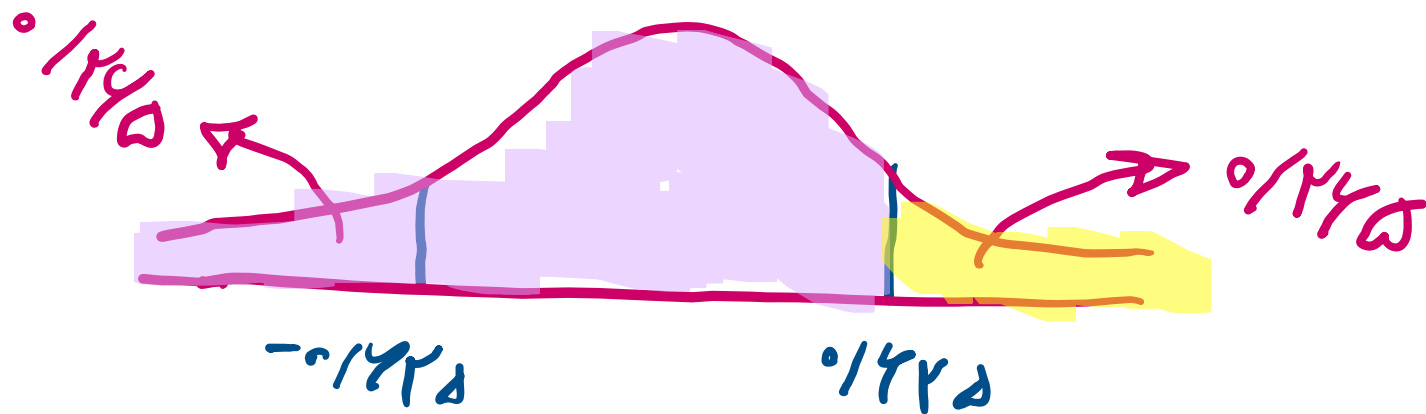
احتمال تردد اتومبیل دارای نقص فنی در شهری  $\frac{1}{9}$  است. با استفاده از تقریب دو جمله‌ای به وسیله توزیع نرمال با

کدام احتمال از ۱۶۲ دستگاه عبوری حداکثر ۲۰ دستگاه آن دارای نقص فنی است؟  $(S_{\infty} = 0, 265)$

$$\mu = np = 144 \times \frac{1}{9} = 16 \quad \sigma = \sqrt{npq} = 144 \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{9} = 16$$

$$P(x < 20) = \Phi\left(z < \frac{20 - 16 + 0,5}{4}\right) = \Phi\left(z < \frac{4,5}{4}\right)$$

$$P(z < 1,125) = 1 - P(z > 1,125) = 1 - 0,125 = 0,875$$



**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

به طور متوسط ۲۵ درصد از اتومبیل‌هایی که از یک بزرگراه عبور می‌کنند، تک‌سرنشین هستند، با کدام احتمال از ۱۹۲ اتومبیل عبوری کمتر از

۴۴ اتومبیل تک‌سرنشین هستند؟  $(S_{-\infty}^{0/75} = 0/7734)$

۰/۷۷۳۴ (۴)

۰/۴۳۳۲ (۳)

۰/۲۷۳۴ (۲)

۰/۲۲۶۶ (۱)

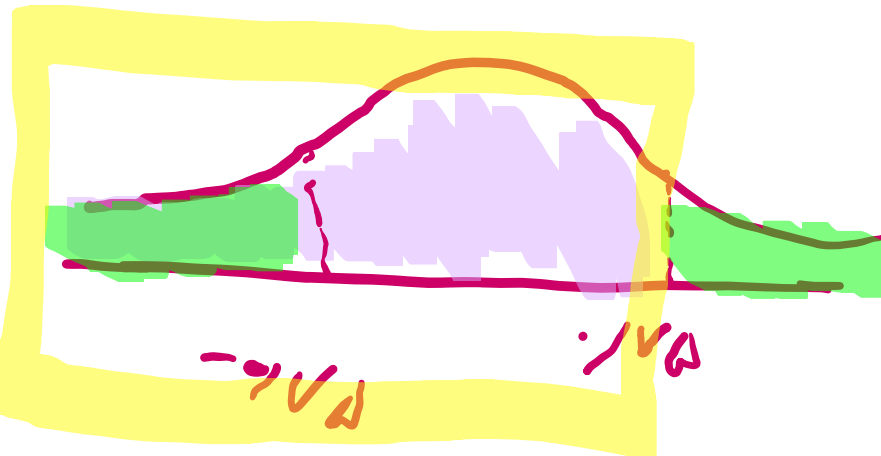
$$\bar{x} = np = 192 \times \frac{1}{4} = 48$$

$$\sigma^2 = npq = 192 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 36$$

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{44 - 48}{6} = -0/66$$

$$= P(Z < -0/75)$$

$$P(x < 44) = P(x < 44) = P\left(Z < \frac{44 - 48}{6}\right)$$



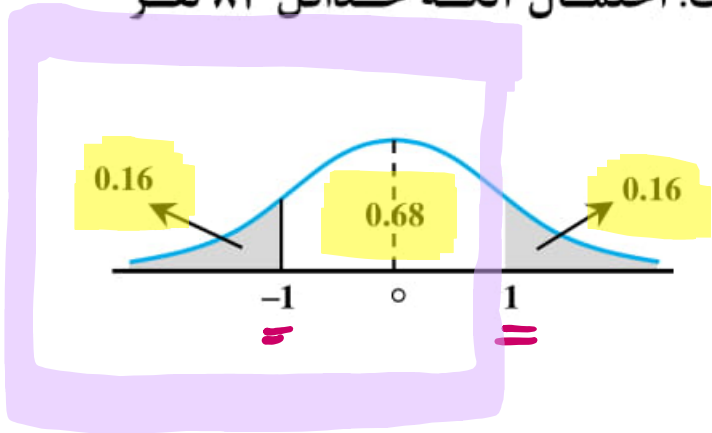
$$P(Z < -0/75) = 1 - 0/7734$$

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

تعداد ۱۰۰ متقاضی به فروشگاه می کنند، احتمال آنکه هر یک خریدی را انجام دهند ۸/۰ است. احتمال آنکه حداقل ۸۴ نفر

خریدی را انجام دهند تقریباً چقدر است؟



$$\bar{x} = nP = 100 \times \frac{1}{6} = 16$$

$$\sigma^2 = nPq = 100 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 14$$

$$P(x \geq 14) = P\left(z \geq \frac{14 - 16}{\sqrt{14}}\right) = P(z > 1)$$

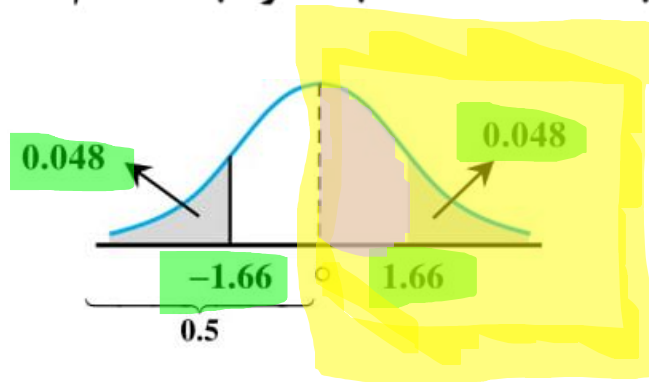
$$\text{یعنی} \rightarrow \left(\overset{0-1}{\mu - \sigma}, \overset{0+1}{\mu + \sigma}\right) = \left(\overset{z}{-1}, \overset{z}{1}\right)$$

0.16

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

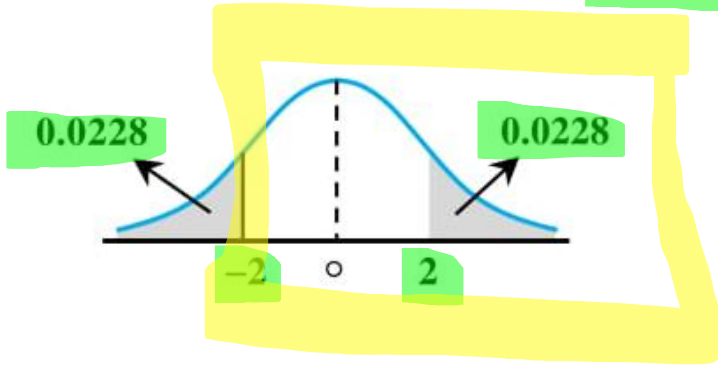
نمرات ریاضی، دارای توزیع نرمال با میانگین  $14/5$  و انحراف معیار  $1/5$  می باشد اگر فردی از بین داوطلبان به تصادف انتخاب شود با کدام احتمال نمره وی بین  $14/5$  و  $17$  است؟  $(P(Z < -1/67) = 0/048)$



$$P(14.5 < x < 17) = P\left(\frac{14.5 - 14.5}{1/5} < z < \frac{17 - 14.5}{1/5}\right)$$

$$P(0 < z < 1/67) = 0/5 - 0/048 = 0/452$$

متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع نرمال با میانگین  $20$  و انحراف معیار  $5$  است. احتمال این که متغیر تصادفی  $X$  مقادیر بیش از  $10$  را اختیار کند چقدر است؟ (فرض کنید مقدار رها شده در دنباله راست توزیع  $Z$  از جدول برای عدد  $2$  برابر  $0.0228$  است.)



$$P(x > 10) = P\left(z > \frac{10 - \mu_0}{\sigma}\right) = P(z > -2)$$

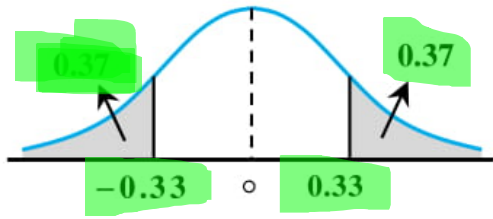
$$P(z > -2) = 1 - 0.0228 = 0.9772$$

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



در یک توزیع نرمال با میانگین ۱۵/۲۱ و واریانس ۹، داده نظیر شصت و سومین صدک آن کدام است؟  $(P(Z < -0.33) = 0.37)$



$$P(x < a) = 0.43 \rightarrow P\left(z < \frac{a - 15.21}{3}\right) = 0.43$$

$$P\left(z \geq \frac{a - 15.21}{3}\right) = 1 - 0.43 = 0.57$$

$$P\left(z \geq \frac{a - 15.21}{3}\right) = 0.57$$

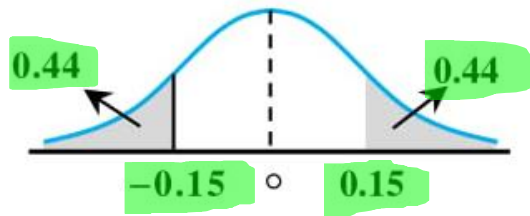
$$P\left(z \geq 0.33\right) = 0.57 \rightarrow \frac{a - 15.21}{3} = 0.33$$

$$a = 19.2$$

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

در یک توزیع نرمال با میانگین  $17/2$  و واریانس  $16$ ، داده نظیر صدک پنجاه و ششمین کدام است؟  $(P(Z < -0/15) = 0/44)$

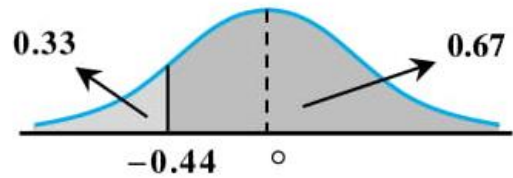


$$P(x < a) = 0,54 \rightarrow P\left(z < \frac{a - 17,2}{4}\right) = 0,54$$

$$P\left(z \geq \frac{a - 17,2}{4}\right) = 1 - 0,54 = 0,46 = P\left(z \geq 0,15\right)$$

$$\frac{a - 17,2}{4} = 0,15 \rightarrow a = 17,2$$

در یک توزیع نرمال با انحراف معیار ۵ داریم  $P(X \geq 9/8) = 0/67$  و  $P(Z < -0/44) = 0/33$  میانگین این توزیع کدام است؟



$$P(Z > -0/44) = 1 - 0/33 = 0/67$$

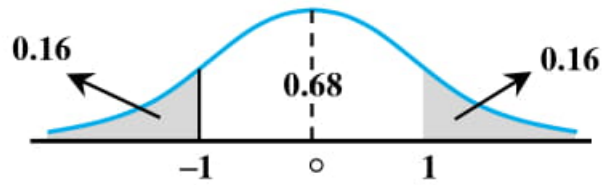
$$P(X \geq 9/8) = 0/67 \rightarrow P\left(Z > \frac{9/8 - \mu}{5}\right) = 0/67$$

$$\frac{9/8 - \mu}{5} = -0/44 \rightarrow \mu = 12$$

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

فرض کنید متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع نرمال با میانگین  $10$  و واریانس  $16$  باشد، اگر احتمال کران پایین مقدار  $X$  برابر با  $0.159$  باشد، مقدار  $X$  چقدر است؟



$$P(X > x) = 0.159 \rightarrow P\left(Z > \frac{x-10}{4}\right) = 0.159$$

$$P(Z > 1) = P(Z < -1) = 0.159$$

$$\frac{x-10}{4} = 1 \rightarrow x-10=4 \rightarrow x=14$$

در یک توزیع نرمال با میانگین ۴۷ و واریانس ۶۴، اگر به هر مقدار متغیر تصادفی ۵ واحد افزوده شود آنگاه چند درصد داده‌های جدید بیشتر از ۵۲ خواهد شد؟

$$\bar{x} = 47 \xrightarrow{\text{نوب}} \bar{x} = 52 \quad \sigma^2 = 64 \xrightarrow{\text{نوب}} \sigma^2 = 64$$

$$P(x > 52) = P\left(z > \frac{52 - 52}{\sigma}\right) = P(z > 0) = \frac{1}{2}$$



$$\lambda > \lambda_0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(n-\mu)^2}$$

$$\mu = \lambda \quad \sigma^2 = \lambda$$

بطور متوسط در هر دقیقه ۲ مشتری وارد مغازه می شود. احتمال اینکه بیش از ۲۰ مشتری در نیم ساعت مراجعه کنند چقدر است؟

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \\ \mu & \sigma & \\ 10 & 4 & \end{array} \rightarrow \lambda = \frac{\mu}{\sigma} = 2.5 > 1.0 \rightarrow \text{نرمال}$$

$$P(X > 20) = P\left(Z > \frac{20 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{20 - 10}{\sqrt{4}}\right)$$

$$\rightarrow P(Z > -2.5) = 0.9938$$



۰.۹۹۳۸

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت [Algebra.com](http://Algebra.com) است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.