

# آموزش صفر تا صد آمار و احتمال

## امید ریاضی

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Algebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$E(x) = \sum x \cdot P(x)$$

$$E(a) = a$$

$$E(ax+b) = aE(x) + b$$

$$E(E(x)) = E(x)$$

$$E(g(x)) = \sum g(x) \cdot P(x)$$

$$E(g(x)) = \int g(x) \cdot f(x) dx$$

تابع چگالی احتمالها برای کمیت تصادفی  $X$  به صورت  $\varphi(x) = \frac{2x+3}{18}$ ،  $0 < x < 3$  بیان شده است. امید ریاضی کمیت تصادفی  $X$  کدام

$$E(x) = \int x f(x) dx = \int_0^3 x \cdot \left( \frac{2x+3}{18} \right) dx$$
$$= \frac{1}{18} \int_0^3 (2x^2 + 3x) dx = \frac{1}{18} \left( \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \Big|_0^3 \right)$$

$$= \frac{1}{18} \left( 18 + \frac{27}{2} \right) = 1 + \frac{3}{4} = 1.75$$

**ALIGEBRA.COM**

•9127744281-•9127744389

تابع چگالی متغیر تصادفی  $X$  به صورت  $f(x) = \begin{cases} a(4x - x^2) & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{سایر جا} \end{cases}$  است. امید ریاضی  $X$  کدام است؟

$$\int_0^3 f(x) dx = 1 \rightarrow a \int_0^3 (4x - x^2) dx = 1 \rightarrow a \left( 4x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 1$$

$$a(12 - 9) = 1 \rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = \int_0^3 x \cdot \frac{1}{3} (4x - x^2) dx = \frac{1}{3} \int_0^3 (4x^2 - x^3) dx$$

$$\frac{1}{3} \left( \frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^3 = \frac{1}{3} \left( 36 - \frac{81}{4} \right) = \frac{15}{4}$$

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

فرض کنید  $X$  دارای تابع چگالی احتمالی  $1 < x < a$   $f(x) = \frac{1}{12}x$  در این شرایط گزینه صحیح برابر  $E(X)$  کدام است؟

$$\int_1^a f(x) = 1 \rightarrow \frac{1}{12} \int_1^a x dx = 1 \rightarrow \frac{1}{12} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^a = 1$$

$$\frac{1}{24} (a^2 - 1) = 1 \rightarrow a^2 - 1 = 24 \rightarrow a^2 = 25$$

$$a = 5$$

$$E(x) = \int_1^a x \cdot \frac{1}{12} x dx = \frac{1}{12} \int_1^a x^2 dx$$

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^a = \frac{1}{36} (125 - 1) = \frac{124}{36} = \frac{31}{9}$$

**ALIGEBRA.COM**

•9127744281-•9127744389

به ازای مقداری از  $k$  تابع  $f(x) = \begin{cases} kx^2, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{جای دیگر} \end{cases}$  یک تابع چگالی احتمال است. امید ریاضی  $X$  کدام است؟

$$\int_0^4 kx^2 dx = 1 \rightarrow \frac{kx^3}{3} \Big|_0^4 = 1 \rightarrow \frac{k}{3} \cdot 4^3 = 1 \rightarrow k = \frac{3}{4^3}$$

$$E(x) = \int_0^4 x \cdot \frac{3}{4^3} x^2 dx = \frac{3}{4^3} \int_0^4 x^3 dx$$

$$\frac{3}{4^3} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^4 = \frac{3}{4^3} \times 4^4 = 3$$

اگر  $f(x) = \frac{2x-1}{25}$ ,  $x = 1, 2, 3, 4, 5$  باشد، مقدار  $E(X)$  کدام است؟

$x$	1	2	3	4	5
$P(x)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$

$$E(x) = \sum_{x=1}^5 x \cdot f(x) = \frac{1}{25} + \frac{2}{25} + \frac{3}{25} + \frac{4}{25} + \frac{5}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

**ALIGEBRA.COM**

•9127744281-•9127744389



در جدول مقابل،  $a$  چه مقدار باشد تا  $E(X) = 4$  باشد؟

$x$	3	$a$	10	14
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$b$	$\frac{4}{10}$

$$\sum P(x) = 1 \rightarrow \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + b + \frac{4}{10} = 1 \rightarrow b = \frac{2}{10}$$

$$E(x) = \sum xP(x) = 4 \rightarrow \frac{3}{10} + \frac{3a}{10} + 10 \times \frac{2}{10} + 14 \times \frac{4}{10} = 4$$

$$\frac{3a}{10} = 4 - \frac{29}{10} = \frac{-19}{10} \rightarrow a = \frac{-19}{3} = -1\frac{2}{3}$$

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

امید ریاضی  $(X-1)^2$  کدام است؟

X	-1	0	1	2
f(x)	0/1	0/15	0/5	0/25

در تابع احتمال

$$E(x) = \sum x f(x)$$

$$E((x-1)^2) = \sum (x-1)^2 \cdot f(x)$$

$$E((x-1)^2) = 1^2 \cdot 0/1 + 0^2 \cdot 0/15 + 0 + 1^2 \cdot 0/25$$

$$E((x-1)^2) = 0/1$$

تابع چگالی  $f(x)$  به صورت  $f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$  تعریف شده است، اگر امید ریاضی آن برابر  $\frac{2}{3}$  باشد،  $a$  و  $b$  کدام است؟

$$\int_0^1 (a + bx^2) dx = 1 \Rightarrow ax + \frac{bx^3}{3} \Big|_0^1 = a + \frac{b}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{3a + b = 3}$$

$$E(x) = \int_0^1 (ax + bx^3) dx = \frac{ax^2}{2} + \frac{bx^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 3a + b = 3 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

تابع چگالی احتمال به صورت  $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{x}\sqrt{x}} & ; 1 < x < 64 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$  مفروض است. امید ریاضی متغیر تصادفی  $X$ ، کدام است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)

$$E(x) = \int_1^{64} x \cdot \frac{4}{\sqrt{x}\sqrt{x}} dx = \frac{4}{\sqrt{x}} \int_1^{64} x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{4}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_1^{64} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} \Big|_1^{64}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} (\sqrt{x}) \Big|_1^{64} = 1 \rightarrow E(x) = 1$$

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت [Algebra.com](http://Algebra.com) است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.